ISSN 1561-8889. Космічна наука і технологія. 2004. Т 10. № 1. С. 45—53.

УДК 531.13

В. И. Врановский[1], А. Е. Закржевский[2], В. С. Хорошилов[1]

[1]Державне конструкторське бюро «Південне» ім. М. К. Янгеля, Дніпропетровськ

[2]Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ

Динамика деформируемой космической системы тел с программно изменяемой конфигурацией

Надійшла до редакції 25.12.03

Проведено побудову узагальненої математичної моделі і комп'ютерне моделювання динаміки космічного апарата, що несе пружне тіло змінної геометрії, зумовленої розгортанням за заданою програмою компактно сформованої системи у подовжений пружний елемент типу антени чи штанги гравітаційного стабілізатора.

ВВЕДЕНИЕ

Трансформируемые на орбите конструкции являются одними из основных составляющих современных космических систем. Несмотря на большие достижения в области динамики систем тел, такие конструкции не всегда могут быть изучены в рамках классической теории. Упругая штанга гравитационного стабилизатора в составе космического аппарата (КА) переменной конфигурации, которая формируется на орбите из предварительно напряженной ленты, равно как и синтезируемая ферма, не укладываются в рамки классических математических моделей динамики систем тел даже с учетом их упругих свойств, поскольку в процессе развертывания они изменяют свою форму, а также упругие и инерционные характеристики.

Таким образом, в этой области появились проблемы, которые раньше не разрабатывались по разным причинам. В ряде случаев это было связано с отсутствием предпосылок для постановки задач. Так, разработчиков КА часто не интересовало воздействие процесса выдвижения деформируемого гравитационного стабилизатора (ГС) или антенн, смотанных предварительно в рулон, на ориентацию КА, поскольку относительная масса всего узла была небольшой.

С началом широких исследований в области малых и микроспутников, для которых выдвигаемые элементы соизмеримы по массе со всей системой, эта проблема оказалась очень актуальной и недостаточно исследованной. Она имеет разные аспекты в связи с разнообразием новых конструктивных решений для выдвигаемых космических конструкций.

Целью настоящего исследования является построение обобщенной математической модели и компьютерное моделирование динамики КА, несущего упругое тело переменной геометрии, определяемой развертыванием по заданной программе компактно сформированной системы в удлиненный упругий элемент типа антенны или штанги гравитационного стабилизатора КА.

ФИЗИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ

На современном этапе создания КА планируется применение трансформируемых конструкций, основанных на использовании выдвигаемых стержней незамкнутого и замкнутого профиля, которые создаются из упругих пружинных лент, а также развертываемых ферменных конструкций.

В качестве примера может быть рассмотрена конструкция гравитационного стабилизатора КА, основные элементы которой приведены на рис. 1.

Аналогичные развертываемые конструкции предусматриваются и на ряде микроспутников, которые выводятся на орбиту в виде субспутников с массами порядка 100 кг. При развертывании опи-

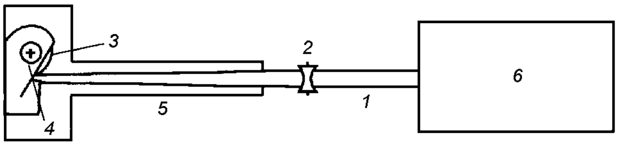

Рис. 1. Конструкция гравитационного стабилизатора КА с механизмом выдвижения: *1* — упругая штанга гравитационного стабилизатора, сформированная из предварительно напряженной ленты, *2* — направляющий ролик, *3* — лента, намотанная на барабан, *4* — механизм разматывания ленты, *5* — корпус устройства развертывания, *6* — груз

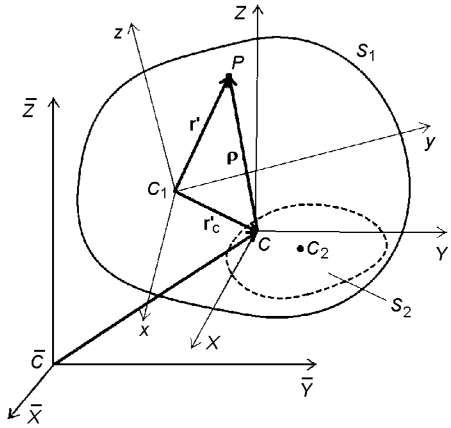

Рис. 2. Обобщенная механическая модель КА с развертываемым гравитационным стабилизатором в виде несущего тела S_1 с неизменяемой геометрией и несомого тела S_2 переменной геометрии

санных трансформируемых конструкций на таких аппаратах в динамику движения вокруг центра масс вносятся существенные возмущения, описать которые в рамках математических моделей, известных в теории систем тел [3], не представляется возможным.

Развертываемые конструкции описанного типа, в особенности создаваемые из стержней незамкнутого профиля, имеют существенную гибкость. В результате предъявления определенных требований к форме выдвижных стержней, связанных, например, с обеспечением стабилизации спутника относительно орбитальной системы координат с заданной точностью, накладываются определенные ограничения на параметры процесса развертывания. Достоверное численное моделирование поможет дать ответы на ряд вопросов, связанных с этой проблемой.

МЕХАНИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ

Применительно к случаям развертывания гравитационного стабилизатора КА на орбите с учетом его упругих свойств механическая модель может быть представлена в виде несущего твердого тела и системы развертывания, показанной на рис. 2. Здесь $\overline{CXYZ}$ — абсолютный базис, C_1xyz — базис, связанный с несущим телом, с началом в его центре масс C_1; ось C_1z направлена вдоль расчетного положения оси гравитационного стабилизатора. Под несущим телом S_1 здесь понимаем всю гиростатическую часть системы, под несомым телом S_2 — развертываемую часть с центром масс в точке C_2 без ее гиростатических составляющих (например, без массы барабана для намотки ленты; вращение барабана учтем при вычислении относительного кинетического момента системы). Движение несущего тела будем определять вектором $\mathbf{v}_{C1}$ скорости полюса, в качестве которого выберем точку C_1, и вектором его абсолютной угловой скорости ω. Положение носимой материальной точки M_i относительно инерциальной координатной системы $\overline{CXYZ}$ будем определять радиусом-вектором $\mathbf{r}_i$, а относительно системы C_1xyz, связанной с несущим телом, — радиусом-вектором $\mathbf{r}'_i$. В отличие от задачи динамики относительного движения носимых тел, описанной в [4], здесь рассматривается общий случай, когда время входит явно в выражение для $\mathbf{r}'_i$, а не только через обобщенные координаты: $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}'_i(q_1, \ldots, q_n, t)$, поскольку система развертывания гравитационного стабилизатора выдвигает упругий стержень по заданному во времени закону. В результате $\mathbf{r}'_i$ изменяется во времени в течение развертывания даже при тождественно равных нулю значениях обобщенных координат, определяющих относительные упругие перемещения штанги гравитационного стабилизатора. В дальнейшем в качестве обобщенных координат, определяющих упругие перемещения гравитационного стабилизатора, будем рассматривать относительные перемещения центра масс груза в направлении осей C_1x и C_1y. Учитывая, что масса даже полностью выдвинутого стержня существенно меньше массы груза, ограничимся удержанием только одной формы для каждого направления. При этом следует подчеркнуть, что в процессе выдвижения стержня собственные числа, а следовательно, и собственные формы, и частоты колебаний будут изменяться. Поскольку угловые скорости в рассматриваемых режимах малы, а выдвижение и свертывание штанги гравитационного стабилизатора предполагается медленным, влиянием продольных сил на формы парциальных колебаний будем пренебрегать. Используя для представления собственных форм упругих колебаний в двух плоскостях защемленного на одном конце стержня функции Крылова [4], можно показать, что характеристическое уравнение в этом случае имеет вид

$$V(kl)T(kl) - S(kl)^2 + $$
$$+ kl\,\frac{m_{gs}}{m_b}\,[T(kl)U(kl) - V(kl)S(kl)] = 0,$$

где $S(kl)$, $T(kl)$, $U(kl)$, $V(kl)$ — функции Крылова, kl — корни характеристического уравнения, m_{gs} и m_b — массы груза и выдвинутой части стержня соответственно. В начальный момент выдвижения гравитационного стабилизатора это уравнение вырождено, на что следует обратить внимание при численном моделировании.

Барабан с разматываемой лентой можно рассматривать как несомый маховик с переменным моментом инерции, а все тело S_2 — как тело с подвижным относительно C_1 центром масс и переменным тензором инерции.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ

Для построения математической модели рассматриваемой системы обратимся к формализму построения уравнений Лагранжа второго рода. В соответствии с рис. 2 радиус-вектор произвольной точки P системы в абсолютном базисе может быть записан как $\mathbf{r} = \mathbf{r}_C + \rho = \mathbf{r}_C - \mathbf{r}_C' + \mathbf{r}'$. Абсолютная скорость произвольной точки P тела S_1 имеет вид $\mathbf{v} = \mathbf{v}_C + \dot{\rho} = \mathbf{v}_C + \omega\times\mathbf{r}' - \omega\mathbf{r}_C'$. Для произвольной точки тела S_2 —

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_C + \dot{\rho} = \mathbf{v}_C + \overset{*}{\mathbf{r}}{}' - \overset{*}{\mathbf{r}}{}_C' + \omega\times\mathbf{r}' - \omega\times\mathbf{r}_C'.$$

Кинетическую энергию всей системы можно записать в виде

$$T_{S_1+S_2} = \frac{1}{2}\int\limits_{S_1+S_2} v^2 dm.$$

После интегрирования

$$T_{S_1+S_2} = \frac{1}{2}M(\mathbf{v}_{C_1}^2 + 2\mathbf{v}_{C_1}\cdot\omega\times\mathbf{r}_C' + \omega\cdot\Theta_{S_1+S_2}^{C_1}\cdot\omega) +$$
$$+ \mathbf{v}_{C_1}\cdot\mathbf{Q}_r + \omega\cdot\mathbf{K}_{S_2}^{C_1} + T_r. \qquad (1)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\mathbf{Q}_r = \int\limits_{S_2}\overset{*}{\mathbf{r}}{}_C' dm = m_2\mathbf{r}_{C_2} \quad \text{и} \quad T_r = \int\limits_{S_2}(\overset{*}{\mathbf{r}})^2 dm$$

— соответственно главный вектор относительных количеств движения и кинетическая энергия относительного движения, $\Theta_{S_1+S_2}^{C_1}$ — тензор инерции всей системы относительно точки C_1, M — масса всей системы, $\mathbf{K}_{S_2}^{C_1}$ — относительный кинетический момент развертываемой части относительно точки C_1, m_2 — масса негиростатической части развертываемой подсистемы, звездочкой обозначено дифференцирование по времени в связанном базисе.

В результате для квазискоростей $v_{C_1 i}$, ω_i получим следующие векторные уравнения Эйлера — Лагранжа:

$$M[\overset{*}{\mathbf{v}}_{C_1} + \omega\times\mathbf{v}_{C_1} + \dot{\omega}\times\mathbf{r}_C' + \omega\times(\omega\times\mathbf{r}_C') +$$
$$+ 2\omega\times\overset{*}{\mathbf{r}}{}_C' + \overset{**}{\mathbf{r}}{}_C'] = \mathbf{V}_s, \qquad (2)$$

$$\Theta_{S_1+S_2}^{C_1}\cdot\dot{\omega} + \overset{*}{\Theta}{}_{S_1+S_2}^{C_1}\cdot\omega + \omega\times(\Theta_{S_1+S_2}^{C_1}\cdot\omega) + \overset{*}{\mathbf{K}}{}_r^{C_1} +$$
$$+ \omega\times\mathbf{K}_r^{C_1} + M\mathbf{r}_{C_1}\times(\overset{*}{\mathbf{v}}_{C_1} + \omega\times\mathbf{v}_{C_1}) = \mathbf{m}^{C_1}. \qquad (3)$$

В общем виде уравнения относительного движения носимых тел в соответствии с [4] можно записать следующим образом:

$$E_s(T_r) = Q_s - M(\overset{*}{\mathbf{v}}_{C_1} + \omega\times\mathbf{v}_{C_1})\frac{\partial\mathbf{r}_{C_1}'}{\partial q_s} +$$
$$+ \frac{1}{2}\omega\cdot\frac{\partial\Theta_{S_1+S_2}^{C_1}}{\partial q_s}\cdot\omega - \dot{\omega}\cdot\frac{\partial\mathbf{K}_r^{C_1}}{\partial \dot{q}_s} - \omega\cdot E_s(\mathbf{K}_r^{C_1}), \qquad (4)$$

$$s = 1, 2.$$

Здесь $E_s(\cdot)$ — оператор Эйлера, Q_s — обобщенные силы, учитывающие упругие и диссипативные свойства конструкции.

Если дополнить систему уравнений (2)—(4) кинематическими уравнениями, получим замкнутую систему уравнений движения, для которой можно поставить задачу Коши с целью проследить во времени поведение системы при изменении ее геометрии. Чтобы конкретизировать задачу исследования, введем две системы координат. Система C_1xyz, как и выше, является координатным базисом, связанным с неизменной частью объекта исследования. Применительно к конкретному рассматриваемому далее КА она показана на рис. 3.

Кроме этого, введем орбитальную систему координат, относительно которой в дальнейшем будем рассматривать поведение КА. Эта система координат вводится традиционным способом [1] и связана с центром масс C всей системы. На рис. 4 она

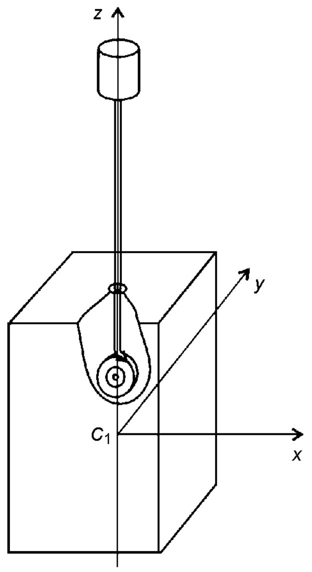

Рис. 3. Основные элементы микроспутника с системой развертывания гравитационного стабилизатора

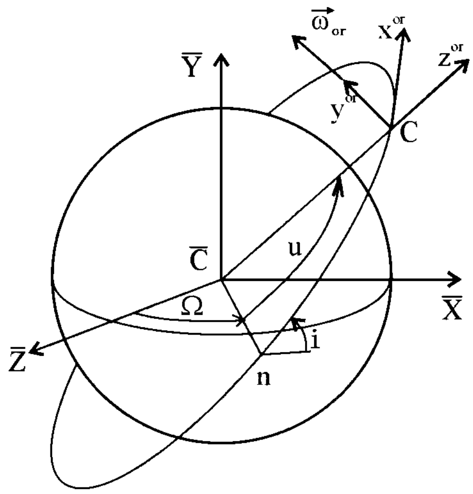

Рис 4. Системы координат, в которых рассматривается движение КА с развертываемым гравитационным стабилизатором

показана так, что ось Cx^{or} направлена по вектору скорости КА, ось Cy^{or} направлена по бинормали к орбите, ось Cz^{or} направлена по местной вертикали. Система координат $\overline{CXYZ}$, как и выше, — абсолютная и связана с Землей так, что ось $\overline{CY}$ направлена вдоль оси вращения Земли, ось $\overline{CZ}$ направлена в точку весеннего равноденствия, ось $\overline{CX}$ дополняет систему до правой. На рис. 4 угол Ω обозначает долготу восходящего узла от точки весны, i — наклонение орбиты, u — аргумент широты, ω^{or} — вектор орбитальной угловой скорости. Пренебрегая прецессией орбиты применительно к рассматриваемому процессу, в дальнейшем будем считать абсолютную угловую скорость орбитального базиса равной ω^{or}.

К выбору кинематических параметров, определяющих ориентацию несущего тела в орбитальных осях, здесь следует отнестись с осторожностью. В рассматриваемом случае мы имеем дело с режимом движения, при котором возможны существенные нарушения ориентации КА, вплоть до изменения ее на обратную. Поэтому остановим свой выбор на параметрах Родрига — Гамильтона. Кинематические уравнения, записанные в этих параметрах, не вырождаются ни при каких их значениях, что особенно важно для численного моделирования. В скалярном виде эти уравнения можно записать следующим образом [2]:

$$\begin{aligned} 2\dot{\lambda}_0 &= -\tilde{\omega}_1\lambda_1 - \tilde{\omega}_2\lambda_2 - \tilde{\omega}_3\lambda_3, \\ 2\dot{\lambda}_1 &= \tilde{\omega}_1\lambda_0 + \tilde{\omega}_3\lambda_2 - \tilde{\omega}_2\lambda_3, \\ 2\dot{\lambda}_2 &= \tilde{\omega}_2\lambda_0 + \tilde{\omega}_1\lambda_3 - \tilde{\omega}_3\lambda_1, \\ 2\dot{\lambda}_3 &= \tilde{\omega}_3\lambda_0 + \tilde{\omega}_2\lambda_1 - \tilde{\omega}_1\lambda_2. \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь λ_0, λ_1, λ_2, λ_3 — компоненты кватерниона, осуществляющего преобразование орбитального базиса в связанный, $\tilde{\omega}_i = \omega_i - \omega_{oi}$ (i = 1, 2, 3), ω_i — проекции вектора абсолютной угловой скорости несущего тела на оси связанного с ним базиса, ω_{oi} — проекции вектора орбитальной угловой скорости также на связанный базис. Поскольку вектор орбитальной угловой скорости коллинеарен оси Cy^{or}, его проекции на оси связанного базиса определяются с помощью матрицы соответствующих направляющих косинусов, записанной в компонентах кватерниона [4]. В результате

$$\begin{aligned} \omega'_{o1} &= 2(\lambda_0\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2)\omega_o, \\ \omega'_{o2} &= (\lambda_0^2 + \lambda_2^2 - \lambda_1^2 - \lambda_3^2)\omega_o, \\ \omega'_{o3} &= 2(-\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3)\omega_o. \end{aligned}$$

Поскольку более привычными для иллюстрации положения в пространстве связанного координатного базиса являются все же углы ориентации типа углов Крылова [4], воспользуемся последовательностью поворотов, показанных на рис. 5, для введения углов ориентации φ, θ, ψ (соответственно угол крена, угол тангажа и угол курса).

Поставим в соответствие каждому из поворотов отдельный собственный кватернион:

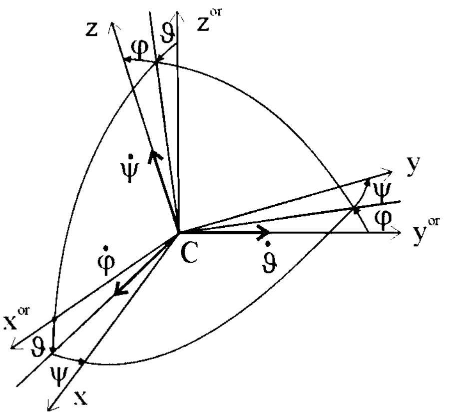

Рис. 5. Углы Крылова. При использовании такой последовательности поворотов вырождение кинематических уравнений происходит при значениях угла крена $\pm(2k+1)\pi/2$ $(k = 0,\ 1,\ \ldots)$

$$\mathbf{M} = \cos\frac{\theta}{2} + \mathbf{i}_2\sin\frac{\theta}{2},$$

$$\mathbf{N} = \cos\frac{\varphi}{2} + \mathbf{i}_1\sin\frac{\varphi}{2},$$

$$\mathbf{P} = \cos\frac{\psi}{2} + \mathbf{i}_3\sin\frac{\psi}{2},$$

где $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ — орты гиперкомплексного пространства H, формально совпадающие с ортами осей поворотов.

Используя правило умножения собственных кватернионов $\Lambda = \mathbf{M}\circ\mathbf{N}\circ\mathbf{P}$, где символ $\circ$ определяет операцию умножения кватернионов [2], получим для составляющих собственного кватерниона результирующего поворота следующие выражения через углы Крылова:

$$\begin{aligned}
\lambda_0 &= \cos\frac{\psi}{2}\cos\theta_2\cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\psi}{2}\sin\theta_2\sin\frac{\varphi}{2},\\
\lambda_1 &= \cos\frac{\psi}{2}\cos\theta_2\sin\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{\psi}{2}\sin\theta_2\cos\frac{\varphi}{2},\\
\lambda_2 &= \cos\frac{\psi}{2}\sin\theta_2\cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\psi}{2}\cos\theta_2\sin\frac{\varphi}{2},\\
\lambda_3 &= \sin\frac{\psi}{2}\cos\theta_2\cos\frac{\varphi}{2} + \cos\frac{\psi}{2}\sin\theta_2\sin\frac{\varphi}{2},
\end{aligned} \tag{6}$$

Эти зависимости удобно использовать, например, при формулировании начальных условий в привычных переменных и при вычислении начальных значений составляющих кватерниона.

Разрешая зависимости (6) относительно углов Крылова, можно получить следующие выражения:

$$\begin{aligned}
\varphi &= \operatorname{arctg}\frac{-2(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_0\lambda_1)}{\sqrt{1 - [2(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_0\lambda_1)]^2}},\\
\theta &= \operatorname{arctg}\frac{2(\lambda_1\lambda_3 + \lambda_0\lambda_2)}{\lambda_0^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_3^2},\\
\psi &= \operatorname{arctg}\frac{2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_0\lambda_3)}{\lambda_0^2 - \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Они удобны для построения графиков в привычных переменных. Вырождение аргументов арктангенсов при значениях углов $\pm(2k+1)\pi/2$ $(k = 0,\ 1,\ \ldots)$ легко обходится в вычислительной программе.

При численном интегрировании системы уравнений (2)—(5) следует помнить, что уравнения (5) содержат только три независимых переменных, поскольку по условию выбора коэффициента пропорциональности проекций вектора поворота [4] $\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$. Поэтому в процессе вычислений следует проводить коррекцию нормы кватерниона. В соответствии с [2] для этого достаточно вместо интегрирования уравнения (5), которое в обозначениях алгебры кватернионов имеет вид $\dot\Lambda = 0.5\Lambda\circ\omega_E$, интегрировать уравнение $\dot\Lambda = 0.5\Lambda\circ\omega_E - k\Lambda(\tilde\Lambda^2 - 1)$, которое превращается в исходное при $\tilde\Lambda^2 = 1$. Здесь Λ — кватернион, $\tilde\Lambda$ — его норма. Максимальная скорость сходимости нормы кватерниона к единице обеспечивается при $k = 0.5$.

Поскольку компьютер оперирует только с главными значениями арктангенсов, в вычислительной программе должен быть заложен алгоритм восстановления полных значений углов ориентации, что реализуется достаточно просто.

ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

В качестве иллюстрации рассмотрим поведение на орбите микроспутника общей массой около 70 кг, содержащего устройство для выдвижения гравитационного стабилизатора, приведенное на рис. 6. Здесь показаны следующие координатные оси: Bz'' совпадает с проектным положением оси гравитационного стабилизатора, Oy_{gs} проходит через центр масс барабана и также связана с несущим телом, оси $Oy'x'$ связаны с барабаном и до развертывания гравитационного стабилизатора параллельны первым двум из указанных осей, α — угол их относительного поворота в результате вращения барабана, s — длина выдвинутой части штанги гравитационного стабилизатора, остальные обозначения очевидны.

Принимая во внимание тот факт, что в результате упругих деформаций штанги гравитационного

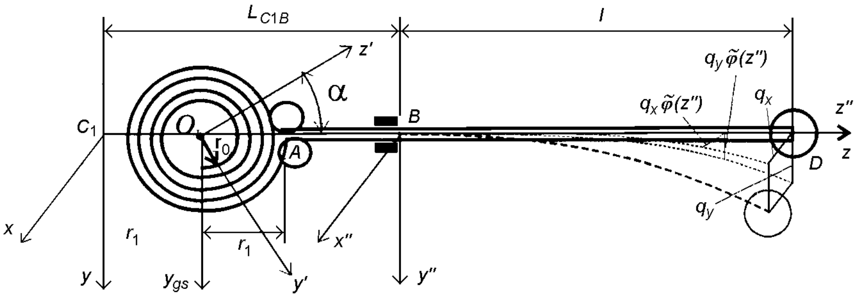

Рис. 6. Механическая модель упругого гравитационного стабилизатора и устройства развертывания

стабилизатора оси связанного базиса перестают совпадать с главными осями инерции КА, для круговой орбиты составляющие гравитационного момента можно записать в следующем виде [1]:

$$\begin{aligned} m^{\mathrm{C}}_{\mathrm{gs,x}} &= 3\omega_{\mathrm{o}}^2[(\Theta^{\mathrm{C}}_{\mathrm{zz}} - \Theta^{\mathrm{C}}_{\mathrm{yy}})\gamma_1\gamma_2 + \\ &+ \Theta^{\mathrm{C}}_{\mathrm{xy}}\gamma\gamma_2 - \Theta^{\mathrm{C}}_{\mathrm{xz}}\gamma\gamma_1 - \Theta^{\mathrm{C}}_{\mathrm{yz}}(\gamma_1^2 - \gamma_2^2)], \\ m^{\mathrm{C}}_{\mathrm{gs,y}} &= 3\omega_{\mathrm{o}}^2[(\Theta^{\mathrm{C}}_{\mathrm{xx}} - \Theta^{\mathrm{C}}_{\mathrm{zz}})\gamma_2\gamma + \\ &+ \Theta^{\mathrm{C}}_{\mathrm{yz}}\gamma_1\gamma - \Theta^{\mathrm{C}}_{\mathrm{yx}}\gamma_1\gamma_2 - \Theta^{\mathrm{C}}_{\mathrm{zx}}(\gamma_2^2 - \gamma^2)], \\ m^{\mathrm{C}}_{\mathrm{gs,z}} &= 3\omega_{\mathrm{o}}^2[(\Theta^{\mathrm{C}}_{\mathrm{yy}} - \Theta^{\mathrm{C}}_{\mathrm{xx}})\gamma\gamma_1 + \\ &+ \Theta^{\mathrm{C}}_{\mathrm{zx}}\gamma_2\gamma_1 - \Theta^{\mathrm{C}}_{\mathrm{zy}}\gamma_2\gamma - \Theta^{\mathrm{C}}_{\mathrm{xy}}(\gamma^2 - \gamma_1^2)], \end{aligned} \tag{8}$$

где $\Theta^{\mathrm{C}}_{\mathrm{xx}}$, ... — компоненты тензора инерции развертываемой системы в координатном базисе, оси которого параллельны осям связанного базиса, но имеют начало в центре масс C. Направляющие косинусы оси Cz^{or} в связанном базисе имеют вид [4]

$$\begin{aligned} \gamma &= 2(-\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3), \\ \gamma_1 &= 2(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3), \\ \gamma_1 &= \lambda_0^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_3^2. \end{aligned}$$

Поскольку компоненты тензора инерции вычислены в связанных осях, в выражениях (8) нужно использовать зависимость $\Theta^{\mathrm{C}} = \Theta^{\mathrm{C}_1} - M(E\mathbf{r}'_{\mathrm{C}}\cdot\mathbf{r}'_{\mathrm{C}} - \mathbf{r}'_{\mathrm{C}}\mathbf{r}'_{\mathrm{C}})$. Момент внешних сил в уравнении (3) вычисляется относительно точки C_1. Выражение для него с учетом (8) можно записать следующим образом: $\mathbf{m}^{\mathrm{C}_1} = \mathbf{m}^{\mathrm{C}} + \mathbf{r}'_{\mathrm{C}}\times\mathbf{V}_{\mathrm{s}}$. Вектор $\mathbf{V}_{\mathrm{s}}$ равнодействующей внешних сил в рассматриваемом случае тождественно равен нулю, поскольку равнодействующая гравитационных сил уравновешена центробежной силой, возникающей при движении КА по орбите.

Приведем выражения для основных величин, определяющих коэффициенты уравнений движения применительно к схеме системы выдвижения гравитационного стабилизатора, показанной на рис. 6, используя следующие обозначения:

$$\begin{aligned} F_1(t) &= \int_0^{s(t)} \tilde{\varphi}(z'')dz, \\ F_2(t) &= \int_0^{s(t)} \tilde{\varphi}(z'')(z'' + L_{\mathrm{C_1B}})dz, \\ F_3(t) &= \int_0^{s(t)} (\tilde{\varphi}(z''))^2dz, \\ F_4(t) &= \int_0^{s(t)} \frac{\partial\tilde{\varphi}(z'')}{\partial z''^2}dz, \end{aligned}$$

Здесь $\tilde{\varphi}(z'')$ — первая собственная форма поперечных парциальных колебаний упругого стержня длины $s(t)$ с точечной массой m_{gs} на конце.

Радиусы-векторы характерных точек системы: центра масс груза — $\mathbf{r}_{\mathrm{D}} = \{q_{\mathrm{x}}, q_{\mathrm{y}}, L_{\mathrm{C_1B}}\}$, центра масс изогнутой штанги — $\mathbf{r}_{\mathrm{C_1}} = \{q_{\mathrm{x}}/F_1(t), q_{\mathrm{y}}/F_1(t), s + L_{\mathrm{C_1B}}\}$, центра масс ленты на барабане — $\mathbf{r}_{\mathrm{O_1}} = \{0, 0, s + L_{\mathrm{C_1O}}\}$. Текущая масса ленты на барабане $m_{\mathrm{dl}} = m_{\mathrm{l}}(L - s)$, наружный радиус намотки ленты на барабане $r_1 = r_0 + \kappa(\Phi - \alpha)$. Здесь $\kappa = \delta/2\pi$, δ — толщина ленты, m_{l} — погонная масса штанги гравитационного стабилизатора, Φ — максимальное значение угла поворота барабана при выдвижении штанги.

Компоненты тензора инерции $\Theta^{\mathrm{C_1}}$ в связанном базисе записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \Theta_{\mathrm{xx}} &= J_{\mathrm{xx}} + m_{\mathrm{dl}}\left(\frac{r_1^2 + r_0^2}{2} + L^2_{\mathrm{C_1O}}\right) + m_{\mathrm{gs}}(r_{\mathrm{D}}(2)^2 + r_{\mathrm{D}}(3)^2) + \\ &+ m_{\mathrm{l}}\left(\frac{z_{\mathrm{D}}^3 - z_{\mathrm{B}}^3}{3} + q_{\mathrm{y}}^2F_3\right), \\ \Theta_{\mathrm{yy}} &= J_{\mathrm{yy}} + m_{\mathrm{dl}}\left(\frac{3r_1^2 + 3r_0^2 + b^2}{12} + L^2_{\mathrm{C_1O}}\right) + \\ &+ m_{\mathrm{gs}}(r_{\mathrm{D}}(1)^2 + r_{\mathrm{D}}(3)^2) + m_{\mathrm{l}}\left(\frac{z_{\mathrm{D}}^3 - z_{\mathrm{B}}^3}{3} + q_{\mathrm{x}}^2F_3\right), \end{aligned}$$

$$\Theta_{zz} = J_{zz} + m_{dl}\frac{3r_1^2 + 3r_0^2 + b^2}{12} +$$
$$+ m_{gs}(r_D(1)^2 + r_D(2)^2) + m_l(q_x^2 + q_y^2)F_3,$$
$$\Theta_{xy} = J_{xy} + (m_{gs} + m_l F_3)q_x q_y,$$
$$\Theta_{xz} = J_{xz} + (m_{gs}(L_{C_1B} + s) + m_l F_2)q_x,$$
$$\Theta_{yz} = J_{yz} + (m_{gs}(L_{C_1B} + s) + m_l F_2)q_x.$$

Здесь J_{xx}, J_{xy}... — компоненты тензора инерции для гиростатической части системы. Остальные выражения, входящие в уравнения движения, получаются из приведенных по известным формулам.

При численном моделировании зададимся следующими базовыми значениями основных параметров системы: масса несущего тела m_1 = 55 кг, масса груза стабилизатора m_{gs} = 10 кг, масса одного метра ленты m_l = 0.17 кг, толщина ленты δ = 0.15 мм, максимальная длина выдвижения гравитационного стабилизатора L = 10 м, начальные отклонения по углам ориентации — нулевые, значения составляющих вектора угловой скорости КА в момент начала выдвижения гравитационного стабилизатора находятся в диапазоне 0.0—0.05 $с^{-1}$. Длительность выдвижения (свертывания) гравитационного стабилизатора $T_f - T_0$ = 30 с, закон выдвижения (свертывания) во времени соответствует плавному выходу на постоянную скорость в течение 5 с и такой же остановке процесса. Изгибная жесткость EJ = 50 кг·м$^{-1}$с$^{-2}$, момент инерции барабана для ленты J_{dr} = 0.01 кг·м^2, диагональные компоненты тензора инерции несущего тела J_{xx} = 8 кг·м^2, J_{yy} = = 8 кг·м^2, J_{zz} = 6 кг·м^2, r_0 = 0.1 м, L_{ob} = 0.3 м, L_{C_1B} = 0.6 м, декремент колебаний штанги θ = = 0.02...0.05. В качестве момента внешних сил, действующих на систему в течение времени моделирования ее поведения, рассмотрим момент от центрального ньютоновского поля сил, моделирующего гравитационное поле Земли на круговой орбите с высотой 600 км.

Численное решение задачи Коши проводится методом Рунге — Кутта четвертого порядка с постоянным шагом интегрирования 0.01 с. Прежде всего проследим изменение первой собственной формы и частоты упругой штанги по мере выдвижения гравитационного стабилизатора. Зависимость двух первых корней характеристического уравнения показана на рис. 7. Зависимость первых двух парциальных частот упругих колебаний от времени приведена в таблице.

Изменение ординат первой парциальной формы во времени в зависимости от длины s выдвинутой части гравитационного стабилизатора показано на рис. 8.

Из оценки соответствующих числовых данных следует, что ординаты первой формы парциальных колебаний от второй секунды выдвижения и до его завершения изменяются максимум на 20 %. Тем не

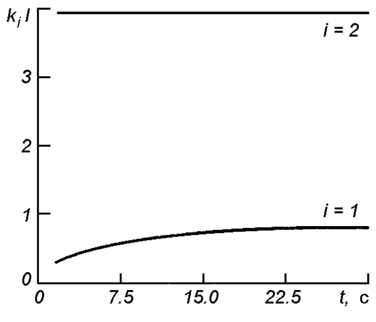

Рис. 7. Зависимость первых двух парциальных частот упругих колебаний от времени при принятом законе выдвижения гравитационного стабилизатора

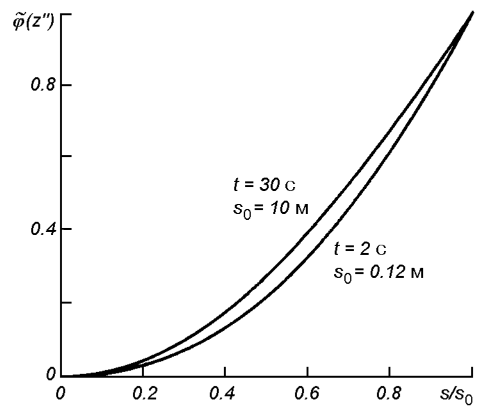

Рис. 8. Изменение ординат первой парциальной формы во времени в зависимости от длины s выдвинутой части гравитационного стабилизатора

Зависимость первых двух парциальных частот упругих колебаний от времени

t, с	2	3	5	8	11	15	20	25	30
W_1, с$^{-1}$	42.05	12.45	2.690	0.824	0.428	0.2404	0.1450	0.0994	0.0849
W_2, с$^{-1}$	7139.9	1411.3	183.29	38.02	15.98	7.430	3.8165	2.3241	1.8887

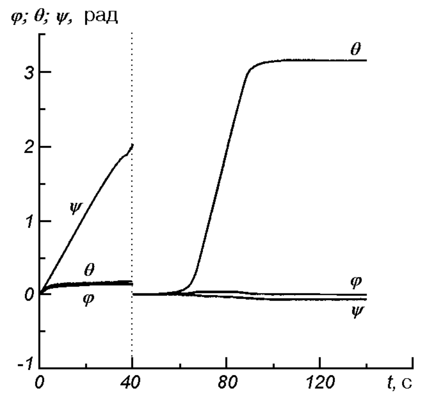

Рис. 9. Поведение углов ориентации при начальном развертывании гравитационного стабилизатора и при свертывании-развертывании с целью изменения ориентации оси Cz' на противоположную

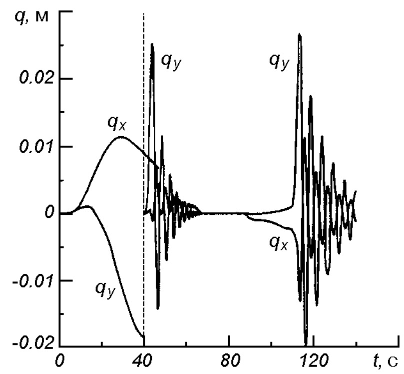

Рис. 11. Поведение проекций относительных упругих отклонений центра масс груза гравитационного стабилизатора на оси связанного базиса при начальном развертывании гравитационного стабилизатора и при свертывании-развертывании

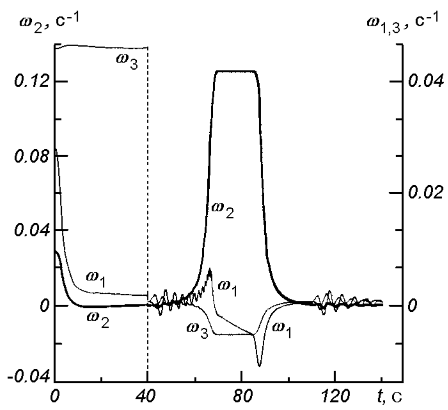

Рис. 10. Поведение проекций угловых скоростей на связанные оси при начальном развертывании гравитационного стабилизатора и при свертывании-развертывании

менее, учет таких изменений необходим, так как значения интегральных коэффициентов будут изменяться во времени заметнее.

Для демонстрации возможностей построенной математической модели и написанного для ее численной реализации пакета вычислительных программ рассмотрим два характерных режима функционирования гравитационно стабилизированного КА. Такими режимами являются:

1. Первоначальное развертывание гравитационного стабилизатора после предварительного успокоения.

2. Свертывание и последующее развертывание гравитационного стабилизатора с целью изменения ориентации оси Cz' на противоположную.

Для начального момента первого режима, который следует после режима предварительного успокоения КА, выведенного на орбиту, характерны значения проекций абсолютной угловой скорости в диапазоне $\pm(0.03...0.05)$ рад/с. Для второго в начальный момент времени характерна ориентация в орбитальном базисе, т. е. вектор абсолютной угловой скорости может быть принят в виде $\omega = \{0, \omega^{or}, 0\}$. Что касается углов ориентации, то в обоих случаях их значения можно принять нулевыми.

На рис. 9—11 для указанных режимов показано поведение во времени углов ориентации, проекций угловых скоростей несущего тела относительно орбитального базиса и относительных упругих перемещений q_x, q_y центра масс груза гравитационного стабилизатора. Первые 40 с занимает первый режим, сам процесс первоначального развертывания длится 30 с, как описано выше. Хотя начальные угловые скорости в первом режиме существенно больше, чем во втором, суммарный кинетический момент значительно меньше, поскольку компоненты тензора инерции до развертывания малы. По мере выдвижения гравитационного стабилизатора в первом режиме компоненты относительной угловой скорости ω_1, ω_2 существенно уменьшаются, в то же время составляющая ω_3 практически не изменяется, поскольку Θ_{zz} при этом остается без заметных изменений. Возникающие изменения значений составляющих вектора угловой скорости достаточно плавны и не вызывают колебаний упругого гравитационного стабилизатора. Относительные упругие перемещения груза на этом режиме носят квазистатический характер, повторяя поведение соответствующих составляющих вектора углового ускорения.

Режим свертывания-развертывания упругого гравитационного стабилизатора моделируется начиная с момента времени t = 40 с. Хотя модуль вектора абсолютной угловой скорости в этот момент невелик, абсолютный кинетический момент КА при этом значительный из-за большого значения составляющей Θ_{yy} тензора инерции. По мере втягивания гравитационного стабилизатора путем наматывания ленты на барабан в результате существенного уменьшения составляющей Θ_{yy} резко увеличивается ω_2. Поскольку ось барабана с лентой в рассматриваемом случае расположена вдоль оси Cx', его вращение вызывает угловые движения вокруг оси Cx', и в силу гироскопической связанности системы — вокруг оси Cz'. В результате резкого изменения значений составляющих ω возникают заметные относительные колебания груза гравитационного стабилизатора. По мере втягивания штанги частота колебаний увеличивается, а амплитуда уменьшается. С завершением процесса втягивания штанги при $t = 70$ с упругие колебания, естественно, прекращаются. КА со свернутым гравитационного стабилизатора вращается в основном вокруг оси Cy'. При правильно выбранном начале выдвижения гравитационного стабилизатора (в нашем случае время начала повторного выдвижения $t = 96$ с) к моменту окончания выдвижения ось КА Cz' изменит ориентацию на противоположную. Поскольку в процессе повторного выдвижения гравитационного стабилизатора также возникает заметное изменение составляющих вектора угловой скорости, снова возбуждаются упругие относительные колебания. В отличие от режима втягивания здесь упругие колебания начинают проявляться перед окончанием выдвижения (в момент времени, соответствующий минимуму ускорения выдвижения), когда значения угловых скоростей и ускорений заметно снижаются.

Полученные результаты демонстрируют метод математического описания динамики системы с программно изменяемой геометрией и поведение реального малого космического аппарата в процессе выдвижения (свертывания) упругого гравитационного стабилизатора.

Работа выполнена частично в рамках проекта УНТЦ 752.

1. Белецкий В. В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. — М.: Наука, 1965.—416 с.
2. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. — М.: Наука, 1973.—320 с.
3. Виттенбург Й. Динамика систем твердых тел. — М.: Мир, 1980.—292 с.
4. Лурье А. И. Аналитическая механика. — М.: Физматгиз.— 1961.—824 с.

DYNAMICS OF A DEFORMED SPACE SYSTEM OF BODIES WITH PROGRAMMED CHANGE OF THE CONFIGURATION

V. I. Dranovskyi, A. E. Zakrzhevskyi, V. S. Khoroshylov

A generalized mathematical model is developed and computer simulation is performed for the dynamics of a spacecraft carrying an elastic body of variable geometry caused by programmed deployment of compact system in lengthened elastic element like antenna or gravitational stabilizator boom.