ISSN 1561-8889. Космічна наука і технологія. 2003. Т 9. № 1. С. 35—39.

УДК 621.396

С. В. Ковбасюк, М. Ю. Ракушев

Житомирський військовий інститут радіоелектроніки імені С. П. Корольова

Пошук аналітичної залежності для опису незбуреного руху космічного апарата методом диференціальних перетворень

Надійшла до редакції 15.07.02

Розглянуто варіант розв'язку задачі двох тіл та отримання виразів для координат незбуреного кеплерівського руху у вигляді явних функцій часу методом диференціальних перетворень. Наведено результати математичного моделювання.

У небесній механіці розглядається задача двох тіл, що полягає у вивченні руху двох матеріальних точок під дією їхнього взаємного тяжіння. Рух, що отримується на основі цієї задачі, називається незбуреним кеплерівським рухом. У подальшому розглядатимемо задачу двох тіл на прикладі незбуреного руху КА навколо Землі.

Загальний розв'язок задачі двох тіл дає координати КА у вигляді неявних функцій часу [6], оскільки зв'язок між координатами та часом встановлюється через посередництво допоміжних змінних типу ексцентричної аномалії, що пов'язана з часом трансцендентним рівнянням Кеплера:

$$E - e\sin(E) = \sqrt{\frac{\mu_3}{a^3}}\,(t - t_{\text{п}}), \tag{1}$$

де E — ексцентрична аномалія, e — ексцентриситет, $\mu_3 = 3.986\cdot 10^5$ км^3/с^2 — гравітаційний параметр Землі, a — велика піввісь, $t_{\text{п}}$ — час проходження перигею. Однак в деяких випадках при розгляді незбуреного кеплерівського руху виникає необхідність мати вирази для координат КА у вигляді явних функцій часу. Такі вирази можуть бути отримані тільки у вигляді рядів (головним чином тригонометричних за кратними середньої аномалії та за ступенями ексцентриситету). Способи розкладу в такі ряди описані в курсах небесної механіки [3, 6].

Згідно з другим законом Кеплера радіус-вектор КА за рівні проміжки часу описує рівні площі [6]:

$$r^2(t)\,\frac{d\nu(t)}{dt} = \text{const},$$

або

$$\dot{\nu}(t) = \sqrt{\frac{\mu_3}{a^3(1 - e^2)^3}}\,[1 + e\cos(\nu(t))]^2. \tag{2}$$

Диференціальне рівняння (2), що пов'язує істинну аномалію ν з часом t, є нелінійним, і розв'язати його у вигляді явних функцій часу в кінцевому вигляді неможливо, крім окремих часткових випадків (наприклад, для кругового руху).

Ефективним підходом до вирішення цієї проблеми є застосування математичного апарату диференціальних перетворень [4, 5]. Диференціальні перетворення — це новий операційний метод, оснований на переході з області оригіналів в область зображень за допомогою операції диференціювання, на відміну від відомих інтегральних перетворень Лапласа і Фур'є. Метод дозволяє при значному спрощенні процедури проведення математичного моделювання фізичних процесів (об'єктів), що описуються нелінійними інтегро-диференціальними рівняннями (спрощенні математичних викладок та зменшенні обчислювальної складності), отримувати для них в області зображень точні P-моделі задач, що розв'язуються, і при цьому зберігає потенційну можливість отримання точного розв'язку (відновлення) в області оригіналів.

У статті пропонується варіант аналітичного обчислення координат незбуреного руху КА методом диференціальних перетворень академіка НАН України Г. Є. Пухова.

Диференціальними перетвореннями в загальному випадку називають функціональні перетворення такого вигляду [5]:

$$Z(K) = P\{z(t)\}_{t_0} = \frac{H^k}{K!}\left[\frac{d^k z(t)}{dt^k}\right]_{t_0}, \quad (3)$$

$$z(t) = P^{-1}\{Z(K)\} = f(t, c), \quad (4)$$

де t_0 — момент часу, в який розраховуються перетворення, $Z(K)$ — дискретна функція цілочислового аргументу $K = 0, 1, 2, ...$; H — відрізок аргументу, на якому розглядається функція $z(t)$, $f(t, c)$ — відновлююча або апроксимуюча функція, c — сукупність вільних коефіцієнтів.

Вираз (3) визначає пряме перетворення, яке дозволяє за оригіналом $z(t)$ знайти зображення $Z(K)$. Обернене перетворення, що відновлює оригінал $z(t)$ у вигляді апроксимуючої функції, визначається виразом (4). При подальшому розгляді диференціальні зображення $Z(K)$ називатимемо диференціальним спектром або P-спектром, а значення функції $Z(K)$ при конкретних значеннях аргументу K — дискретами диференціального спектра, або P-дискретами.

Вигляд апроксимуючої функції підбирається, виходячи з апріорного знання її виду або апріорного знання розвитку процесу (поведінки об'єкта) у часі для кожної задачі окремо. Коефіцієнти цієї функції підбирають шляхом прирівнювання диференціального спектру апроксимуючої функції та диференціального спектру, що отримується зі спектральної моделі процесу (об'єкта).

Застосуємо до рівняння (2) P-перетворення та отримаємо з урахуванням властивостей диференціальних перетворень [4] P-модель руху КА в площині орбіти:

$$P\{\dot{\nu}(t)\}_{t_0} = \sqrt{\frac{\mu_3}{a^3(1-e^2)^3}}\; P\{[1 + e\cos(\nu(t))]^2\}_{t_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{K+1}{H}\nu(K+1) = \sqrt{\dfrac{\mu_3}{a^3(1-e^2)^3}} \times \\ \times\left[ъ(K) + 2e\underline{\cos}\nu(K) + e^2\sum\limits_{l=0}^{K}(\underline{\cos}\nu(K-l)\underline{\cos}\nu(l))\right], \\ \underline{\sin}\nu(K+1) = \sum\limits_{l=0}^{K}\left[\dfrac{l+1}{K+1}\nu(l+1)\underline{\cos}\nu(K-l)\right], \\ \underline{\cos}\nu(K+1) = -\sum\limits_{l=0}^{K}\left[\dfrac{l+1}{K+1}\nu(l+1)\,\underline{\sin}\nu(K-l)\right], \end{cases}$$

$$\nu(0) = \nu_0, \quad (5)$$

де $ъ(K) = \begin{cases}1, & K = 0, \\ 0, & K \neq 0\end{cases}$ — тейлорівська одиниця, «теда»; $\underline{\sin}\nu(K)$, $\underline{\cos}\nu(K)$ — P-синус і P-косинус відповідно; $\nu_0 = \nu(t)|_{t=t_0}$ — початкова умова, яка задає точку розрахунку P-спектру. Момент часу, в який розраховується P-спектр, визначимо так:

$$E_0 = \operatorname{arctg}\left[\sqrt{\frac{(1-e)}{(1+e)}}\operatorname{tg}\left(\frac{\nu_0}{2}\right)\right],$$
$$t_0 = \sqrt{\frac{a^3}{K_3}}\;[E_0 - e\sin(E_0)] + t_п. \quad (6)$$

Для спрощення математичних викладок покладемо $t_п = 0$.

P-модель руху КА (5) є системою рекурентних алгебраїчних рівнянь, з якої послідовно можна визначити дискрети диференціального спектру при заданні значення цілочислового аргументу K, починаючи з нульового.

Запишемо перші три P-дискрети, взагалі кажучи, нескінченного диференціального спектру (5):

$$\nu(0) = \nu_0,$$
$$\nu(1) = \sqrt{\frac{\mu_3}{a^3(1-e^2)^3}}\;[1 + e\cos(\nu_0)]^2 H, \quad (7)$$
$$\nu(2) = -\sqrt{\frac{\mu_3}{a^3(1-e^2)^3}}\; e\sin(\nu_0)[1 + e\cos(\nu_0)]\nu(1)H =$$
$$= -\frac{\mu_3}{a^3(1-e^2)^3}e\sin(\nu_0)[1 + e\cos(\nu_0)]^3 H^2, \ldots$$

Під час відновлення оригіналу в найпростішому випадку задача зводиться до додавання дискрет спектра $\nu(K)$ у вигляді відрізку ряду Тейлора за ступенями функції $T = (t - t_0)/H$, при цьому апроксимуюча функція має вигляд багаточлена. Недоліком такого підходу є те, що відновлення можливе тільки на невеликих часових інтервалах, оскільки тейлорівський ряд в загальному випадку має обмежений радіус збіжності. Цей недолік має місце і для опису незбуреного руху КА по еліптичній орбіті, тому при розгляді відновлення функцій ми застосовуватимемо інший підхід.

Проаналізуємо вигляд графіка функції істинної аномалії $\nu(t)$ (рис. 1). З наведеної залежності видно, що $\nu(t)$ — непарна періодична функція з періодом $T_{ка} = \sqrt{\mu_3/a^3}$, яка має характерні точки перетину з прямою $n_{ка}t$ (де $n_{ка}$ — середня кутова швидкість руху КА). Це точки на відрізку одного витка: A' ($\nu = \pi$, $t = -T_{ка}/2$), O ($\nu = 0$, $t = 0$), A ($\nu = \pi$, $t = T_{ка}/2$).

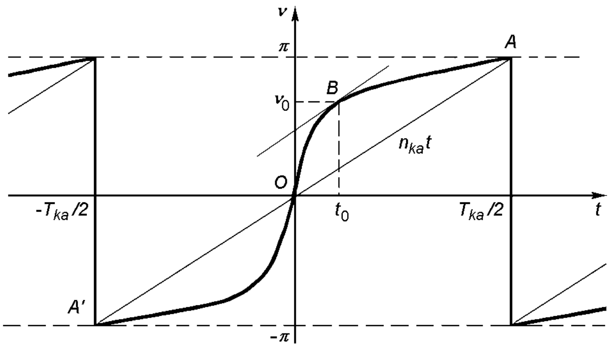

Рис 1. Вигляд функції істинної аномалії

Виходячи з проведеного аналізу, P-спектр (6) відновлюватимемо на проміжку половини витка (від перигею до апогею) $0 \le t \le 0.5T_{ka}$ у вигляді функції

$$f(t) = \frac{a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2 + a_3(t - t_0)^3}{1 + b_1(t - t_0) + b_2(t - t_0)^2} \times$$
$$\times \sin(n_{ka}t) + n_{ka}t, \qquad (8)$$

де a_0, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 — вільні коефіцієнти; $n_{ka} = 2\pi/T_{ka} = \sqrt{\mu_3/a^3}$ — середня кутова швидкість руху КА. Вид функції (8) обрано з таких міркувань: другий член ($n_{ka}t$) визначає «характер зміни» $\nu(t)$, він розраховується апріорно і відповідає за рух умовного КА за круговою орбітою з таким самим періодом обертання. Перший член утворює «додаток» до руху умовного КА. «Додаток» в характерних точках перетину (O, A) нульовий, для чого введено множник $\sin(n_{ka}t)$, а решта — це використовувана у широкому колі інженерних задач [1] дробово-раціональна функція.

Визначимо вільні коефіцієнти шляхом прирівнювання P-спектру апроксимуючої функції (8) та P-спектру, отриманого зі спектральної моделі задачі (7):

$$P\{f(t)\}_{t_0} = \nu(K). \qquad (9)$$

Враховуючи властивості диференціальних перетворень [4, 5], запишемо:

$$P\left\{\frac{a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2 + a_3(t - t_0)^3}{1 + b_1(t - t_0) + b_2(t - t_0)^2} \times \right.$$
$$\left. \times \sin(n_{ka}t) + n_{ka}t \right\}_{t_0} = \nu(K) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P\left\{\frac{a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2 + a_3(t - t_0)^3}{1 + b_1(t - t_0) + b_2(t - t_0)^2}\right\}_{t_0} *$$
$$* P\{\sin(n_{ka}t)\}_{t_0} = \nu(K) - P\{n_{ka}t\}_{t_0} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{3} a_k T_-^k(K) * P\{\sin(n_{ka}t)\}_{t_0} =$$
$$= \left(\text{ъ}(K) + \sum_{k=1}^{2} b_k T_-^k(K)\right) * [\nu(K) - n_{ka}t_0\text{ъ}(K) -$$
$$- n_{ka}\text{ъ}(K - 1)H], \qquad (10)$$

де $T_-^m(K) = H^m\text{ъ}(K - m)$; зірочкою позначено операцію згортки, наприклад:

$$P\{x(t)\cdot y(t)\} = X(K)*Y(K) = \sum_{l=0}^{K} X(l)\cdot Y(K - l).$$

Рівняння (10) для перших шести дискрет диференціального спектру запишемо у вигляді

$$\mathbf{M}\cdot\mathbf{A} = (\mathbf{N}_0 \;\; \mathbf{N}_1)\cdot\begin{pmatrix}1\\ \mathbf{B}\end{pmatrix}, \qquad (11)$$

де $(\mathbf{N}_0 \;\; \mathbf{N}_1)$ — блокова матриця [2];

$$\mathbf{M} = $$
$$= \begin{pmatrix}
\sin\gamma_0 & 0 & 0 & 0 \\
n_{ka}\cos\gamma_0 & \sin\gamma_0 & 0 & 0 \\
-\frac{n_{ka}^2}{2}\sin\gamma_0 & n_{ka}\cos\gamma_0 & \sin\gamma_0 & 0 \\
\frac{n_{ka}^3}{3!}\cos\gamma_0 & -\frac{n_{ka}^2}{2}\sin\gamma_0 & n_{ka}\cos\gamma_0 & \sin\gamma_0 \\
\frac{n_{ka}^4}{4!}\sin\gamma_0 & \frac{n_{ka}^3}{3!}\cos\gamma_0 & -\frac{n_{ka}^2}{2}\sin\gamma_0 & n_{ka}\cos\gamma_0 \\
\frac{n_{ka}^5}{5!}\cos\gamma_0 & \frac{n_{ka}^4}{4!}\sin\gamma_0 & \frac{n_{ka}^3}{3!}\cos\gamma_0 & -\frac{n_{ka}^2}{2}\sin\gamma_0
\end{pmatrix},$$

$$\gamma_0 = n_{ka}t_0,$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}, \quad \mathbf{N}_0 = \begin{pmatrix}\nu(0) - \gamma_0\\ \nu(1) - n_{ka}\\ \nu(2)\\ \nu(3)\\ \nu(4)\\ \nu(5)\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{N}_1 = \begin{pmatrix}
0 & 0 \\
\nu(0) - \gamma_0 & 0 \\
\nu(1) - n_{ka} & \nu(0) - \gamma_0 \\
\nu(2) & \nu(1) - n_{ka} \\
\nu(3) & \nu(2) \\
\nu(4) & \nu(3)
\end{pmatrix}.$$

Рівняння (11) — це система з шести лінійних алгебраїчних рівнянь відносно a_0, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, розв'язати яку з використанням властивостей матриць [2] можна так:

$$(\mathbf{M} \quad -\mathbf{N}_1)\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{A}\\ \mathbf{B}\end{pmatrix} = \mathbf{N}_0. \qquad (12)$$

Наведені залежності (5)—(7), (12) дозволяють отримати аналітичну залежність для функції істинної аномалії $\nu(t)$ на часовому інтервалі половини витка $0 \le t \le 0.5T_{ka}$ (від перигею до апогею). Для отримання залежності $\nu(t)$ на другій половині витка — $0.5T_{ka} \le t \le 0$ (від апогею до перигею) потрібно в (5) початкову умову задати $\nu_0^* = -\nu_0$. Після проведення всіх розрахунків (в силу непарності $\nu(t)$) отримаємо результуючу залежність у вигляді

$$f^*(t) = \frac{a_0 - a_1(t+t_0) + a_2(t+t_0)^2 - a_3(t+t_0)^3}{1 - b_1(t+t_0) + b_2(t+t_0)^2} \times$$
$$\times \sin(n_{ka}t) + n_{ka}t. \qquad (13)$$

Виходячи з аналізу залежностей (8), (13), можна записати вираз для функції істинної аномалії на проміжку цілого витка:

$$\nu(t) = \frac{a_0 + sa_1(t-st_0) + a_2(t-st_0)^2 + sa_3(t-st_0)^3}{1 + sb_1(t-st_0) + b_2(t-st_0)^2} \times$$
$$\times \sin(n_{ka}t) + n_{ka}t,$$
$$s = t/|t|, \qquad (14)$$

при $-0.5T_{ka} \le t \le 0.5T_{ka}$.

Якщо виникає необхідність розгляду функції $\nu(t)$ на інтервалах часу, більших за період обертання КА, потрібно враховувати періодичний характер її зміни.

Значення дискрет диференціального спектру (7) залежить від вибору початкової умови (або точки розрахунку P-спектру) ν_0. При переході з області зображень до області оригіналів точка розрахунку диференціального спектру впливає на точність відновлення функції $\nu(t)$.

На рис. 2 наведені графіки абсолютної похибки відновлення істинної аномалії на інтервалі половини витка для КА з параметрами орбіти: a = = 7346 км, e = 0.0715 — при різних значеннях

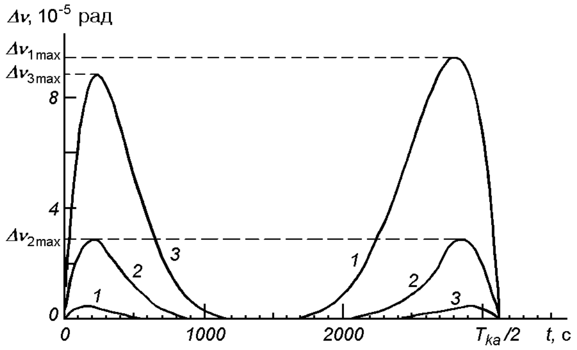

Рис 2. Графіки абсолютної похибки відновлення істинної аномалії

початкової умови ($\nu_{10} < \nu_{20} < \nu_{30}$).

Проводитимемо відновлення оригіналу, виходячи з критерію мінімуму максимальної абсолютної похибки апроксимації істинної аномалії. З наведених графіків видно, що така початкова умова ν_0 існує (другий графік). Це виконується для точки на графіку $\nu(t)$, в якій тангенс нахилу дотичної дорівнює середній кутовій швидкості руху КА (в точці B на рис. 1). При цьому значення ν_0 розраховується з виразу

$$\nu_0 = \arccos\left(\frac{\sqrt{1-e^2}-1}{e}\right).$$

Результати математичного моделювання наведені в таблиці, де $h_{a(п)}$ — висота апогею (перигею) КА, T_{ka} — період обертання КА, $\Delta\nu_{max}$, $\delta\nu_{max}$ — максимальні абсолютна та відносна похибки відновлення істинної аномалії. Для прикладу наведено максимальні (Δr_{max}, δr_{max} — абсолютна та відносна) похибки відновлення радіуса-вектора КА при використанні виразу (14).

З результатів моделювання видно, що отримана залежність (14) для обчислення координат кеплерівського руху КА апроксимує з досить високою точністю функцію істинної аномалії від часу.

Таким чином, запропонований в статті варіант визначення координат незбуреного руху КА за

Результати математичного моделювання

Параметри орбіти КА		Додаткові відомості про КА			Похибки відновлення			
a, км	e	h_a, км	$h_п$, км	T_{ka}, с	$\Delta\nu_{max}$, рад	$\delta\nu_{max}$	Δr_{max}, км	δr_{max}
7346	0.0715	1500	450	6265.8 = 1 год 44.43 хв	$2.8\cdot10^{-5}$	$7.5\cdot10^{-6}$	$4\cdot10^{-3}$	$6.7\cdot10^{-7}$
9096	0.2501	5000	450	8633.2 = 2 год 23.89 хв	$0.9\cdot10^{-3}$	$3.3\cdot10^{-4}$	0.9	$9\cdot10^{-5}$
14096	0.5161	15000	450	17266.4 = 4 год 47.77 хв	$6\cdot10^{-3}$	$2\cdot10^{-3}$	29	$1.4\cdot10^{-3}$

допомогою методу диференціальних перетворень дозволяє отримати вирази для координат КА у вигляді явних функцій часу. Отримані залежності можуть знайти використання у теорії збурень та в розвитку теорії похибок визначення положення КА, а також в ряді практичних задач розрахунку сеансів управління та зв'язку або загального аналізу угруповань КА різного призначення, де критичним є час обчислення.

1. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. — М.: Наука, 1974.—832 с.
2. Ланкастер П. Теория матриц: Пер. с англ. — М.: Наука, 1982.—272 с.
3. Основы теории полета космических аппаратов / Под ред. Г. С. Нариманова, М. К. Тихонравова. — М.: Воениздат, 1977.—240 с.
4. Пухов Г. Е. Дифференциальные преобразования и математическое моделирование физических процессов. — Киев: Наук. думка, 1986.—159 с.
5. Пухов Г. Е. Дифференциальные спектры и модели. — Киев: Наук. думка, 1990.—184 с.
6. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике / Под ред. Г. Н. Дубошина. — М.: Наука, 1976.—864 с.

DERIVING AN ANALYTICAL RELATIONSHIP FOR THE DESCRIPTION OF AN UNDISTURBED MOTION OF A SPACECRAFT BY THE METHOD OF DIFFERENTIAL TRANSFORMATIONS

S. V. Kovbasyuk, M. Yu. Rakushev

We consider a solution of two-body problem and deriving expressions for undisturbed Keplerian motion coordinates in the form of explicit functions by the method of differential transformations. Results of a mathematical simulation are presented.