

УДК 533.9

Ю. А. Клименко, О. К. Черемных

Институт космічних досліджень Національної академії наук України і Національного космічного агентства України, Київ

**Особенности распределения заряда
на мелкодисперсных пылевых частицах
в низкотемпературной космической плазме**

Для опису зарядових властивостей космічної пилової плазми засотосовано метод детального балансу, що коректно враховує факт дискретності падаючого заряду на пилінку. Отримано систему рівнянь, яка дозволяє аналітично знайти вираз для форми стаціонарного зарядового розподілу на частинах пилу з великим і малим зарядом на ній. Визначено умови, при яких встановлений зарядовий розподіл є гауссовим. Показано, що поверхневий потенціал пилінки залежить від її радіуса і не є постійним, як звичайно вважається.

ВВЕДЕНИЕ

Одной из важных проблем в физике космической пылевой плазмы является проблема определения заряда на микрочастицах пыли, возникающей в магнитосфере и ионосфере Земли из-за извержений вулканов, продуктов сгорания метеоров, лесных пожаров, ракетных выхлопов, наземных взрывов и ряда других антропогенных факторов [2, 5, 7]. Пылевая плазма, в отличие от обычной, содержит микрочастицы (гранулы), которые за счет высокой мобильности электронов достаточно быстро накапливают отрицательный заряд, зависящий как от размеров гранул, так и от параметров космической плазмы.

В условиях термодинамического равновесия плазмы обычно предполагается, что потоки электронов ψ_e и ионов ψ_i на изолированную пылевую частицу должны уравновешивать друг друга ($\psi_e = \psi_i$). Эти потоки обычно рассчитываются из хорошо зарекомендовавшего себя метода ограниченных орбит [6, 7], и условие их равенства приводит к трансцендентному уравнению относительно потенциала φ_d на поверхности пылинки. Решение этого уравнения можно записать в виде $\varphi_d = zT_e/e$, где e — заряд электрона, T_e — измеряемая в энергетиче-

ских единицах электронная температура плазмы, а число z близко к 2, не зависит от размеров микрочастиц пыли и слабо (логарифмическим образом) зависит от параметров плазменного окружения (концентрации ионов и электронов, отношениями их масс $\mu = m_i/m_e$ и температур $\tau = T_i/T_e$). В частности, для водородной плазмы с одинаковыми температурами электронов и ионов $z = 2.5$ [6, 7]. Выразив емкость пылевой гранулы C через ее средний радиус a ($C = a$ в единицах СГС), несложно определить заряд пылинки по хорошо известной формуле $Q = \varphi_d/a$.

В пылевой плазме попадание электронов и ионов на пылинку является процессом случайным, что приводит к флуктуациям заряда на ней. Для расчета таких флуктуаций обычно предполагают, что элементарный заряд плазменных частиц (электронов и ионов) пренебрежимо мал по сравнению с текущим зарядом пылинки. Можно показать [3], что в этом случае задача сводится к решению уравнения Фоккера — Планка, определяющего эволюцию заряда пылинки в окрестности своего равновесного значения. Решение этого уравнения приводит к гауссову распределению.

Ограниченность указанного подхода состоит в том, что он в существенной мере использует факт

малости элементарного заряда e в сравнении с зарядом Q пылинки. В эквивалентной форме это условие может быть записано в виде неравенства $\eta \equiv e^2/aT_e \ll 1$ [4]. Простые оценки показывают, что в газовом разряде ($T_e \approx 1...3$ эВ) с характерным размером пылинки $a \sim 0.1...10$ мкм этот параметр принимает значения $\eta \approx 10^{-2}...10^{-4}$. Для интересующей нас космической плазмы параметр η уже перестает быть малым вследствие ее низкотемпературности и меньшей дисперсности ее пылевого компонента. В частности, для мелкодисперсных пылевых частиц с размерами $a \approx 10$ нм, находящихся в плазме верхних слоев атмосферы ($T_e \approx 0.02$ эВ), получаем оценку $\eta \approx 7$.

Из приведенного примера следует, что в условиях космической плазмы, в отличие от плазмы лабораторной, число η может быть больше единицы, т. е. заряд на пылинке соизмерим с зарядом электрона e и уравнение Фоккера — Планка не может быть использовано для описания динамики ее зарядки. Следовательно, для исследования этого вопроса необходимо использовать другие методы расчета зарядки пылевой гранулы.

Изучение этого вопроса и является целью настоящей работы. Ниже, в рамках упомянутой выше модели ограниченных орбит, рассмотрен вопрос о стационарном распределении заряда на пылинках для случая произвольных значений числа η . Предложенный нами метод последовательно учитывает факт дискретного изменения заряда пылинки после попадания на нее электронов и ионов. Как и в предыдущей нашей работе [1], мы оперируем терминами вероятностей нахождения того или иного дискретного заряда на грануле. Мы покажем, что система уравнений, похожая на ту, из которой фактически и следует уравнение Фоккера — Планка, имеет аналитическое решение для распределения заряда при любых значениях η , и становится гауссовым только при $\eta \lesssim 1$. Найденные нами аналитические решения в двух предельных случаях больших и малых η позволяют фактически полностью решить проблему нахождения стационарного распределения заряда на пылевых гранулах в рамках вышеупомянутого метода ограниченных орбит.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В предположении однозарядности плазменных частиц и справедливости максвелловских распределений для их равновесных функций распределения метод ограниченных орбит дает следующие выражения для электронного (e) и ионного (i) потоков,

падающих на пылевую гранулу радиуса a :

$$\psi_e(n) = n_0 a^2 \left(\frac{8\pi T_e}{m_e} \right)^{1/2} \begin{cases} \exp(-\eta n), & n \geq 0, \\ 1 - \eta n, & n < 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$\psi_i(n) = n_0 a^2 \left(\frac{8\pi T_i}{m_i} \right)^{1/2} \begin{cases} 1 + \eta n/\tau, & n \geq 0, \\ \exp(\eta n/\tau), & n < 0. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь n_0 — концентрация плазменных частиц, n — целочисленное зарядовое число, определяющее заряд пылинки $Q = ne$.

Для описания процессов зарядки пылевых гранул введем вероятность P_n того, что в текущий момент времени t зарядовое число пылевой частицы равно числу n . Раньше [1] мы показали, что эти вероятности должны удовлетворять бесконечной ($-\infty < n < \infty$) системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} P_n &= -P_n [\psi_e(n) + \psi_i(n)] + \\ &+ P_{n-1} \psi_e(n-1) + P_{n+1} \psi_i(n+1) \end{aligned} \quad (3)$$

с нормировкой

$$\sum_n P_n = 1. \quad (4)$$

Система уравнений (3), дополненная в начальный момент времени условием $P_n(t=0) = \delta_{n,0}$, описывает эволюцию заряда изначально незаряженной пылинки в плазме. Приравнивание нулю правых частей уравнений (3) позволяет найти стационарное распределение заряда на грануле. Можно показать, что если последнее характеризуется большими зарядовыми числами ($n \gg 1$), то система (3), записанная в терминах заряда гранулы $Q = ne$ и линеаризованная по малому параметру e/Q в окрестности своего положения равновесия, эквивалентна уравнению Фоккера — Планка [3].

СТАЦИОНАРНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ БАЛАНСА

Для определения равновесного распределения заряда на пылинке найдем решения, вытекающие из системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} P_n [\psi_e(n) + \psi_i(n)] &= \\ &= P_{n-1} \psi_e(n-1) + P_{n+1} \psi_i(n+1). \end{aligned} \quad (5)$$

Их легко найти, если увидеть, что решения другой системы уравнений

$$P_n = P_{n-1} \frac{\psi_e(n-1)}{\psi_i(n)} \quad (6)$$

автоматически являются решениями (5). Испол-

зую уравнение (6) и формулы (1), (2), выражаем вероятность P_n через вероятность P_0 нахождения пылинки в незаряженном состоянии

$$\frac{P_n}{P_{n-1}} = C_n^+ \equiv \frac{\sqrt{\tau\mu} \exp[-\eta(n-1)]}{\tau + \eta n}, \quad n > 1, \quad (7)$$

$$\frac{P_{n-1}}{P_n} = C_n^- \equiv \frac{\sqrt{\tau/\mu} \exp(\eta n/\tau)}{1 - \eta(n-1)}, \quad n < -1. \quad (8)$$

Отсюда вытекают аналитические выражения для стационарного распределения заряда на пылинке для $n \geq 0$:

$$P_n = P_0 (\tau\mu)^{n/2} \exp[-\eta n(n-1)/2] \left[\prod_{k=1}^n (\tau + \eta k) \right]^{-1}. \quad (9)$$

Что касается $n < 0$, то для типичных параметров космической плазмы ($\mu > 1800$, $\tau \leq 1$) из выражений (7) и (8) следует, что этими вероятностями P_n можно пренебречь по сравнению с вероятностями P_n для положительных значений n . Таким образом, формула (9) и нормировка (4) дает искомого аналитического распределения для заряда на пылинке. Отметим, что формула (7) также проясняет характер поведения вероятностей P_n : в области, где монотонно убывающая величина C_n^+ больше единицы, вероятность P_n будет возрастать, достигая максимума вблизи $C_n^+ \approx 1$, а затем с увеличением числа n монотонно убывать.

ПРЕДЕЛЬНЫЕ СЛУЧАИ ЗАРЯДОВОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

В случае, когда параметр η становится малым, аналитическая запись (9) для стационарного зарядового распределения является не совсем удобной, поскольку она выражает конечные величины P_n через значение $P_0 \ll 1$. Поэтому удобнее получить аналитическое выражение для зарядового распределения, в котором все величины P_n выражаются в терминах его максимального значения. Для реализации этого подхода запишем известное трансцендентное уравнение [6, 7]

$$\sqrt{\tau\mu} \exp(-z) = \tau + z, \quad z = \eta N_0, \quad (10)$$

которое определяет заряд $Q = N_0 e$ пылинки и ее поверхностный потенциал $\varphi_d = eN_0/a$ из равенства падающих на нее электронного и ионного потоков.

Поскольку решение для N_0 , вытекающее из (10), как правило, не получается целым, положим $N = N_0 - \delta$, где N — целая часть от N_0 , а $0 < \delta < 1$. Используя (6) и формулы (1), (2), (10) выразим все вероятности $P_{N \pm k}$ ($k \geq 1$) через P_N . В результате получаем выражения

$$P_{N+k} = P_{N+k-1} \frac{\exp[-\eta(k-\delta-1)]}{1 + \eta(k-\delta)/(\tau+z)}, \quad (11)$$

$$P_{N-k} = P_{N-k+1} \left[1 - \frac{\eta(k+\delta-1)}{\tau+z} \right] \exp[-\eta(k+\delta)], \quad k \leq N, \quad (12)$$

использование которых позволяет найти аналитические выражения для зарядового распределения. Ввиду громоздкости последних мы их не приводим.

Теперь, используя неравенство $\eta \ll 1$, с необходимой точностью, заменим линейные слагаемые в (11), (12) соответствующими экспонентами. Осуществив довольно очевидную процедуру математической индукции и возвращаясь к текущему индексу $n = N + k$, получаем выражение

$$P_n = C \exp \left[-\frac{\eta'(n - N_0 - \Delta)^2}{2} \right], \quad 0 \leq n < \infty, \quad (13)$$

в котором числа N и δ уже не входят явно. Здесь использованы обозначения

$$\eta' = \eta \frac{\tau + z + 1}{\tau + z}, \quad (14)$$

$$\Delta = \frac{\tau + z - 1}{2(\tau + z + 1)}.$$

От формулы (13) легко перейти к нормированным выражениям для вероятностей P_n , поскольку на основании предполагаемой малости параметра η сумму по n в нормировке (4) можно заменить соответствующим интегралом. После интегрирования получаем

$$P_n = \sqrt{\frac{\eta'}{2\pi}} \exp \left[-\frac{\eta'(n - N_0 - \Delta)^2}{2} \right], \quad 0 \leq n < \infty. \quad (15)$$

Знание вероятностей (15) позволяет найти среднее значение зарядового числа на пылинке

$$\bar{N} = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n = N_0 + \Delta, \quad (16)$$

из которого следует важное соотношение

$$Z \equiv \frac{e\bar{\varphi}_d}{T_e} \equiv \eta \bar{N} = \mu N_0 + \eta \Delta = z + \eta \Delta, \quad (17)$$

(см. (10)), указывающее на линейный характер зависимости потенциала $\bar{\varphi}_d$ пылинки от параметра η .

Формулы (15) и (17) при $\Delta \equiv 0$ переходят в известные формулы

$$P_n = \sqrt{\frac{\eta'}{2\pi}} \exp\left[-\frac{\eta'(n - N_0)^2}{2}\right], \quad (18)$$

$$Z \equiv \frac{e\bar{\varphi}_d}{T_e} = z, \quad (19)$$

полученные из решения уравнения Фоккера — Планка [3]. Как показано в приложении, наблюдаемое качественное различие в поведении функций (17) и (19) обусловлено тем, что трансцендентное

уравнение (10), полученное из приравнивания электронного и ионного потоков, падающих на пылинку, определяет ее заряд лишь в нулевом приближении по параметру η .

Для сравнения полученных нами результатов с полученными ранее на рис. 1 представлены результаты численных расчетов для вероятности распределения заряда на пылевой грануле в зависимости от ее размера, полученные из точных формул (11), (12) и нормировки (4); из приближенной формулы (15) и из ранее известной формулы (18) для пылинок радиуса $a = 10, 1, 0.1$ и 0.01 мкм (рис. 1, $a-z$) для водородной плазмы ($m_i/m_e = 1836$) при $T_e = T_i = 200$ К. Указанным значениям радиуса пылинки соответствуют значения параметров $\eta = 0.0072, 0.072, 0.72$ и 7.2 соответственно. Из рис. 1, a и b видно, что зависимости (15) и (18)

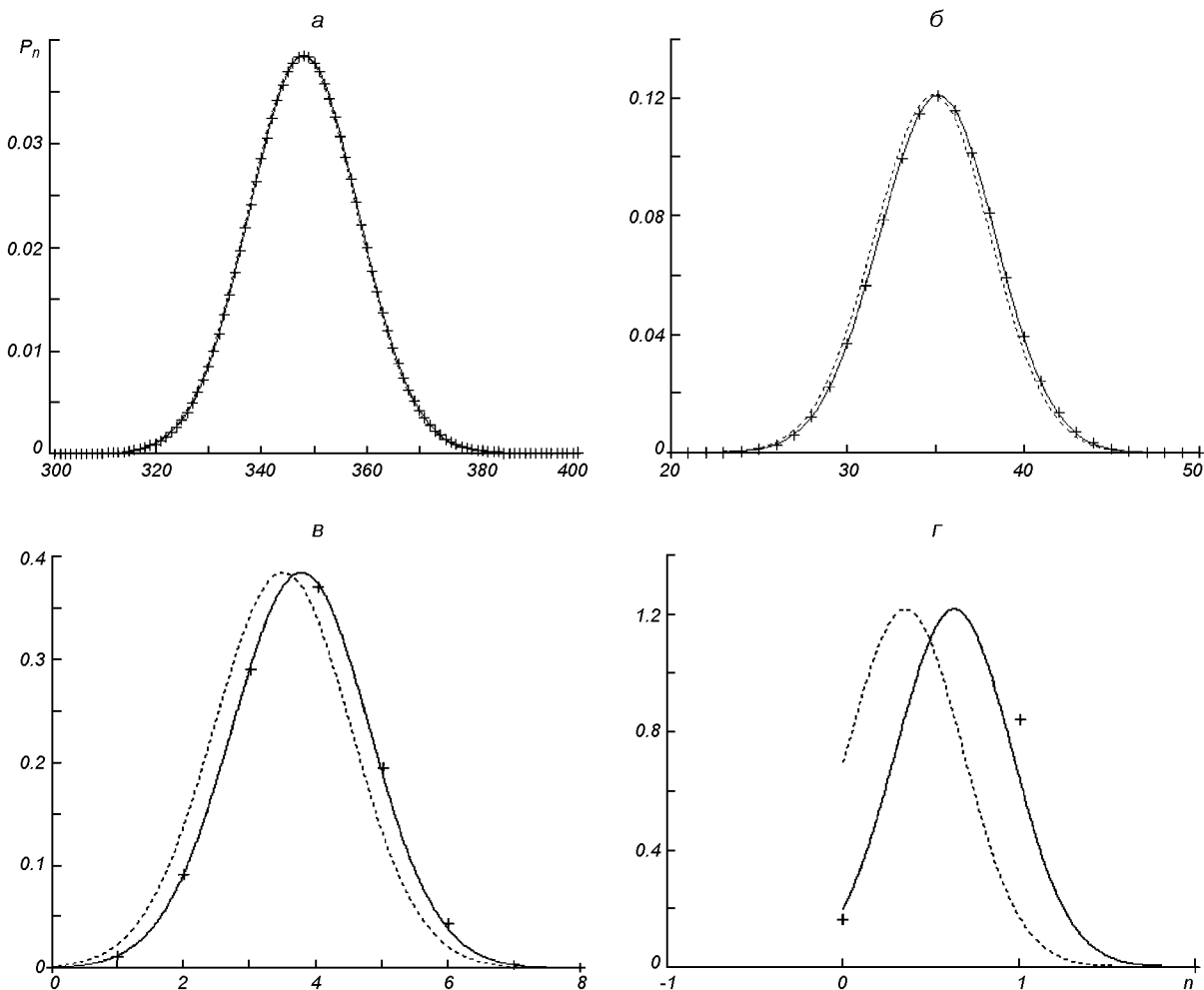


Рис. 1. Нормированное распределение заряда на пылевой грануле с размерами $a = 10$ мкм (a), 1 мкм ($б$), 0.1 мкм ($в$) и 0.01 мкм ($г$). Крестики — точное распределение, сплошная линия — формула (15), штриховая линия — расчет по приближенной формуле (18). Параметры расчета см. в тексте

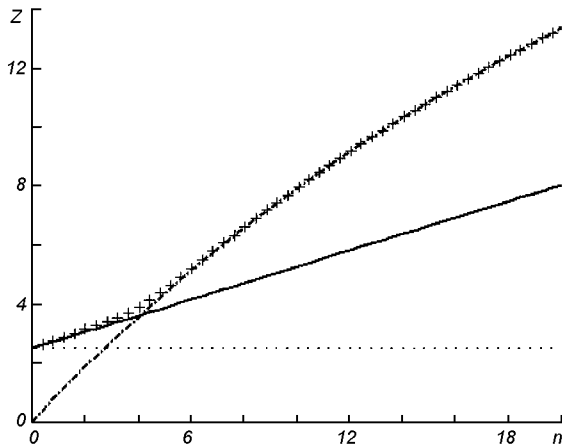


Рис. 2. Зависимость величины $Z = e\bar{\varphi}_d/T_e$ от $\eta = e^2/aT_e$. Крестики — значения точной кривой; сплошная линия — зависимость (17), штриховая линия — прямая (19); штрих-пунктирная линия — аппроксимационная формула (23) для случая, описываемого неравенством (21). Параметры расчета см. в тексте

практически неотличимы от кривой точного распределения. При $\eta \sim 1$ (рис. 1, в) распределение (18) отличается от точного, в то время как различий между полученной нами зависимостью (15) и точной кривой не наблюдается.

Таким образом, приближенная формула (15) практически точно описывает зарядку пылинки вплоть до значений $\eta \sim 1$. В то же время, как видно из рис. 1, г, обе аппроксимационные кривые, построенные по формулам (15) и (18), не описывают случай $\eta \gg 1$.

На рис. 2 приведены результаты численного расчета для величины $Z = e\bar{\varphi}_d/T_e \equiv \eta\bar{N}$ как функции параметра η для водородной плазмы ($\mu = 1836$) и $\tau = 1$. Крестики на этом рисунке отвечают точному расчету, полученному из формул (11), (12) и нормировки (4) по описанной выше методике. Сплошная линия соответствует зависимости (17), а штриховая линия — ранее известной зависимости (19).

Результаты, приведенные на рис. 2, со всей очевидностью указывают на то, что потенциал $\bar{\varphi}_d$ на поверхности пылинки не является величиной постоянной, как это считалось ранее, а является функцией η . Для случая $\eta < 1$ этот потенциал может быть определен из линейной аппроксимации (17), при подстановке в которую явного выражения для параметра η несложно получить

$$\bar{\varphi}_d = \frac{zT_e}{e} + \frac{e\Delta}{a}, \quad \frac{e^2}{aT_e} \ll 1. \quad (20)$$

Теперь перейдем к значениям η , таким, что

$$\eta \geq \ln\sqrt{\tau\mu}, \quad (21)$$

когда согласно (7) все вероятности P_n очень быстро уменьшаются с увеличением числа n . Поэтому мы можем ограничиться только нулевым и первым членами этого распределения, полагая оставшиеся равными нулю. В результате получаем следующие нормированные решения:

$$P_0 = \frac{\tau + \eta}{\tau + \eta + \sqrt{\tau\mu}},$$

$$P_1 = \frac{\sqrt{\tau\mu}}{\tau + \eta + \sqrt{\tau\mu}}, \quad (22)$$

$$P_{n \geq 2} = 0,$$

откуда

$$Z \equiv \frac{e\bar{\varphi}_d}{T_e} \equiv \eta\bar{N} = \eta P_1 = \frac{\eta\sqrt{\tau\mu}}{\tau + \eta + \sqrt{\tau\mu}}. \quad (23)$$

График этой функции приведен на рис. 2 штрих-пунктирной линией и практически точно совпадает с точной кривой $Z(\eta)$ для случая $\eta \geq 1$.

Для водородной плазмы с одинаковыми температурами электронов и ионов условие (21) эквивалентно неравенству $\eta \geq 3.76$, которое может реализовываться для пылинок с радиусом 0.05 мкм и меньше. Еще одной важной характерной особенностью распределений с такими значениями η является дробно-линейная, а не логарифмическая (как для случая $\eta \ll 1$) зависимость функции Z от η , а значит, и потенциала φ_d пылинки от параметра $\sqrt{\tau\eta}$. Из выражения (22) также легко видеть, что максимальное значение функции $Z(\eta)$ достигается при $\eta \rightarrow \infty$ и является конечным: $Z(\eta \rightarrow \infty) = \sqrt{\tau\mu}$. Таким образом, функция $Z(\eta)$ является ограниченной во всей области своего определения, и в предельно бесконечно малых размерах пыли может достигать значений в несколько десятков единиц.

Выводы

В работе показано, что распределение заряда на пылинках космической плазмы описывается распределением Гаусса (15) вплоть до значений $\eta \leq 1$. Обычно считается, что гауссово распределение описывается формулой (18) и справедливо в области $\eta \ll 1$. Таким образом, впервые получено обобщение формулы для зарядового распределения на пылинке на случай $\eta \sim 1$.

Нами также впервые установлено, что потенциал $\bar{\varphi}_d$ на поверхности пылинки зависит от ее радиуса a , причем для случая $\eta \ll 1$ эта зависимость линейна по η , а не постоянна, как обычно считается. Для случаев малых и больших η нами найдены простые аналитические решения (формулы (17) и (23)), которые практически точно позволяют описать поведение потенциала $\bar{\varphi}_d$ от параметра η , либо от радиуса a пылинки.

ПРИЛОЖЕНИЕ.

ПРЕДЕЛЫ ПРИМЕНИМОСТИ ФОРМУЛЫ (10)

Перепишем систему уравнений (3) в терминах заряда $Q = ne$. В результате, обозначив $P_n \equiv W(Q)$, получаем уравнение

$$\frac{d}{dt} W(Q) = -W(Q)[\psi_e(Q) + \psi_i(Q)] + W(Q - e)\psi_e(Q - e) + W(Q + e)\psi_i(Q + e),$$

являющееся исходным для получения уравнения Фоккера — Планка [3].

Рассматривая заряд $Q \gg |e|$ как непрерывную переменную (см. [3]) и предполагая, что равновесный заряд \bar{Q} на пылинке определяется точным балансом электронного и ионного потоков, получаем формулу (10). Ниже, исходя из уравнений (1)—(3) в приближении $n \gg 1$, покажем, что последнее утверждение не является точным, а выполняется только в нулевом приближении по параметру $\eta \ll 1$.

Умножим каждое из уравнений системы (3) на n и просуммируем результат по всем возможным положительным состояниям n пылинки. В полученном выражении осуществим очевидные замены индексов суммирования и введем величину среднего значения $\bar{N} = \sum n P_n$ распределения P_n . В результате получаем уравнение

$$\frac{d}{dt} \bar{N} = \sum \psi_e(n) - \sum P_n \psi_i(n). \quad (П1)$$

Учитывая линейную зависимость ионного потока (2) от индекса $n > 0$, перепишем (П1) в виде

$$\frac{d}{dt} \bar{N} = \sum P_n \psi_e(n) - \psi_i(\bar{N}). \quad (П2)$$

Из последнего уравнения видно, что равновесное

зарядовое число \bar{N} пылинки (или равновесный заряд \bar{Q} на ней, что одно и то же) не определяется точным равенством электронного $\psi_e(\bar{N})$ и ионного $\psi_i(\bar{N})$ потоков, поскольку

$$\sum P_n \psi_e(n) \neq \psi_e(\bar{N}) \quad (П3)$$

из-за нелинейности функции $\psi_e(n > 0)$, см. (1). В частности, левая часть (П3) при подстановке в нее известного распределения Гаусса (18) приводит к соотношению

$$\sum P_n \psi_e(n) = \psi_e(N_0) \exp \left[\frac{\eta(\tau + z)}{2(\tau + z + 1)} \right],$$

которое совпадает с правой частью (П3) только в нулевом приближении по параметру η .

Работа выполнена при поддержке УНТЦ, грант номер NN-37.

1. Клименко Ю. А., Черемных О. К. О распределении заряда на пылевых частицах космической плазмы // *Космічна наука і технологія.*—2003.—9, № 4.—С. 67—72.
2. Kotsarenko N. Ya., Koshevaya S. V., Kotsarenko A. N. Dusty plasma in space // *Geofisica International.*—1998.—37, N 2.—P. 71—86.
3. Matsoukas T., Russel M. Fokker—Planck description of particle charging in ionized gases // *Phys. Rev. E.*—1997.—55, N 1.—P. 991—994.
4. Schram P. P. J. M., Trigger S. A., Zagorodny A. G. New microscopic and macroscopic variables in dusty plasmas // *New J. Phys.*—2003.—N 5.—P. 27.1—27.7.
5. Shukla P. K. New collective processes in dusty plasmas: applications to space and laboratories // *Plasma Phys. Control. Fusion.*—2000.—N 42.—P. 213—221.
6. Shukla P. K., Mamun A. A. *Introduction to dusty plasma physics.* — London: IOP Publ. Ltd, 2002.—265 p.
7. Tsytoich V. N. Dust plasma crystals, drops, and clouds // *Phys.-Uspekhi.*—1997.—40, N 1.—P. 53—94.

CHARGE DISTRIBUTION FEATURES OF FINE-DISPERSED DUST GRAINS IN LOW-TEMPERATURE SPACE PLASMA

Yu. O. Klymenko and O. K. Cheremnykh

To describe charge properties of space dusty plasma, we applied the detailed balance method which takes adequately into account the discreteness of charge inflow on a dust grain. A system of equations is obtained which enables us to find analytically the shape of the charge probabilities with great and small charges on a dusty grain. We found the conditions under which the steady-state charge distribution is Gaussian shaped one. The grain surface potential is demonstrated to depends on the grain radius but to be not constant as generally believed.