

УДК 535.41:621.396

А. С. Мазманишвили¹, В. А. Пуляев², Е. В. Рогожкин¹

¹Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», Харків

²Інститут іоносфери Національної академії наук України та Міністерства освіти і науки України, Харків

Особенности определения высотных зависимостей параметров ионосферной плазмы при некогерентном рассеянии радиоволн

Надійшла до редакції 10.12.03

Представлено алгоритмічні процедури розв'язування зворотної задачі електродинаміки, пов'язаної із оцінкою структури і динаміки іоносферної плазми. Запропоновано метод регуляризації розв'язків зворотної задачі у дослідях з некогерентного розсіяння радіохвиль у іоносфері. Розглянуто кореляційний функціонал, визначений на комплекснозначному марківському процесі. Отримано аналітичні вирази, що описують статистичні характеристики такого функціоналу. Наведено приклад використання знайдених щільностей розподілу для підвищення вірогідності іоносферних вимірів у методі некогерентного розсіяння радіохвиль.

ВВЕДЕНИЕ

Радиолокационные системы, использующие метод некогерентного рассеяния (НР) радиоволн, позволяют наземными средствами исследовать ионосферу Земли в интервале высот до 1500—3000 км, который определяется потенциалом радиолокационной установки. Специализированные радиолокаторы НР имеют эффективную мощность излучения PG порядка 10 ГВт и используют уникальные антенны с эффективной поверхностью $10^4—10^5$ м². Именно такие высокие параметры сделали возможным наблюдения эффекта рассеяния в ионосферной плазме [9].

Суть метода в том, что распространяющаяся в плазме радиоволна рассеивается на весьма незначительных неоднородностях электронной концентрации, которые создаются вследствие теплового движения заряженных частиц. Если радиоволна имеет длину, значительно большую дебаевского радиуса экранирования, то распределение мощности в спектре рассеяния определяется коллективными свойствами плазмы [6], которые, в свою очередь, определяются вектором локальных параметров плазмы и наличием внешних воздействий. Следовательно, есть принципиальная возможность по

сигналу НР определить характеристики рассеивающей среды, а по ним — и параметры ионосферы [11, 12]. Такие исследования необходимы для решения многих практических задач, например для калибровки результатов одновременных измерений легких ионов на спутниках NASA.

Проблема заключается в том, что сигнал рассеяния является случайным процессом, поэтому оценка вектора параметров Θ также является случайной функцией. Кроме того, дисперсия оценки значительно увеличивается при малых соотношениях сигнал/шум, что характерно для предельно низких и предельно больших высот, а также при изучении быстротекущих процессов в ионосфере.

Мощность передатчиков и эффективная поверхность антенн имеют ограничения, поэтому дальнейшее увеличение диапазона исследуемых высот, а также увеличение высотно-временного разрешения возможны на пути использования современных методологических подходов к обработке ионосферной информации. К ним относятся и алгоритмы идентификации, позволяющие находить параметры ионосферной плазмы по экспериментальным автокорреляционным функциям (АКФ) в случае относительно слабого, до 1 % от уровня шумов, сигнала рассеяния.

АНАЛИЗ ПРОБЛЕМЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ ИОНОСФЕРНЫХ ПАРАМЕТРОВ

Процедура определения высотного распределения ионосферных параметров сводится к решению обратной задачи электродинамики. При этом минимизируется функционал, который определяет отклонение измеренных АКФ $r_{\Theta}(\tau_i, h_r; \Theta)$ от соответствующих ординат некоторого набора теоретических АКФ $r_T(\tau_i; \Theta)$. Этот функционал имеет вид [5]

$$\chi^2(h_r; \Theta) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left[\frac{r_{\Theta}(\tau_i, h_r; \Theta) - r_T(\tau_i; \Theta)}{\Delta(\tau_i)} \right]^2, \quad (1)$$

где $\Delta(\tau_i)$ — расчетная неуверенность измерений, или вес i -й ординаты АКФ (к примеру, величина, обратная АКФ огибающей зондирующего импульса). Решения с его помощью отыскиваются при анализе экспериментальных АКФ сигнала НР на всех n высотных участках с центрами на h_r ($r = 1, \dots, n$), взятых через некоторый интервал.

В целом процедура расчета при НР представляет многократное решение прямой задачи, когда в физически обоснованных пределах [3, 5] варьируются составляющие вектора ионосферных параметров Θ . Эта процедура приводит к неоднозначности решения, так как в принципе является некорректно поставленной. Неоднозначность всегда будет существовать из-за того, что изменение положения вектора Θ в n -мерном пространстве за счет изменения одной из его составляющих может быть компенсировано изменением совокупности других составляющих.

Имеется много работ, посвященных методам построения устойчивых приближенных решений некорректно поставленных обратных задач (см. [10]), но в то же время среди них нет соответствующих функционалов, подходящих для нашего случая. Здесь мы рассматриваем схожую проблему минимизации функционала на примере решения обратной задачи теории антенн, в которой ставится условие надежной оценки распределения тока в прямолинейном стержне, порождающего заданную диаграмму направленности этой антенны. Задача решается путем введения регуляризирующих операторов.

Как оказалось, аналогичный подход можно применить и для решения проблемы устойчивости решения при минимизации разностного функционала (1). При этом ситуация неоднозначности решений частично будет разрешена на пути использования дополнительной априорной информации. Например, информации о монотонности парамет-

ров, которую можно получить из модельных представлений об ионосфере, или из анализа этих параметров на смежных высотных участках.

Особенностью импульсного зондирования также является различие условий (регулярных и случайных) формирования ординат АКФ сигнала рассеяния, что приводит к различиям их дисперсий, которые тем больше, чем больше задержка. Это связано с изменением рассеивающего объема, дающего коррелированный вклад при разных положениях зонда в ионосфере [6]. На статистический разброс АКФ оказывает влияние еще и степень коррелированности данных НР, поэтому необходимы исследования связи интервала разброса ординат АКФ с их доверительной вероятностью для уточнения значений $\Delta(\tau_i)$.

Цель работы заключается в том, чтобы провести такую модификацию методик обработки АКФ сигнала НР, используемых при решении обратной задачи электродинамики, чтобы, учитывая особенности некогерентного рассеяния радиоволн, повысить достоверности оценок основных параметров ионосферной плазмы.

МЕТОД РЕГУЛЯРИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ ПРИ НЕКОГЕРЕНТНОМ РАССЕЯНИИ

Реализовать устойчивость решения обратной задачи электродинамики можно за счет использования метода регуляризации. Прямая задача при НР состоит в определении нормированных АКФ $r(\tau)$ сигнала рассеяния ионосферной плазмой с заданными параметрами P , совокупность которых можно обозначить вектором $\Theta(P)$. Задача сводится к вычислению функции

$$r(\tau) = A[\Theta]. \quad (2)$$

Обратная задача электродинамики подразумевает нахождение распределения параметров $\Theta(P)$ точки M , порождающих заданную форму $r(\tau)$. Эта задача относится к типу задач минимизации функционала по аргументу, если необходимо найти такие параметры Θ , на которых достигается минимум функционала $F[|A[\Theta] - r(\tau)|]$.

Известно, что в обратных задачах с приближенными исходными данными, сколь угодно близкими к точным, решения функционала могут различаться как угодно сильно. А это означает, что даже малым изменениям левой части уравнения (2) могут соответствовать большие изменения решения, выходящие за пределы допустимых значений. В результате данная система оказывается плохо

обусловленной, или некорректно поставленной, и применительно к электродинамике это вызвано следующими причинами.

Уравнение (2) имеет решение лишь для четко определенного класса функций, описывающих левые части. На практике же имеются свои особенности (например, нет аппаратной возможности определять АКФ сигнала НР на бесконечном интервале задержек, конечным является и сам шаг по задержке, нарушаются условия нормировки АКФ при выборках конечной длительности и др.). Дополнительные условия накладываются и на распределение ионосферных параметров P . К ним относятся, например, требования работать с максимальной размерностью вектора $\Theta(P)$, соблюдать ограничения на значения каждого компонента вектора и на его градиенты, исключать совокупности таких значений параметров, которые не соответствуют физическим представлениям и т. д.

В связи с этим целесообразно несколько иначе сформулировать обратную задачу электродинамики. Ее решением будем называть параметры, реализующие минимум функционала (2), но с введением вспомогательных функций, которые должны отражать влияние рассмотренных выше ограничений.

Пусть $F_i[r(\tau)]$, $i = 1, 2, \dots, n$ — функционалы, такие, что i -й функционал определен на функциях $r(\tau)$, удовлетворяющих i -му требованию, накладываемому на нормированные АКФ сигнала НР (или на АКФ флюктуаций электронной плотности). Функционалы характеризуют особенности этих функций. Аналогично, пусть $\Psi_k[\Theta(M)]$, $k = 1, 2, \dots, m$ — функционалы, каждый из которых определен на функциях $\Theta[M]$, удовлетворяющих условию, накладываемому на распределение ионосферных параметров. Эти функционалы характеризуют рассеивающую среду — плазму.

Обобщая, рассмотрим функционал

$$F_n[r] = \sum_{i=1}^n \beta_i F_i[r],$$

определенный на функциях, удовлетворяющих всем условиям, накладываемым на характер АКФ, и функционал

$$\Psi_m[\Theta(M)] = \sum_{k=1}^m \gamma_k \Psi_k[\Theta],$$

определенный на функциях, удовлетворяющих всем условиям, накладываемым на распределение параметров. В этих суммах β_i и γ_k — весовые множители, выбираемые согласно значимости и влиянию соответствующих условий. Отсюда следу-

ет, что приближенным решением обратной задачи электродинамики можно называть параметры $\Theta(M)$, реализующие минимум функционала

$$F[A(\Theta)] + \alpha \Psi[\Theta], \quad (3)$$

где $F[*]$ — целевой функционал; α — коэффициент или весовой параметр регуляризации, характеризующий влияние ограничений на распределение параметров, который согласован с задаваемой погрешностью δ и может быть найден по минимуму невязки:

$$\rho_{\min}[|A(\Theta) - r(\tau)|] = \delta. \quad (4)$$

Таким образом, в то время как исходная задача (2) не обладает свойством устойчивости, задача минимизации функционала (3) приобретает устойчивость к малым изменениям $r(\tau)$. Эта устойчивость достигается сужением класса возможных решений с помощью введения функционала $\Psi_m[\Theta]$ с описанными выше свойствами, который в нашем случае призван играть стабилизирующую роль.

Результаты дальнейших исследований позволили определить вид стабилизирующих функционалов применительно к анализу сигнала рассеяния. В работе [3] были разработаны структуры регуляризирующих операторов, которые используют априорные сведения. Пример такого оператора, который учитывает высотный ход температур электронов T_e и ионов T_i и корректирует отклонения температур $T = (T_i, T_e)$ от априорного направления вектора Θ в n -мерном пространстве, выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \Psi[T] &= \chi_D^2(h_r, T_i, T_e) = \\ &= \left[T_e(h_r) - \left\{ T_e(h_{r-1}) + [T_e(h_{r-1}) - T_e(h_{r-2})] \frac{h_r - h_{r-1}}{h_{r-1} - h_{r-2}} \right\} \right]^2 + \\ &+ \left[T_i(h_r) - \left\{ T_i(h_{r-1}) + [T_i(h_{r-1}) - T_i(h_{r-2})] \frac{h_r - h_{r-1}}{h_{r-1} - h_{r-2}} \right\} \right]^2. \end{aligned} \quad (5)$$

В качестве регуляризирующего оператора, позволяющего предотвратить недопустимо большие градиенты высотного хода компонентов ионного состава, например ионов гелия $\text{He}^+(h_r)$, можно использовать функционал вида

$$\Psi[\text{He}] = u''(h), \quad (6)$$

где $u''(h)$ — вторая производная от функции, описывающей высотное распределение ионов гелия, которую можно получить из подтвержденных практикой моделей ионосферной плазмы.

СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА
АВТОКОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ СИГНАЛА
РАССЕЯНИЯ

Статические свойства ординат АКФ сигнала НР определим, исходя из дискретного представления сигнала рассеяния [1].

В силу свойств сигнала НР последовательность фиксируемых отсчетов $\{z_1, z_2, \dots\}$ является случайной, следовательно, при выборках конечного объема случайны и оценки АКФ сигнала НР. В реальных ионосферных измерениях отсчеты являются комплекснозначными, так как соответствуют либо сигналам после синхронного детектирования, либо отсчетам на промежуточной частоте с интервалом, равным четверти ее периода [6].

В этой связи для выявления влияния степени коррелированности отсчетов рассмотрим аддитивный автокорреляционный функционал вида

$$K_i = \frac{1}{2N} \sum_{n=1}^N (z_{n+i}^* + z_n z_{n+i}^*), \quad (7)$$

где $i = \tau/\Delta$ — индекс задержки, Δ — шаг задержки, $\{z_1, z_2, \dots, z_{2N}\}$ — выборка объемом $2N$, извлеченная из генеральной совокупности отсчетов нормального марковского процесса $z(t)$ [7, 10] с нулевым средним, интенсивностью $\langle |z(t)|^2 \rangle = \sigma$ и декрементом ν . Такой набор переменных является достаточным для описания огибающих АКФ, наиболее близких к реальному АКФ флуктуаций электронной плотности, фиксируемых во время эксперимента на малых и средних ионосферных уровнях.

В силу статистической связи между значениями нормального марковского процесса распределение корреляционного функционала K_i будет иметь существенно различный вид в зависимости от $2N$, i и параметров этого процесса.

Анализ статистических характеристик функционала (7) осуществим, опираясь на свойство гауссовости случайного процесса $z(t)$ и теорем, справедливых для сечений нормальных процессов.

Теорема 1. В принятых выше предположениях аддитивный функционал

$$K_0 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |z_n|^2 \quad (8)$$

имеет равновесную производящую функцию

$$Q_0(\lambda) = \langle \exp(-\lambda K_0) \rangle \quad (9)$$

вида

$$Q_0(\lambda) = \frac{(1 - q^2)R}{(a_+ - q^2)^2 a_+^{N-1} - (a_- - q^2)^2 a_-^{N-1}}, \quad (10)$$

где λ — производящий параметр, $q = \exp(-\nu\Delta)$ — коэффициент корреляции соседних отсчетов и

$$a_{\pm} = \frac{1 + q^2 + N^{-1}\lambda\sigma(1 - q^2) \pm R}{2}, \quad (11)$$

$$R = \sqrt{[1 + q^2 + N^{-1}\lambda\sigma(1 - q^2)] - 4q^2}.$$

Теорема 2. Производящая (характеристическая) функция

$$Q_m(\lambda) = \langle \exp(-\lambda K_m) \rangle \quad (12)$$

случайных значений корреляционного функционала K_m для заданного интервала задержки $m\Delta > 0$ имеет вид

$$Q_m(\lambda) = Q_0(\lambda_+) Q_0(\lambda_-), \quad (13)$$

$$\lambda_+ = \frac{\lambda}{2} [1 + \exp(-m\nu\Delta)], \quad (14)$$

$$\lambda_- = -\frac{\lambda}{2} [1 - \exp(-m\nu\Delta)],$$

которые выражаются через исходный производящий параметр λ в (9).

Доказательство теорем приведено в Приложении.

Дальнейшие исследования производящей (характеристической) функции (13) $Q_m(\lambda)$ показывают, что плотность распределения вероятностей $f_m(\eta)$ случайных значений η корреляционного функционала K_m можно интерпретировать как свертку плотностей распределения вероятностей $f_+(\eta)$ и $f_-(\eta)$, связанных с корреляциями и антикорреляциями (штриховые линии на рис. 1) в случайном функционале K_m :

$$f(\eta) = [f_+(\eta) * f_-(\eta)](\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} f_+(\xi) f_-(\eta - \xi) d\xi \quad (15)$$

В свою очередь, функции $f_+(\eta)$ и $f_-(\eta)$, как и сама плотность $f_m(\eta)$, определяются как результат обратного преобразования Лапласа (с учетом знака величины λ_-) от соответствующих производящих

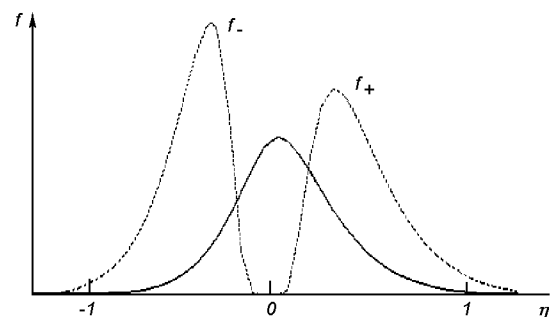


Рис. 1. Составляющие плотности распределения корреляционного функционала $f(\eta)$

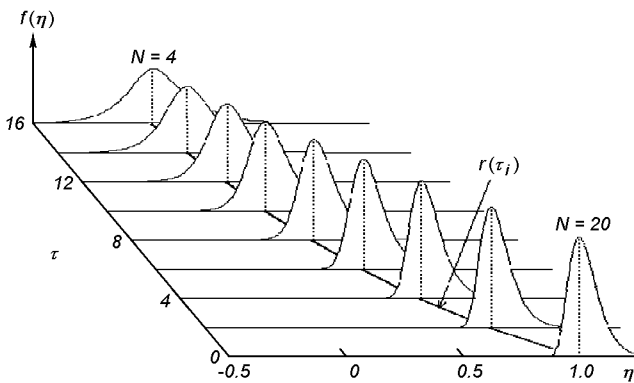


Рис. 2. Семейство плотностей распределения ординат корреляционного функционала сигнала НР при разном числе слагаемых N

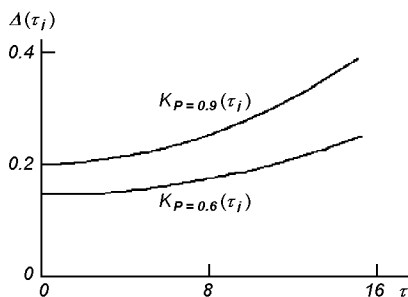


Рис. 3. Весовые коэффициенты $\Delta(\tau_i)$

функций $Q_0(\lambda_+)$ и $Q_0(\lambda_-)$ с выбранным контуром интегрирования C на комплексной λ -плоскости.

На рис. 2 приведено семейство плотностей распределения $f_m(\eta)$ в аддитивном корреляционном функционале (7) в зависимости от разного числа слагаемых N ($N = 20, 18, \dots, 4$). Кривые рассчитаны для декремента $\nu = 0.5$, интенсивности $\sigma = 1$ и значений задержек, приведенных к соответствующим задержкам τ АКФ реального сигнала НР ($\tau = 0, 2, \dots, 16$).

Как можно видеть, зависимости $f_m(\eta)$ несут статистически исчерпывающую информацию и могут использоваться для задания доверительной вероятности p . Их можно использовать и для оценки веса ординат, который задают значения доверительных интервалов $\Delta(\tau_i)$. К примеру, на рис. 3 изображен набор интервалов $\Delta(\tau_i)$, полученных из плотностей распределения для доверительных вероятностей p , равных 0.6 и 0.9. Полученные в этом случае значения дисперсии $K(\tau_i)$ можно принять в качестве весовых коэффициентов, отражающих статистический разброс ординат АКФ.

ПРОЦЕДУРА РАСЧЕТА ПАРАМЕТРОВ ИОНОСФЕРНОЙ ПЛАЗМЫ

Согласно проведенным выше исследованиям предлагается модифицированная процедура оценки высотного распределения параметров ионосферной плазмы, которая реализует алгоритм решения обратной задачи электродинамики, используя функционал вида

$$\chi^2(h_r; \Theta) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left[\frac{r_c(\tau_i, h_r; \Theta) - r_{MT}(\tau_i; \Theta)}{K(\tau_i)} \right]^2 + \chi_D^2(h_r; \Theta), \quad (16)$$

где $\chi_D^2(h_r; \Theta)$ — дополнительные составляющие функции невязки от использования операторов регуляризации, $K(\tau_i)$ — расчетная дисперсия, приведенная на рис. 3.

В реальных экспериментах количество k ординат АКФ ограничиваются используемыми аппаратурной и алгоритмической реализациями. Минимальное количество ординат и шаг по задержке определяется характером кривой и интервалом корреляции. Как показывает практика измерений, при работе в реальном времени можно ограничить число ординат АКФ до 15...20, при этом их выбирают таким образом, чтобы охватить наиболее характерные участки исследуемой кривой [2].

На основании проведенных исследований была разработана блок-схема процедуры расчета параметров ионосферной плазмы на основе решения обратной задачи электродинамики. Она представлена на рис. 4.

В предлагаемой структуре вначале над набором теоретических АКФ $r_1(\tau_i; \Theta)$ осуществляются вычислительные процедуры, повторяющие преобразования сигнала в аппаратуре с целью их максимального приближения к виду АКФ принятого сигнала. В блок-схеме используется и информация об оценках дисперсий ординат АКФ сигнала $r_c(\tau_i, h_r; \Theta)$, которые находятся из анализа плотности распределения корреляционного функционала.

Особенности функционирования приведенной процедуры заключаются в следующем.

В блоке 1 происходит разбиение потока входных сигналов, поступающих в течение каждой радиолокационной развертки дальности, на конечные отрезки (участки) и вычисление ординат АКФ с их усреднением на протяжении сеанса наблюдения. В блоке 2 происходит грубая оценка [3] граничных значений ионосферных параметров для данного типа эксперимента, а также анализ высотных изменений интенсивности $\sigma(h_r)$ и декремента $\nu(h_r)$, определяющего форму АКФ. В блоке 3 согласно

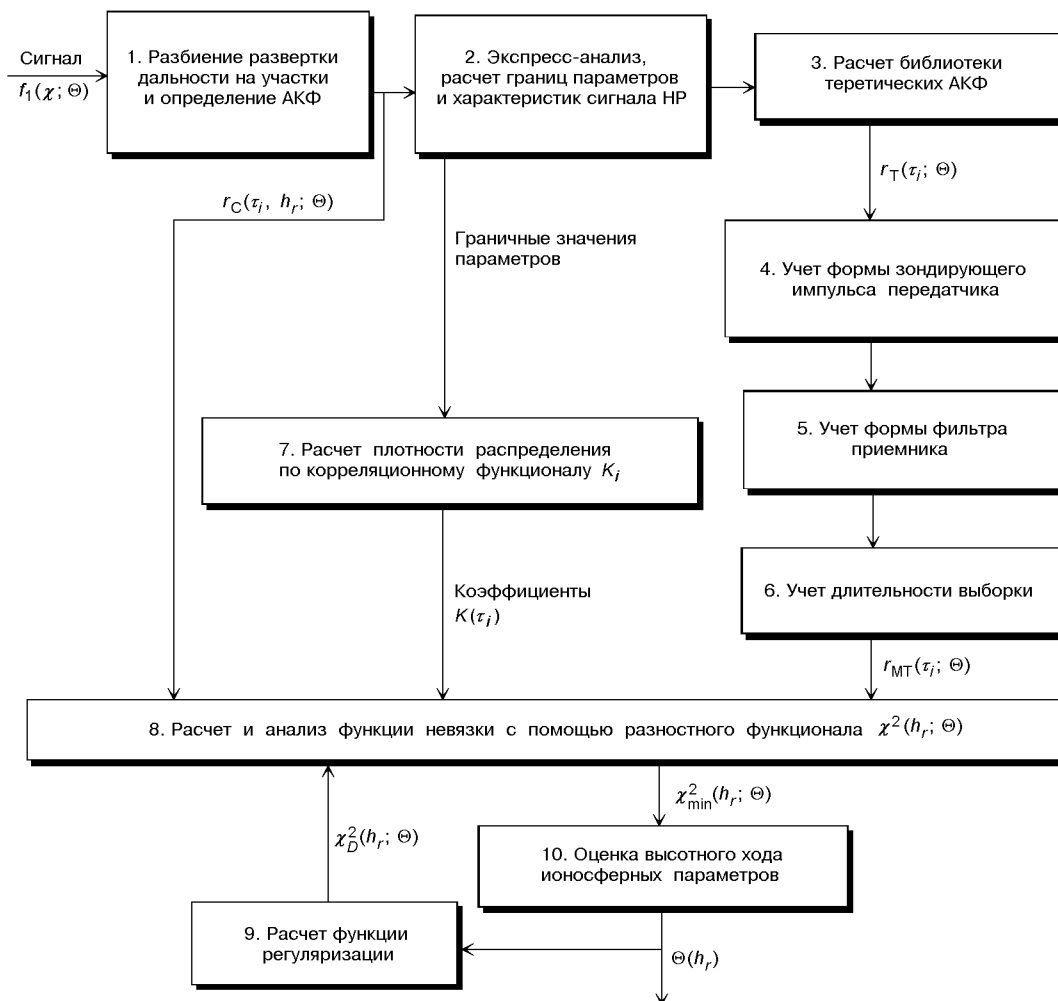


Рис. 4. Блок-схема процедуры расчета параметров ионосферной плазмы по АКФ сигнала НР

модели рассчитывается библиотека теоретических АКФ с минимально возможным (учитывая используемые ПК) шагом дискретизации в заданной области параметров. Блоки 4, 5 и 6 предназначены для модификации теоретических АКФ к виду $r_{MT}(\tau_j; \Theta)$ путем преобразований, учитывающих форму зондирующего импульса, частотную характеристику фильтра приемной системы и длительность выборки [4]). В блоке 8 происходит сравнение АКФ сигнала с элементами модифицированной библиотеки с последующей оценкой геофизических параметров в блоке 10. Блоки 7 и 9 предоставляют дополнительные сведения: априорную информацию о высотном ходе параметров плазмы и информацию о доверительных интервалах для ординат корреляционных функций для заданной доверительной вероятности p .

Таким образом, приведенная блок-схема позволяет учесть стохастическую природу последовательности отсчетов входного сигнала в методе НР, обеспечить сходимость оценок и максимально приблизиться к однозначному решению обратной задачи электродинамики. Результирующая погрешность в режиме оценки параметров ионосферной плазмы зависит от величины соотношения сигнал/шум и при длительности сеанса наблюдений около 15 мин не превышает 1—10 % [5].

РЕЗУЛЬТАТЫ ИОНОСФЕРНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Один из примеров рассчитанных параметров ионосферной плазмы в виде высотных изменений отношения сигнал/шум S/n , температур T_i и T_e и

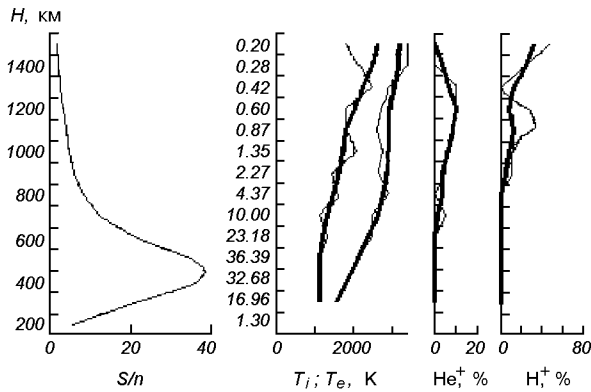


Рис. 5. Сравнение результатов расчета ионосферных параметров над Харьковом (ноябрь 1998 г.). Утолщенные линии соответствуют алгоритму (16)

относительного содержания ионов водорода H^+ и гелия He^+ приведен на рис. 5. Видно, что с увеличением высоты из-за уменьшения отношения сигнал/шум увеличивается разброс всех вычисляемых параметров. Предварительная обработка в целом демонстрирует характер поведения ионосферных параметров для этого времени суток, но не преодолевает неоднозначности решений в диапазоне высот 900—1300 км (нереальная инверсия температуры T_e , которая «скомпенсировалась» выбросом водорода H^+). В случае же использования функционала (16) с регуляризирующим оператором (5) получен не противоречащий физическим представлениям высотный ход ионосферных параметров, что наблюдается на большом массиве результатов измерений.

ВЫВОДЫ

В работе представлены алгоритмы обработки потоков ионосферной информации, использующие процедуры решения обратной задачи электродинамики, адаптированные к особенностям некогерентного рассеяния радиоволн при импульсном зондировании. С целью устранения неоднозначности решений использованы процедуры, обеспечивающие регуляризацию и сходимость оценок. Получены аналитические выражения для производящей (характеристической) функции сигнала и рассчитаны плотности распределения вероятностей случайных значений ординат корреляционного функционала сигнала НР. С его помощью получены и предложены к использованию семейства плотностей распределения, которые могут служить основанием для определения достоверной вероятности.

Подобные процедуры позволяют заметно увеличить объем и достоверность ионосферной информации. Они заложены в основу функционирования систем радара некогерентного рассеяния Института ионосферы НАН и МОН Украины (Харьков).

Дальнейшее развитие темы заключается в анализе статистических характеристик корреляционного функционала при учете большего разброса исходных данных, что соответствует предельно низким и предельно высоким ионосферным уровням и (или) сеансам малой длительности, которые используются при изучении быстротекающих процессов в ионосфере.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Для проведения вычислений в выражении (9) используем равновесную ($k = 0$) и переходные ($k = 1, 2, \dots, N$) плотности распределения вероятностей для соответствующих сечений используемого процесса:

$$f(z_0) = \frac{1}{\pi\sigma} \exp\left(-\frac{|z_0|^2}{\sigma}\right),$$

$$f(z_k, k\Delta; z_{k+1}, (k+1)\Delta) =$$

$$= \frac{1}{\pi(1-q^2)\sigma} \exp\left[-\frac{|z_{k+1} - qz_k|^2}{(1-q^2)\sigma}\right],$$

где $q = \exp(-\nu\Delta)$ — коэффициент корреляции соседних отсчетов.

Введем обозначение для двух $(N+1)$ — компонентных комплекснозначных векторов $Z = (z_0, z_1, \dots, z_N)$ и $U = (u_0, u_1, \dots, u_N)$. В интеграле (9) выполним $(N+1)$ -кратное фурье-преобразование относительно набора комплекснозначных переменных u_0, u_1, \dots, u_N , что даст в показателе экспоненты линейную комбинацию относительно случайного вектора Z :

$$Q_0(\lambda) = \pi^{-N-1} \int d^{2N+2}U \times$$

$$\times \left\langle \exp\left(-\sum_{n=0}^N |u_n|^2 + i\sqrt{\frac{\lambda}{N}} \sum_{n=0}^N (u_n z_n^* + u_n^* z_n)\right) \right\rangle.$$

Это дает

$$Q_0(\lambda) = \pi^{-N-1} \int d^{2N+2}U \exp\left[-\sum_{n=0}^N |u_n|^2 + \frac{\lambda}{N} \left\langle \left| \sum_{n=0}^N (u_n z_n^* + u_n^* z_n) \right|^2 \right\rangle\right], \quad (\text{П1})$$

где обобщенный дифференциал имеет вид $d^{2N+2}U =$

$= d^2 u_0 d^2 u_1 \dots d^2 u_N$, а интегрирование ведется по набору из $N + 1$ комплексных переменных. Пользуясь гауссовостью вектора Z , получим из (П1)

$$Q_0(\lambda) = \pi^{-N-1} \int d^{2N+2} U \exp \left[- \sum_{n=0}^N |u_n|^2 + \frac{\lambda \sigma}{N} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^N u_n u_m^* \exp(-|n-m| \nu \Delta) \right]. \quad (\text{П2})$$

такая статистическая конструкция окажется полезной ниже. Равенство (П1) имеет вид гауссова интеграла, поскольку в (П2) под экспонентой содержится линейное выражение относительно вектора Z , а весовые коэффициенты — нормальные. Поэтому

$$Q_0(\lambda) = \det(\mathbf{E} + \lambda \mathbf{A})^{-1},$$

где \mathbf{A} — матрица показателя экспоненты в выражении (П2).

Перейдем к нахождению искомого определителя $\det(\mathbf{A})$. Матрица \mathbf{A} размером $(N + 1) \times (N + 1)$ является трехдиагональной, она может быть записана в виде

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \Lambda & -q & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -q & \Lambda + q^2 & -q & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -q & \Lambda + q^2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \Lambda + q^2 & -q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -q & \Lambda + q^2 & -q \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -q & \Lambda \end{pmatrix}, \quad (\text{П3})$$

где $\Lambda = \lambda \sigma / N$.

Для вычисления определителя $\det(\mathbf{A})$ выделим в матрице (П3) блок-матрицу размером $(N - 1) \times (N - 1)$ путем исключения верхней и нижней строк, а также левого и правого столбцов. Получившаяся матрица \mathbf{B}_{N-1} имеет следующие матричные элементы: $(B_{N-1})_{n,n} = \Lambda + q^2$ для диагональных матричных элементов, $(B_{N-1})_{n,n+1} = (B_{N-1})_{n+1,n} = -q$ для наддиагональных и поддиагональных элементов, $(B_{N-1})_{n,m} = 0$ — для остальных матричных элементов.

В силу (П3) имеем для искомого определителя матрицы \mathbf{A}

$$\det(\mathbf{A}) = \Lambda \det(\mathbf{B}_{N-1}) - 2q^2 \Lambda \det(\mathbf{B}_{N-2}) + q^2.$$

Из вида матрицы \mathbf{B}_{N-1} вытекает, что она является матрицей Якоби. Использование стандартной процедуры [4] позволяет найти определитель

$$\det \mathbf{B}_k = R^{-1} (a^{k+1}_+ - a^{k+1}_-), \quad 1 \leq k \leq (N - 1).$$

Нетрудно теперь убедиться в том, что

$$\det(\mathbf{A}) = R^{-1} [(a_+ - q^2)^2 a_+^{N-1} - (a_- - q^2)^2 a_-^{N-1}].$$

С учетом условия нормировки $Q_0(0) = 1$ для производящей функции функционала (9) приходим к выражению (10) для ПФ $Q_0(\lambda)$.

Доказательство теоремы 2. Для вычисления нового безусловного среднего (12) представим корреляционный функционал K_m в виде квадратичной формы:

$$K_m = \frac{1}{4N} \sum_{n=1}^N [|z_n + z_{n+m}|^2 - |z_n - z_{n+m}|^2].$$

Введем обозначение для двух $(N + 1)$ -компонентных комплекснозначных векторов $U = (u_0, u_1, \dots, u_N)$ и $V = (v_0, v_1, \dots, v_N)$. В интеграле — безусловном среднем (12) — выполним два $(N + 1)$ -кратных фурье-преобразования относительно двух наборов комплекснозначных переменных, что даст в показателе экспоненты линейную комбинацию для случайного вектора $Z = (z_0, z_1, \dots, z_N)$

$$Q_m(\lambda) = \pi^{-2N-2} \int d^{2N+2} U \int d^{2N+2} V \times \langle \exp \left(- \sum_{n=0}^N |u_n|^2 - \sum_{n=0}^N |v_n|^2 + W \right) \rangle, \quad (\text{П4})$$

где

$$W = i \sqrt{\frac{\lambda}{4N}} \sum_{n=0}^N [u_n (z_n^* + z_{n+m}^*) + u_n^* (z_n + z_{n+m})] + i \sqrt{\frac{-\lambda}{4N}} \sum_{n=0}^N [v_n (z_n^* - z_{n+m}^*) + v_n^* (z_n - z_{n+m})],$$

а интегрирование ведется по двум наборам из $N + 1$ комплексных переменных. Случайная величина W является линейным функционалом случайного вектора Z , и в связи с этим также нормальна. Как можно убедиться, случайные величины

$$S_+ = \sum_{n=0}^N [u_n (z_n^* + z_{n+m}^*) + u_n^* (z_n + z_{n+m})],$$

$$S_- = \sum_{n=0}^N [v_n (z_n^* - z_{n+m}^*) + v_n^* (z_n - z_{n+m})]$$

являются взаимно некоррелированными. Поэтому из их нормальности вытекает, что они и взаимно независимы. Следовательно, усреднение в (П4) можно осуществлять отдельно, рассматривая две независимые случайные величины

$$W_+ = \sqrt{\frac{\lambda}{4N}} \sum_{n=0}^N [u_n (z_n^* + z_{n+m}^*) + u_n^* (z_n + z_{n+m})],$$

$$W_- = \sqrt{\frac{-\lambda}{4N}} \sum_{n=0}^N [v_n(z_n^* - z_{n+m}^*) + v_n^*(z_n - z_{n+m})],$$

что дает

$$Q_m(\lambda) = \pi^{-N-1} \int d^{2N+2}U \left\langle \exp\left(-\sum_{n=0}^N |u_n|^2 + iW_+\right) \right\rangle \times \\ \times \pi^{-N-1} \int d^{2N+2}V \left\langle \exp\left(-\sum_{n=0}^N |v_n|^2 + iW_-\right) \right\rangle. \quad (\text{П5})$$

Прямыми вычислениями моментов рассматриваемых случайных величин получим

$$\begin{aligned} \langle W_+ \rangle &= 0, \\ \langle |W_+|^2 \rangle &= \frac{1}{2N} [1 + \exp(-m\nu\Delta)] \sum_{n=0}^N |u_n|^2, \\ \langle W_- \rangle &= 0, \\ \langle |W_-|^2 \rangle &= \frac{1}{2N} [1 - \exp(-m\nu\Delta)] \sum_{n=0}^N |v_n|^2. \end{aligned} \quad (\text{П6})$$

Основываясь на свойствах гауссовых интегралов, с помощью выражений (П6) получим для искомой производящей функции (П5). Поэтому интегрирование в (П5) сводится к произведению двух интегралов, которые имеют вид $Q_0(\lambda_+)$ или $Q_0(\lambda_-)$. Отсюда и вытекает утверждение (12) теоремы.

1. Мазманишвили А. С. Коррелированные последовательности в задачах статистического оценивания // Доклады НАН Украины.—2001.—7.—С. 21—25.
2. Мазманишвили А. С., Пуляев В. А. Разработка информационных технологий оценки параметров ионосферной плазмы в методе НР радиоволн // Космічна наука і технологія.—2003.—9, № 4.—С. 51—58.
3. Пуляев В. А. Влияние аппаратных факторов на выбор обработки сигнала НР // Вестн. ХГПУ: Сб. науч. тр.—1999.—Вып. 31.—С. 87—89.

4. Пуляев В. А. Алгоритм анализа функций невязки в процессе расчета ионосферных параметров по АКФ сигнала НР // Вестн. НГУ ХПИ: Сб. науч. тр.—2001.—Вып. 4.—С. 216—218.
5. Пуляев В. А. Статистическое оценивание параметров ионосферы в методе НР радиоволн // Радиотехніка.—2002.—Вип. 129.—С. 98—102.
6. Рогожкин Е. В. Измерение параметров ионосферной плазмы по корреляционной функции сигнала НР // Ионосферные исслед.—1979.—27.—С. 46—54.
7. Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику. — М.: Наука, 1979.—404 с.
8. Ситенко А. Г. Электромагнитные флуктуации в плазме. — Харьков: ХГУ, 1965.—183 с.
9. Таран В. И. Исследование ионосферы в естественном и искусственно возмущенном состояниях методом НР // Геомагнетизм и аэронавигация.—2001.—41, № 5.—С. 659—666.
10. Тихонов В. И., Миронов М. А. Марковские процессы. — М.: Сов. радио, 1977.—488 с.
11. Эванс Дж. Теоретические и практические вопросы исследования ионосферы методом некогерентного рассеяния радиоволн // ТИИЭР.—1969.—57, № 4.—С. 139—171.
12. Farley D. T. Radio wave scattering from the ionosphere // Meth. Exp. Phys.—1971.—98.—P. 139—186.

PECULIARITIES OF DETERMINATION OF HIGH-ALTITUDE RELATIONS FOR IONOSPHERIC PLASMA PARAMETERS IN INCOHERENT RADIO WAVES SCATTER

A. S. Mazmanishvili, V. A. Puliaiev, E. V. Rogozkin

The procedures for the solution of return problem of electrodynamics which are related to study of structure and dynamics of ionospheric plasma are presented. The regularization method of the return problem solution in experiments on incoherent scatter in the ionosphere is offered. The correlation functional determined on the complex-value normal Markov process is considered. Some analytical expressions describing statistical properties of such functional are derived. An example of the use of the retrieved distribution densities for increase of ionospheric measurement reliability in the incoherent scatter method is given.