

УДК 533.951

А. С. Парновский, О. К. Черемных

Институт космических исследований Национальной академии наук Украины та Национального космического агентства Украины, Київ

Анализ спектра собственных МГД-возмущений «теплой» плазмы во внутренней магнитосфере Земли

Досліджується спектр власних МГД-збурень магнітосферної плазми. Показано, що у системі з «жорсткими» граничними умовами на іоносфері основними типами власних коливань при малому тиску є тороїдальні альвенівські та іонно-звукові моди. Із збільшенням тиску у магнітосферній плазмі також генеруються полоїдальні альвенівські моди, які за певних співвідношень між величиною тиску та його профілем переходять у нестійкий режим. У цьому випадку можна говорити про нестійкі балонні моди. Звертається увага на істотний вплив граничних умов на спектр збурень у магнітосферній плазмі.

ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Ранее, в работе [1] была получена система уравнений малых колебаний магнитосферной плазмы. Было показано, что если вектор смещения элемента объема плазмы ξ разложить по тройке ортогональных векторов

$$\xi = \xi \frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|^2} + \eta \frac{[\mathbf{B} \times \nabla\psi]}{|\mathbf{B}|^2} + \tau \frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|^2},$$

где ψ — полоидальный магнитный поток, определяющий структуру геомагнитного поля

$$\mathbf{B} = [\nabla\psi \times \nabla\varphi],$$

то уравнения малых колебаний магнитосферной плазмы для осесимметричного случая ($\partial/(\partial\varphi) = 0$) имеют вид

$$\Omega^2 \xi + \frac{a}{c^6} \left(\frac{\xi'}{a} \right)' + \frac{4}{ac^2} \left(T_0 + \frac{\alpha\beta}{\gamma} \xi \right) = 0, \quad (1)$$

$$\Omega^2 \eta + \frac{1}{c^6} \eta'' = 0, \quad (2)$$

$$\Omega^2 \tau + \frac{T'_0}{c^3} = 0. \quad (3)$$

Здесь

$$T_0 = \beta \left[\frac{1}{c^3} \left(\frac{c^6}{a} \tau \right)' - \frac{4c}{a^2} \xi \right],$$

$\alpha = -\frac{L}{p} \frac{dp}{dL}$ — безразмерный профиль давления, $\beta = \gamma p / B_0^2$ — безразмерное давление (в отличие от обычного плазменного параметра $8\pi p / B_0^2$), $\gamma = 5/3$ — показатель адиабаты, $x = \sin\theta$ — синус полоидального угла (геомагнитной широты), $x_0 = \sin\theta_0$ — синус полоидального угла точки пересечения силовой линии геомагнитного поля с ионосферой, $L = (1 - x_0^2)^{-1}$ — параметр Мак-Илвайна, $a = 1 + 3x^2$ — геометрический коэффициент, связанный с дипольной геометрией магнитного поля, $c = 1 - x^2$; штрихами обозначены производные по x .

«ЖЕСТКИЕ» ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Для изучения спектра собственных колебаний магнитных оболочек уравнения (1)—(3) следует дополнить граничными условиями. Обычно в качестве граничных условий выбирают так называемые «жесткие» граничные условия (см. [2, 3]). В этом

случае предполагается, что силовые линии магнитного поля опираются на ионосферу с бесконечной проводимостью и «вморожены» в последнюю. Тогда возмущенные величины обращаются в нуль на идеально проводящей невозмущенной поверхности ионосферы на каждой магнитной силовой линии, т. е. имеют место соотношения

$$\xi(\pm x_0) = \eta(\pm x_0) = \tau(\pm x_0) = 0. \quad (4)$$

Ниже мы ограничимся анализом первого и третьего уравнений системы (1)–(3), поскольку второе уравнение описывает хорошо известные тороидальные альвеновские моды [2].

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ

В работе [1] было получено аналитическое решение для спектра собственных колебаний при $\beta = 0$. В этом случае частоты тороидальных и полоидальных альвеновских волн описываются одной и той же формулой

$$\Omega_n = \frac{\pi n}{x_0} \sqrt{2 \int_0^L c^3 dx}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (5)$$

полученной в ВКБ-приближении (см. рис. 1).

Ситуация, когда давления в плазме нет, т. е. $\beta = 0$, является идеализированной. В реальных условиях $\beta \neq 0$ и ситуация существенно усложняется. Численное решение уравнений (1) и (3) с граничными условиями (4) дает спектр колебаний, приведенный на рис. 2. Представленные на этих рисунках кривые являются несколько необычными, поскольку можно было ожидать, что при $\beta \rightarrow 0$

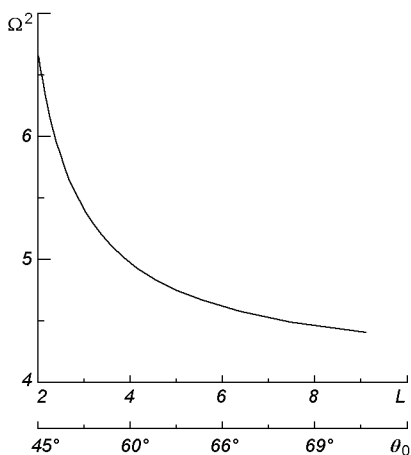


Рис. 1. Собственная частота первой альвеновской моды при нулевом давлении

частоты колебаний будут стремиться к частотам, определяемым формулой (5). Однако из численных расчетов этого не следует. Для объяснения полученного результата ниже мы приведем некоторые соображения и покажем, что вид спектра собственных колебаний обусловлен «правилами отбора», вытекающими из граничных условий (4).

КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ

Проанализируем уравнения (1) и (3) с граничными условиями (4) при $\beta \ll 1$ методами теории возмущений. Полагая в интересующих нас уравнениях $x = x_0$, получаем следующие дифференциальные соотношения между ξ и τ :

$$\begin{aligned} \xi''(x_0) + A\xi'(x_0) + \beta B\tau'(x_0) &= 0, \\ \beta[\tau''(x_0) + C\tau'(x_0) + D\xi'(x_0)] + O(\beta^2) &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Конкретный вид коэффициентов A, B, C, D для дальнейшего анализа нам не важен. Важно лишь, что они не зависят от β , и мы будем считать их порядка единицы.

В соответствии с теорией возмущений представим амплитуды возмущений в виде

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_0 + \beta\xi_1, \\ \tau &= \tau_0 + \beta\tau_1. \end{aligned} \quad (7)$$

Подставляя (7) в (6), получаем в нулевом и первом приближениях по параметру β соотношения

$$\begin{aligned} \xi''_0(x_0) + A\xi'_0(x_0) &= 0, \\ \xi''_1(x_0) + A\xi'_1(x_0) + B\tau'_0(x_0) &= 0, \\ \tau''_0(x_0) + C\tau'_0(x_0) + D\xi'_0(x_0) &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Предположим, что в рассматриваемой системе с малым давлением доминируют полоидальные альвеновские моды, так что $\tau_0 = 0$. Тогда из (8) следует соотношение

$$\xi'_0(x_0) = \xi''_0(x_0) = 0,$$

из которого с учетом граничного условия (4) вытекает, что $\xi_0 = 0$. Следовательно, в системе возможны собственные полоидальные колебания с $\xi_0 = \tau_0 = 0$, существенно деформированные давлением.

Подробное обоснование этого факта приведено в Приложении. Более того, даже рассмотрение граничных условий третьего рода не снимает эти «правила отбора», хотя они и добавляют ряд интересных эффектов, таких как появление «квазиже-лобковых» мод.

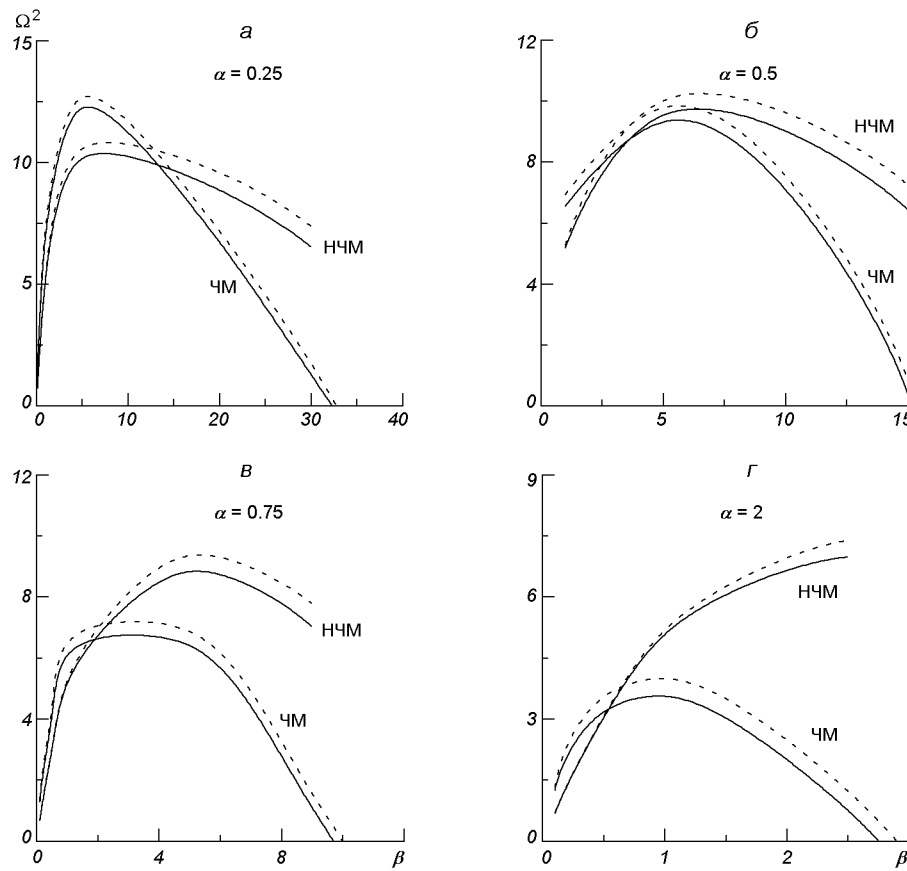


Рис. 2. Спектр первых собственных мод собственных колебаний при различных значениях профиля давления α ; ЧМ, НЧМ — четные и нечетные моды; сплошная линия — для $L = 10$; штриховая — для $L = 4$

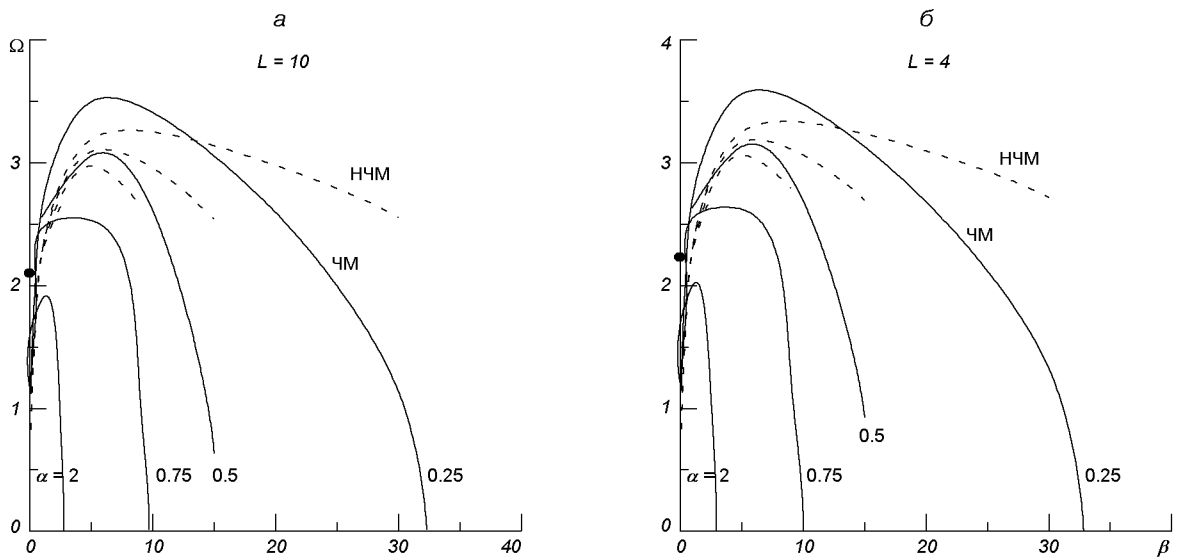


Рис. 3. Полный спектр первых собственных мод собственных колебаний на различных магнитных оболочках: а — $L = 10$, б — $L = 4$

Противоположный случай, когда $\xi_0 = 0$, приводит к соотношениям

$$\tau''_0(x_0) + C\tau'_0(x_0) = 0,$$

$$\xi''_1(x_0) + A\xi'_1(x_0) + B\tau'_0(x_0) = 0$$

с амплитудой $\tau_0 \neq 0$.

Таким образом, уравнения (1) и (3) при малом давлении имеют два качественно разных типа решений:

$$\xi = \beta\xi_1, \quad \tau = \tau_0 + \beta\tau_1 \tag{9}$$

и

$$\xi = \beta\xi_1, \quad \tau = \beta\tau_1. \tag{10}$$

Очевидно, что при $\beta \rightarrow 0$ доминирующим является решение (9), амплитуда τ_0 которого описывает ионно-звуковую моду и удовлетворяет уравнению

$$\Omega^2\tau_0 + \beta \left[\frac{1}{c^3} \left(\frac{c^6}{a} \tau_0 \right)' \right]' = 0. \tag{11}$$

Решение уравнения (11) было ранее найдено в работе [1]:

$$\Omega_n = \frac{\sqrt{\beta}\pi n}{2\int_0^{x_0} \sqrt{a} dx}. \tag{12}$$

При малом β оно хорошо согласуется с кривыми на рис. 2. Отметим (см. (9)), что ионно-звуковые колебания генерируют полоидальные альвеновские моды с малой амплитудой.

С увеличением давления решения (9) и (10) качественно совпадают друг с другом и описывают зацепленные между собой колебания полоидальной альвеновской и ионно-звуковой мод с одинаковыми амплитудами. При $\alpha\beta/\gamma > 1$ полоидальные альвеновские моды становятся неустойчивыми, и в этом случае они называются баллонными. По мере приближения к границе устойчивости их частота уменьшается, и на границе устойчивости выполняется условие $\Omega^2 = 0$, что позволяет найти аналитическое выражение для границы устойчивости.

УСТОЙЧИВОСТЬ

Граница устойчивости баллонных мод соответствует условию $\Omega^2 = 0$. Численные расчеты показывают, что при $\alpha \sim \beta \sim 1$ неустойчивость возникает на первой четной моде. Уравнения (1) и (3) на границе устойчивости имеют вид

$$\left(\frac{\xi'}{a} \right)' + \frac{4c^4}{a^2} \left(T_0 + \frac{\alpha\beta}{\gamma} \xi \right) = 0, \tag{13}$$

$$T'_0 = 0 \tag{14}$$

и могут быть решены аналитически путем сведения к интегральному уравнению. Проинтегрировав их по x дважды, с учетом граничных условий получаем

$$1 = \int_0^{x_0} a \int_0^x \frac{4c^4}{a^2} \left(T_0 + \frac{\alpha\beta}{\gamma} \xi \right) dt dx, \tag{15}$$

$$0 = \int_0^{x_0} \frac{a}{c^6} \left(\frac{T_0}{\beta} \int_0^x c^3 dt + \int_0^x \frac{4c^4}{a^2} \xi dt \right) dx, \tag{16}$$

$$\tau = \frac{a}{c^6} \left(\int_0^x \frac{4c^4}{a^2} \xi dt - \int_0^x c^3 dt \frac{\int_0^{x_0} \frac{a}{c^6} \int_0^x \frac{4c^4}{a^2} \xi dt dx}{\int_0^{x_0} \frac{a}{c^6} \int_0^x c^3 dt dx} \right). \tag{17}$$

Исключив τ , получаем уравнение для границы устойчивости:

$$1 = \frac{\alpha\beta}{\gamma} \int_0^{x_0} \frac{4c^4}{a^2} \xi \int_x^{x_0} a dt dx - \frac{\int_0^{x_0} \frac{4c^4}{a^2} \xi \int_x^{x_0} \frac{a}{c^6} dt dx}{\int_0^{x_0} \frac{c^3(a + \beta c^6)}{\beta a} \int_x^{x_0} \frac{a}{c^6} dt dx} \int_0^{x_0} \frac{4c^4}{a^2} \int_x^{x_0} a dt dx. \tag{18}$$

При использовании пробной функции $\xi = 1 - x^2/x_0^2$, хорошо аппроксимирующей результаты численных расчетов, из уравнения (18) вытекает следующее аналитическое выражение для границы устойчивости:

$$\alpha = \frac{K_1(\theta_0)}{\beta} + K_2(\theta_0). \tag{19}$$

Вид коэффициентов K_1 и K_2 довольно громоздок, и мы ограничимся приведением их значений при некоторых значениях граничного угла (табл. 1).

Сравнение результатов численных расчетов, приведенных ранее в работе [1] и по формуле (19), показало, что кривые границы устойчивости баллонных мод практически неразличимы в обоих случаях.

Таблица 1. Значения коэффициентов K_1 и K_2 в зависимости от граничного угла

θ_0 , град	K_1	K_2
45	1.83	5.2
50	1.54	5.0
60	1.17	4.8
72	0.95	4.7

ВЫВОДЫ

В работе продемонстрировано, что использование «жестких» граничных условий на ионосфере приводит к существенной модификации спектра собственных МГД-колебаний в магнитосфере Земли. Показано, что при малом давлении существуют хорошо известные тороидальные альвеновские моды и ионно-звуковые моды с дисперсией вида $\Omega \sim \sqrt{\beta}$. При достаточно больших давлениях в магнитосферной плазме генерируются полоидальные альвеновские моды, зацепленные с ионным звуком, которые с дальнейшим ростом давления переходят в неустойчивый режим. В работе получено аналитическое выражение для границы устойчивости этих мод.

Необходимо отметить, что полученные в работе результаты очень чувствительны к граничным условиям для возмущений на ионосфере. Поэтому вопрос о граничных условиях для собственных колебаний МГД-мод в магнитосфере становится очень актуальным. В то же время в работах, посвященных подобной проблематике (например [4]), как правило, не учитывается кривизна силовых линий геомагнитного поля, которая играет одну из важнейших ролей в системе магнитосфера — ионосфера. Наши выводы по поводу граничных условий подтверждаются экспериментальными работами по активному акустическому воздействию на ионосферу, указывающими, что изменение граничных условий оказывает сильнейшее воздействие на характеристики волновых процессов в ионосфере (С. А. Сорока, частное сообщение).

ПРИЛОЖЕНИЕ

В пределе $\beta = 0$ система (1), (3) принимает вид

$$\Omega^2 \xi + \frac{a}{c^6} \left(\frac{\xi'}{a} \right)' = 0,$$

$$\Omega^2 \tau = 0.$$

Решением этой системы являются $\xi = \xi_0(x)$ и $\tau = 0$. Конкретный вид функции ξ_0 не принципиален, важно лишь то, что она не имеет особенностей, ненулевая, и не зависит от β и τ .

Теперь рассмотрим поведение системы (1), (3) при малом ненулевом β . Предположим, что полоидальная альвеновская ветвь все же существует, и при малом β величина Ω^2 конечная, отличная от нуля (см. рис. 2). Поскольку функция ξ отличается от функции ξ_0 на величину порядка β , то ξ' имеет тот же порядок по β , что и ξ .

Таким образом, система содержит три функции, соотношение между которыми определяет вид решения. Все возможные варианты этих соотношений сведены в табл. 2. Видно, что реализуются случаи 1 и 3, когда существование полоидальной альвеновской ветви все же возможно, но при частотах порядка β^{-1} , что объясняет убывание частоты при увеличении β . В случае 3, помимо этого требования, также необходимо, чтобы $\tau' \sim \beta^{-1}$ и $\tau \ll 1$.

Итак, наше предположение о реализации альвеновской ветви при малом ненулевом β привело к противоречию, из чего мы можем сделать вывод об ее отсутствии.

Таблица 2. Анализ возможных соотношений между собственными функциями возмущений.

ξ	$\tau' < \tau$	$\tau' \sim \tau$	$\beta\tau' < \tau$			$\beta\tau' \sim \tau$	$\beta\tau' < \tau < \tau'$
			$\beta\xi < \tau$	$\beta\xi \sim \tau$	$\beta\xi > \tau$		
$\xi \ll \min(\tau, \tau')$	2		2			3	1
$\xi \sim \min(\tau, \tau')$			2	3	1		
$\min(\tau, \tau') \ll \xi \ll \max(\tau, \tau')$			2				
$\xi \sim \max(\tau, \tau')$	1		4				
$\xi \gg \max(\tau, \tau')$							

Примечания:

- 1 — из уравнения (3) получается, что $\Omega \sim \beta^{-1}$;
- 2 — запрещено уравнением (3);
- 3 — при этом должно выполняться условие $\tau' \sim \beta^{-1}$, что возможно лишь при $\Omega \sim \beta^{-1}$;
- 4 — запрещено граничными условиями (4), так как при этом $(ca^{-2}\xi)' = 0$, откуда $\xi \equiv 0$.

1. Черемных О. К., Бурдо О. С., Кременецкий И. А., Парновский А. С. К теории МГД-волн во внутренней магнитосфере Земли // Космічна наука і технологія.—2001.—7, № 5/6.—С. 44—63.
2. Cheng C. Z., Chang T. C., Lin C. A., Tsai W. H. Magnetohydrodynamic theory of field line resonances in the magnetosphere // J. Geophys. Res.—1993.—98A, N 7.—P. 11339—11347.
3. Hameiri E., Laurence P., Mond M. The ballooning instability in space plasmas // J. Geophys. Res.—1991.—96.—P. 1513—1518.
4. Yoshikawa A., Itonaga M., Fujita S., et al. Eigenmode analysis of field line oscillations with the ionosphere — atmosphere — solid Earth electromagnetic coupled system // J. Geophys. Res.—1999.—104A, N 12.—P. 28437—28457.

**ANALYSIS OF SPECTRUM OF “WARM” PLASMA’S
MHD EIGENPERTURBATIONS IN THE INNER EARTH’S
MAGNETOSPHERE**

A. S. Parnowski and O. K. Cheremnykh

A spectrum of MHD eigenperturbations of magnetospheric plasma is analysed. Toroidal Alfvén and ionosonic modes are shown to be main eigenmodes for a system with “rigid” boundary conditions on the ionosphere in the case of low pressure. As the pressure increases, poloidal Alfvén modes are generated in the magnetospheric plasma. Certain relations between the value of the pressure and its profile make them unstable. In this case one can refer to them as to unstable ballooning modes. The boundary conditions strongly affect the spectrum of the eigenperturbations in the magnetospheric plasma.