

УДК 52.464, 536.421.4

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ И ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ В АМПУЛЕ ПРИ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ ПО МЕТОДУ БРИДЖМЕНА

Клименко Ю. А., Ладиков-Роев Ю. П., Сальников Н. Н.,

Ткаченко В. А., Черемных О. К.

Институт космических исследований НАНУ и НКАУ, Киев

Рассмотрены основные процессы, возникающие при направленной кристаллизации по методу Бриджмена в цилиндрической ампуле в условиях микрогравитации. Исследовано влияние неоднородности градиента температур, тепловой конвекции и движения ампулы на форму фронта кристаллизации. Предложен алгоритм изменения температуры холодильника для получения плоского фронта кристаллизации.

1. Введение.

Данная работа ориентирована на изучение комплекса проблем, возникающих в экспериментах по направленной кристаллизации веществ в земных и космических условиях в так называемой ампуле Бриджмена [6]. Такие эксперименты планируются на МКС, и их целью является получение однородных материалов, в том числе и с использованием методов активного воздействия (управления) на процесс кристаллизации вещества [5-9].

На рис. 1 схематически изображена экспериментальная установка, состоящая из нагревателя и холодильника цилиндрической формы. Температура нагревателя поддерживается вблизи значения $T_n = 80$ °С, превышающего температуру плавления вещества $T_{пл}$, а температура холодильника – около $T_x = 10$ °С, которая значительно ниже $T_{пл}$. Нагрев ампулы и ее охлаждение осуществляются как с боковой поверхности, так и с ее торцов. В ходе эксперимента ампула опускается вниз, в зону холодильника, с постоянной скоростью $V \approx 10^{-6}$ м/с.

В качестве опытного вещества для исследования процессов кристаллообразования в ампуле Бриджмена выбран сукцилонитрил $NC(CH_2)_2CN$ – прозрачное органическое соединение, которое имеет ярко выраженный металлический тип кристаллизации [5,7,8] и по сравнению с реальными металлами характеризуется относительно низкой температурой плавления $T_{пл}$ (около 56 °С). Использование данного вещества, с одной стороны, дает возможность проводить прямые оптические наблюдения за процессом его кристаллизации (как известно, исследования по кристаллизации металлов затруднены именно из-за присущей металлам непрозрачности), а с другой стороны, позволяет использовать маломощные энергетические установки для эксперимента.

Одной из важных, и до сих пор нерешенных, задач по направленной кристаллизации металлов является проблема получения веществ с однородным распределением примеси. Основным препятствием для выращивания таких гомогенных металлов является искривление фронта кристаллизации вещества в ампуле [8], которое возникает за счет следующих факторов:

- неоднородности градиента температур вблизи фронта,
- наличия радиального компонента температурного поля,
- влияния тепловой и концентрационной конвекций в жидкой фазе вещества,
- различия в коэффициентах теплопроводности вещества и ампулы,
- движения ампулы относительно холодильника и нагревателя в процессе кристаллизации и др.

В данной работе с целью изучения влияния вышеперечисленных факторов на фронт кристаллизации проводится исследование температурных полей в расплаве и анализ конвективного движения в нем при условии, когда градиент температуры внутри движущейся ампулы имеет как радиальный компонент, так и компоненту вдоль направления силы тяжести. Данное исследование представляет интерес также с точки зрения современной гидродинамики, поскольку, как известно [1, 3], при нагреве жидкости сверху и отсутствии радиального градиента температуры тепловой режим устойчив, и конвективное движение не возникает. Поскольку в эксперименте нагрев ампулы осуществляется с боковой поверхности образца, то реализуется радиальный градиент температуры, генерирующий тепловую конвекцию.

2. Условие возникновения конвекции в расплаве

Конвективное движение в жидкости описывается уравнениями Буссинеска [3], которые могут быть записаны в следующем безразмерном виде

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial \tau} = -\text{grad } p + \text{Re} \Theta \vec{e} + \Delta \vec{v}, \quad (1)$$

$$\text{Pr} \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + \vec{v} \cdot \text{grad} \Theta = \Delta \Theta, \quad (2)$$

$$\text{div} \vec{v} = 0, \quad (3)$$

где \vec{v} , τ , Θ — соответственно, безразмерные скорость течения жидкости, время и температура, Re и Pr — числа Рэлея и Прандтля. Единичный вектор \vec{e} направлен противоположно вектору силы тяжести. Для обезразмеривания выбраны следующие характерные параметры физических величин: R_0 (радиус цилиндра) — для длины, R_0/ν — для времени (ν — кинематическая вязкость), a/R_0 — для скорости (a — коэффициент теплопроводности вещества), $\rho_0 \nu a / R_0^2$ — для давления (ρ_0 — плотность расплава, соответствующая некоторой температуре T^*). В (1), (2) функция $\Theta = (T - T^*) / (T_n - T_x)$ определяет безразмерную температуру системы, а числа Прандтля Pr и Рэлея Re определяются стандартным образом [3]

$$\text{Pr} = \frac{a}{\nu}, \quad \text{Re} = \frac{g \beta A R_0^4}{\nu a}, \quad (4)$$

где g – ускорение свободного падения, $\beta = (\partial \rho / \partial T)|_p$ – коэффициент объемного расширения расплава, а $A = (T_H - T_x) / R_0$.

В этом разделе будем считать, что ампула неподвижна, а фронт кристаллизации является плоским. Свяжем с ампулой цилиндрическую систему координат (r, φ, z) , причем ось z направим вертикально вверх вдоль оси ампулы, а начало координат поместим в плоскости фронта кристаллизации. Для описания интересующих нас осесимметричных вихревых течений применим к уравнению (1) операцию rot в цилиндрических координатах. В результате для φ -составляющей вектора $\text{rot } \vec{v}$

$$\omega \equiv \text{rot}_\varphi \vec{v} = \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \quad (5)$$

получим уравнение

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = A(\vec{v}) + \text{Re} \frac{\partial T}{\partial r}, \quad (6)$$

где $A(\vec{v}) = \text{rot}(\Delta \vec{v}) \cdot \vec{e}_\varphi$ – линейный дифференциальный оператор относительно компонентов вектора скорости \vec{v} . Из (6) непосредственно следует обязательное наличие конвективных течений в расплаве при ненулевой радиальной составляющей градиента температуры.

Найдем решения для конвективных потоков, используя метод Галеркина [1].

Пусть $\theta^0(r, z)$ – решение стационарного уравнения теплопроводности

$$\Delta \theta^0 \equiv \frac{\partial^2 \theta^0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta^0}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta^0}{\partial z^2} = 0 \quad (7)$$

при соответствующих граничных условиях. Поскольку скорость конвективного движения расплава мала, то также малыми будут и возмущения $\theta(t, r, z)$ стационарной температуры $\theta^0(r, z)$, обусловленные конвекцией. Подставляя в (1), (2) разложение

$\Theta(t, r, z) = \theta^0(r, z) + \theta(t, r, z)$ и ограничиваясь линейным приближением по

$\theta(t, r, z)$, получим следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} &= -\nabla p + \Delta \vec{v} + \text{Re} \theta^0 \vec{\gamma}, \\ \text{Pr} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \theta^0 &= \Delta \theta, \\ \text{div } \vec{v} &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

решения которой будем искать в виде

$$\Theta(t, r, z) = e^{-\lambda t} \sum_{i=1}^m A_i \theta_i(r, z), \quad \vec{v}(t, r, z) = e^{-\lambda t} \sum_{i=1}^m B_i \vec{v}_i(r, z). \quad (9)$$

Вектор-функции $\vec{v}_i(r, z)$, $i = \overline{1, m}$, из (9) должны удовлетворять условию $\vec{v}_i = 0$ на поверхности ампулы, а возмущения температуры $\theta_i(r, z)$ должны обращаться в нуль на этой же поверхности. Эти функции должны также быть ограниченными по величине внутри ампулы.

Подстановка (9) в (8) приводит к соотношениям

$$\begin{cases} -\lambda \sum_{i=1}^m B_i v_i = -\nabla p + \sum_{i=1}^m B_i \Delta v_i + \operatorname{Re} \gamma \sum_{i=1}^m A_i u_i; \\ -\lambda \operatorname{Pr} \sum_{s=1}^m A_s u_s + \sum_{s=1}^m B_s v_s \cdot \nabla u^0 = \sum_{s=1}^m A_s \Delta u_s. \end{cases} \quad (10)$$

Умножив первое уравнение скалярно на вектор \vec{v}_j , $j = \overline{1, m}$, а второе – на функцию θ_r , $r = \overline{1, m}$ и проинтегрировав полученные $2m$ уравнений по объему с учетом граничных условий, получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m (-\lambda C_{ij} + M_{ij}) B_i + \operatorname{Re} \sum_{i=1}^m L_{ij} A_i = 0, \quad j = \overline{1, m}; \\ \sum_{s=1}^m N_{sr} B_s + \sum_{s=1}^m (-\lambda \operatorname{Pr} D_{sr} + F_{sr}) = 0, \quad r = \overline{1, m} \end{cases} \quad (11)$$

Здесь введены следующие обозначения: $C_{ij} = \iiint_V \vec{v}_i \cdot \vec{v}_j dV$, $L_{ij} = -\iiint_V \theta_i v_{jz} dV$,

$$M_{ij} = -\iiint_V \vec{v}_j \Delta \vec{v}_i dV, \quad D_{sr} = \iiint_V \theta_s \theta_r dV, \quad N_{sr} = \iiint_V \theta_r \vec{v}_s \cdot \nabla \theta^0 dV, \quad F_{sr} = -\iiint_V \theta_r \Delta \theta_s dV.$$

Систему уравнений (11) можно переписать в матричной форме

$$\begin{cases} (-\lambda C + M)B + \operatorname{Re} LA = 0, \\ NB + (-\lambda \operatorname{Pr} D + F)A = 0, \end{cases} \quad (12)$$

где $A = (A_1, \dots, A_m)$ и $B = (B_1, \dots, B_m)$ – вектор-столбцы неизвестных. Условием существования ненулевых решений системы (12) является обращение в нуль ее детерминанта

$$\begin{vmatrix} -\lambda C + M & \operatorname{Re} L \\ N & -\lambda \operatorname{Pr} D + F \end{vmatrix} = 0, \quad (13)$$

поэтому при известных числах Рэлея и Прандтля (4) уравнение (13) определяет спектр собственных значений λ_k , $k = \overline{1, 2m}$. Наличие среди них комплексных чисел с отрицательной вещественной частью свидетельствует о наличии соответствующего конвективного движения и легко проверяется численно.

Представляет интерес и задача определения тех значений чисел Рэлея, при которых возможны стационарные решения, т.е. решения вида (8) с чисто мнимыми значениями λ . Для поиска стационарных решений пробные функции возмущений температуры $\theta(r, z)$ выбираем в виде

$$\theta_{sn} = J_0(k_s r) \sin\left(\frac{n\pi}{l} z\right). \quad (14)$$

(J_0 – функция Бесселя индекса 0, k_s – некоторая константа). Компоненты вектора скорости $\vec{v}_{sn} = (v_{r,sn}, v_{z,sn})$ задаем с помощью функции тока

$$\Psi_{sn} = r^2 J_0^2(k_s r) \sin^2 \frac{n\pi}{l} z \quad (15)$$

как

$$v_{r,sn} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_{sn}}{\partial z}, \quad v_{z,sn} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_{sn}}{\partial r} \quad (16)$$

Для численных расчетов в качестве решения уравнения (7) взята функция

$$T(r, z) = \frac{T_n - T_{nl}}{I_0\left(\frac{\pi}{2l}\right)} I_0\left(\frac{\pi}{2l} r\right) \cdot \cos \frac{\pi}{2l} z + T_{nl}, \quad (17)$$

описывающая распределение температуры при нагреве ампулы со стороны боковых стенок (I_0 – функция Бесселя индекса 0). Изотермы, соответствующие такому решению, приведены на рис. 2.

На рис. 3 и 4 приведены изотермы возмущений теплового поля и линии тока стационарного конвективного течения для случая, когда в разложении (9) взяты 9 пробных функций, то есть когда индексы s и n в формулах (15)–(16) изменяются независимо от 1 до 3. Число Рэлея Re при моделировании принималось равным 1025.

3. Эволюции температурного поля в ампуле при ее вертикальном перемещении

При условии отсутствия тепловой конвекции рассмотрим изменение температурного поля в ампуле, вызванное ее перемещением относительно нагревателя и холодильника. Введем цилиндрическую систему координат (r, Φ, z) , ось z которой направим вертикально вверх вдоль оси ампулы, а начало координат для удобства поместим посередине между холодильником и нагревателем. Величину зазора между термостатами (нагревателем и холодильником) обозначим как 2δ . Свяжем с ампулой подвижную цилиндрическую систему координат (r, Φ, ζ) , в которой координата ζ связана с координатой z неподвижной системы соотношением

$$\zeta = z + Vt, \quad t = \tau.$$

Поскольку изменение температуры ампулы происходит только благодаря ее перемещению, то в подвижной системе координат локальная производная по времени

$\frac{\partial T}{\partial \tau}$ равна нулю, и в подвижной системе координат уравнение теплопроводности принимает вид

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial \zeta^2} - \frac{V}{a} \frac{\partial T}{\partial \zeta} = 0. \quad (18)$$

Переходя в (18) к безразмерным переменным, то есть, используя в качестве характерного размера длины радиус ампулы R_0 , получим

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial \zeta^2} - \mu \frac{\partial T}{\partial \zeta} = 0, \quad (19)$$

где $\mu = VR_0 / a$. Частное решение этого уравнения можно записать в виде

$$T = J_0(\chi r) \exp\left(\frac{\mu}{2} \pm \sqrt{\frac{\mu^2}{4} + \chi^2}\right) \zeta, \quad (20)$$

где χ – константа разделения переменных. Как будет показано ниже, этой константе соответствуют корни уравнения $J_0(\chi_s) = 0$, которые, как известно, всегда больше единицы, $\chi_s > 1$. Поскольку $R_0 = 10^{-2}$ м, $V \approx 10^{-6}$ м/с, $a = 1.16 \cdot 10^{-7}$ м²/с, то величина $\mu = VR_0 / a$ приближенно равна 10^{-1} , и следовательно, $\mu^2 / 4 \cong 25 \cdot 10^{-4} \ll 1$. Поэтому справедливо приближенное равенство

$$\sqrt{\frac{\mu^2}{4} + \chi^2} \approx \chi,$$

и с учетом (20) мы можем записать следующее общее решение для распределения температуры в неподвижной системе координат:

$$T = e^{\frac{V}{2a}(z+Vt)} J_0(\chi r) [C_1 \operatorname{ch}[\chi(z+Vt)] + C_2 \operatorname{sh}[\chi(z+Vt)]]. \quad (21)$$

Здесь C_1 и C_2 – некоторые параметры, которые могут быть найдены с помощью граничных условий на боковых стенках ампулы.

Для определения температуры стенок ампулы воспользуемся следующим упрощающим обстоятельством. Коэффициент теплопроводности ампулы (стекла) намного больше коэффициентов теплопроводности кристаллизующего вещества и воздушной прослойки между ампулой и термостатами. Поскольку толщина стекла очень мала, то скорость установления температуры на стенках ампулы намного превосходит скорость движения ампулы, и можно считать, что в неподвижной системе координат температура стенок постоянна и не зависит от скорости движения ампулы.

Чтобы обеспечить непрерывность потока тепла в системе, учтем, что вблизи границ нагревателя и холодильника есть некоторые переходные области порядка толщины

воздушной прослойки. Поэтому разобьем всю боковую поверхность ампулы на 5 следующих областей:

1. — боковая поверхность ампулы внутри холодильника;
2. — переходная область между холодильником и зазором холодильник-нагреватель;
3. — боковая поверхность ампулы в зазоре холодильник-нагреватель;
4. — переходная область между зазором холодильник-нагреватель и нагревателем;
5. — боковая поверхность ампулы внутри нагревателя.

В областях 1 и 5 температуры равны температурам холодильника и нагревателя: $T_1 = T_x$ и $T_5 = T_n$. В области 3 реализуется линейная зависимость температуры от координаты z . В переходных областях 2 и 4, вообще говоря, необходимо было бы учитывать нелинейную зависимость температуры от координаты z , однако благодаря малости самих областей всеми нелинейными слагаемыми можно пренебречь.

Обеспечивая непрерывность температуры и потоков тепла на всех границах областей 1-5 (то есть, на всей боковой поверхности ампулы), несложно получить явное выражение для температуры на ее стенках. Используя далее это выражение в качестве граничного условия, можно получить и распределение температуры внутри ампулы. После простых, но достаточно громоздких вычислений можно получить следующее решение для температурного поля в зазоре между нагревателем и холодильником, $-\delta < z < \delta$:

$$T = \frac{T_n - T_x}{2\delta} z + \frac{T_n + T_x}{2} + \frac{J_0(k_s r)}{\text{sh}[k_s(L_1 + L_2 + 2\delta)]} \Phi(z, t, T_x, T_n, \delta, V), \quad (22)$$

где

$$\Phi(z, t, T_x, T_n, \delta, V) = \left\{ T_n e^{\frac{V}{2a}[z - (L_2 + \delta - Vt)]} \text{sh} \chi_s [z + (L_1 + \delta + Vt)] - T_x e^{\frac{V}{2a}[z + (L_1 + \delta + Vt)]} \text{sh} \chi_s [z - (L_2 + \delta - Vt)] \right\}. \quad (23)$$

Здесь L_1 и L_2 — соответственно длины ампулы в холодильнике и нагревателе в начальный момент времени $t = 0$. Различные значения корней χ_s ($s = 1, 2, \dots$) уравнения

$$J_0(\chi_s) = 0 \quad (24)$$

соответствуют различным граничным условиям на торцах ампулы. В частности, при $\chi_1 = 2.81$ распределение температуры по радиусу будет монотонным. Соответствующие этому корню распределение температуры в плоскостях $z = \delta$ и $z = -\delta$ для моментов времени $t_0 = 0$, $t_1 = 1$ ч, $t_2 = 2$ ч и $t_3 = 3$ ч изображено на рис. 5 и 6.

4. Управление фронтом кристаллизации вещества в движущейся ампуле

Задача управления фронтом кристаллизации заключается в выборе временного закона изменения параметров управления, обеспечивающего минимальное отклонение поверхности фронта кристаллизации от плоскости. В качестве параметров управления можно, в частности, рассматривать температуры нагревателя и холодильника, скорость движения ампулы, а также расстояние между нагревателем и холодильником.

Для определения геометрии границы фронта в ампуле необходимо решить стационарное уравнение теплопроводности отдельно для жидкого и для твёрдого состояния вещества, ишить полученные решения на границе фронта кристаллизации. Эта достаточно трудоёмкая задача существенно упрощается тем, что для исследуемого вещества коэффициенты теплопроводности и температуропроводности в жидкой и твёрдой фазах различаются менее чем на один процент [5]. Поэтому для определения положения границы «твёрдая фаза – жидкая фаза», вещество в ампуле можно считать однофазным, и тогда искомая граница фронта будет совпадать с изотермой, которая отвечает температуре плавления данного вещества.

Исходя из вышесказанного, поверхность фронта кристаллизации определяется вытекающим из (22) трансцендентным уравнением

$$T_{nl} = \frac{T_n - T_x}{2\delta} z + \frac{T_n + T_x}{2} + \frac{J_0(k_s r)}{\text{sh}[k_s(L_1 + L_2 + 2\delta)]} \Phi(z, t, T_x, T_n, \delta, V). \quad (25)$$

где $T_{nl} = 56^\circ\text{C}$ – температура плавления сукцинонитрила. Уравнение (25) в неявном виде определяет функцию $z = z(r, t, T_x, T_n, \delta, V)$, которая описывает поверхность фронта кристаллизации. Сформулированная выше задача управления символически может быть записана в следующем виде

$$\min_{T_x, T_n, \delta, V} \max_r F[z(r, t, T_x, T_n, \delta, V)],$$

где $F[\cdot]$ – некоторый функционал, характеризующий отклонение поверхности $z = z(r, t, T_x, T_n, \delta, V)$ от плоскости. Решение этой задачи в каждый момент времени с учетом ограничений на параметры даст искомые законы их изменения во времени.

Заметим, что если при некотором значении координаты $z = z^*$ выполняется равенство

$$\Phi(z^*, t, T_x, T_n, \delta, V) = 0, \quad (26)$$

то в соответствии с формулой (23) температура на плоскости $z = z^*$ будет постоянной, т. е. не зависящей от радиуса r . Используем этот факт для решения задачи управления.

Полагая в (23) $r = 1$ и учитывая (24), легко найти координату z_{nl} фронта кристаллизации на боковой стенке ампулы:

$$z_{nl} = \frac{[2T_{nl} - (T_n + T_x)]\delta}{T_n - T_x}. \quad (27)$$

При подстановке (27) в (26) получаем уравнение

$$\Phi(z_{nl}, t, T_x, T_n, \delta, V) = 0. \quad (28)$$

Поэтому, если параметры процесса T_x, T_n, δ, V в каждый момент времени t будут удовлетворять уравнению (28), то поверхность фронта кристаллизации будет оставаться плоской в течении всего процесса.

Для моделирования ограничимся наиболее интересным случаем, когда в качестве параметра управления берется температура холодильника T_x , а остальные параметры фиксированы. Уравнение (28) решалось численно и определялся закон изменения температуры холодильника $T_x = T_x(t)$, который обеспечивает плоский фронт кристаллизации в процессе движения ампулы. График $T_x = T_x(t)$ изображен на рис. 7. Функции $z = z(r, \dots)$, описывающие поверхность фронта кристаллизации, для моментов времени $t_0 = 0$, $t_1 = 1$ ч, $t_2 = 2$ ч и $t_3 = 3$ ч изображены на рис. 8. Как видно, поверхность фронта кристаллизации остается плоской для всех рассматриваемых моментов времени.

5. Выводы

В данной работе получены аналитические формулы для распределения температуры в ампуле Бриджмена в процессе направленной кристаллизации вещества из расплава. Доказано, что при наличии радиальной составляющей температурного градиента конвективное движение происходит даже при малой гравитации, и построена картина конвективного течения при $Re=1250$. Найдены аналитические условия на параметры задачи, при выполнении которых фронт кристаллизации в процессе движения ампулы всегда является плоским.

1. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная неустойчивость несжимаемой жидкости. – М.: Наука. – 1972. – 392 с.
2. Ладиков Ю. П. Стабилизация процессов в сплошных средах. – М.: Наука. – 1978. – 432 с.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. Курс теоретической физики.. – М.: Наука. 1986. т.VI. – 736 с.
4. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука. – 1970. – 904 с.
5. LaCombe J. C., Koss M. B., Tennenhouse L. A., et al. The Clapeyron effect in succinonitrile: application to crystal growth // J. Crystal Growth.-1998.-194.-P. 143-148.
6. Lan C. W., Yang Y. W., Tu C. Y. Reversing radial segregation and suppressing morphological instability during vertical Bridgman crystal growth by rotation // J. Crystal Growth.-2002.-235.-P. 619-625.
7. Laxmanan V. The impurity effect in the space shuttle dendritic growth experiments with succinonitrile // Materials Research Bulletin.-1998.-6.-P. 867-875.
8. Liu S., Mazumder P., Trivedi R. A new thermal assembly design for the directional solidification of transparent alloys // J. Crystal Growth.-2002.-240.-P. 560-568.
9. Qian X. W. Cummins H. Z. Dendritic sidebranching initiation by a localized heat pulse // Physical Review Letters.- 1990.- 64.-P. 3038-3041.

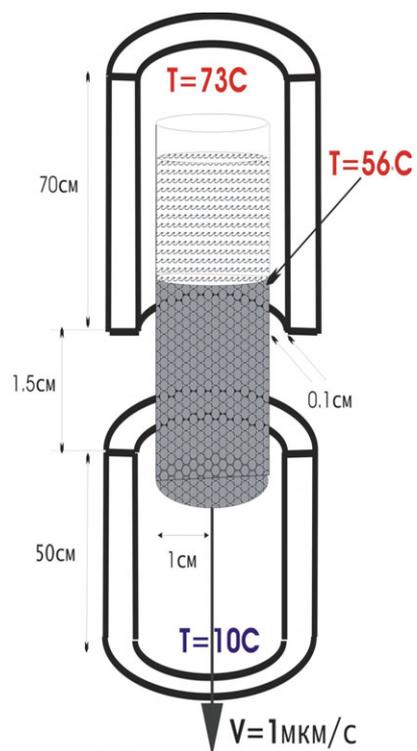


Рис. 1. Схематическое изображение экспериментальной установки

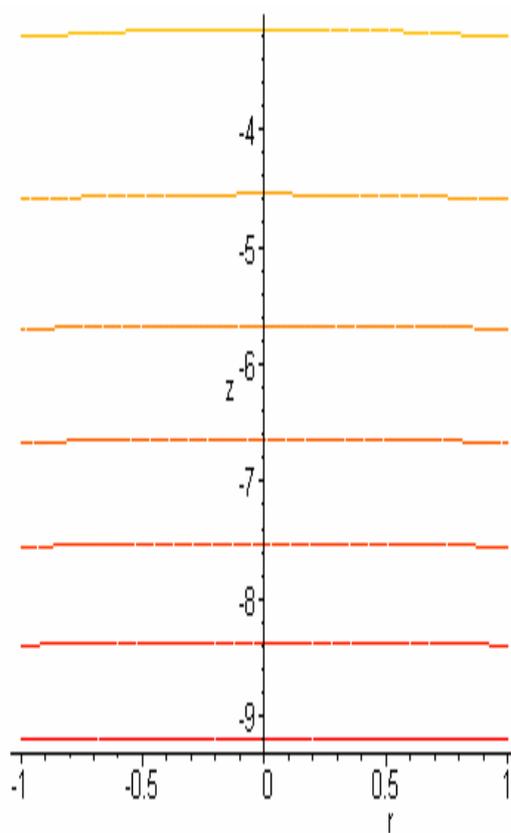


Рис. 2. Изотермы поля температуры в отсутствие конвекции

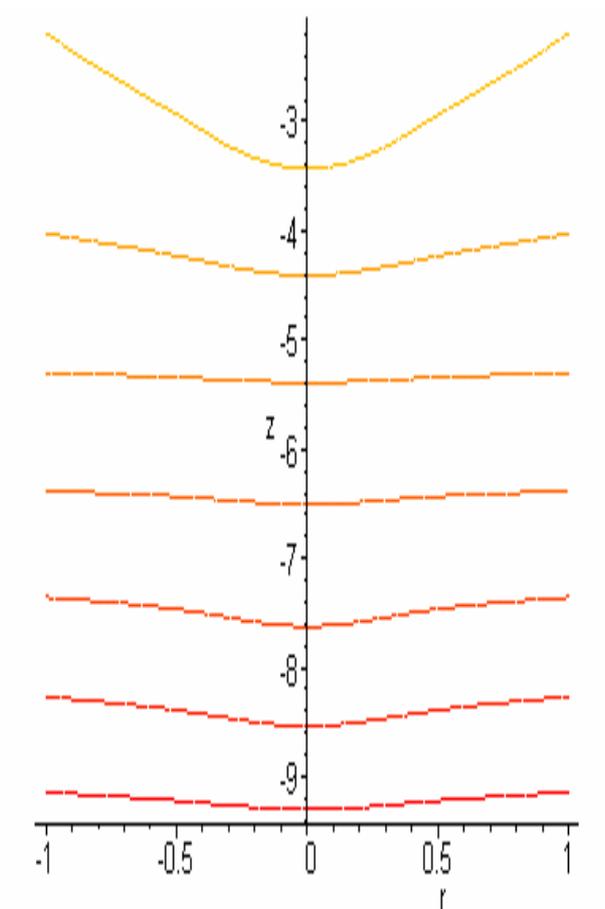


Рис. 3. Изотермы поля возмущений температуры

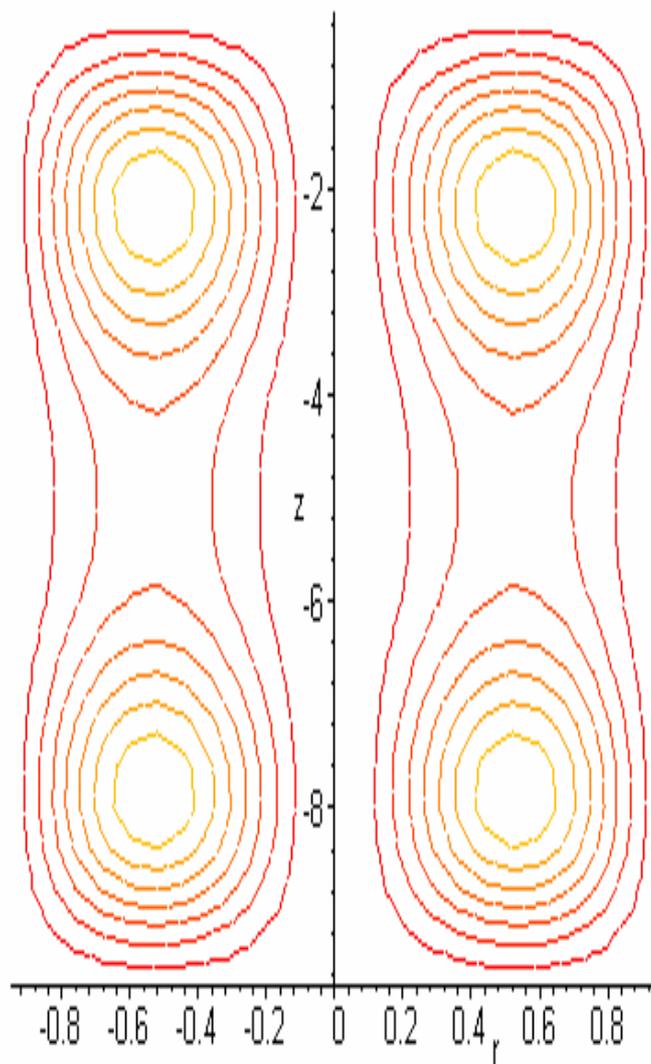


Рис. 4. Линии тока конвективного течения расплава при $Re = 1025$

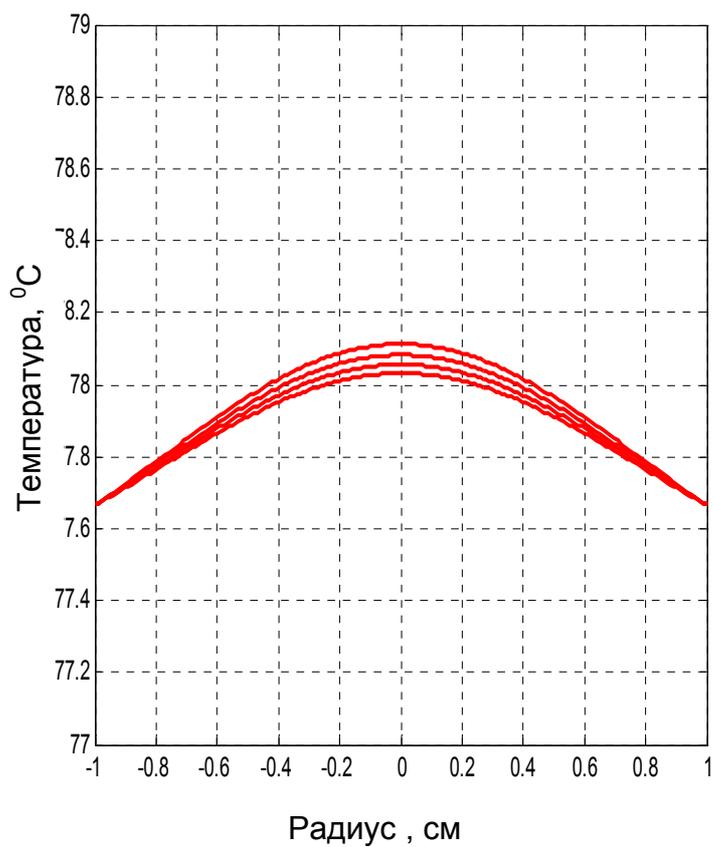


Рис.5. Изменение температуры в зоне нагревателя

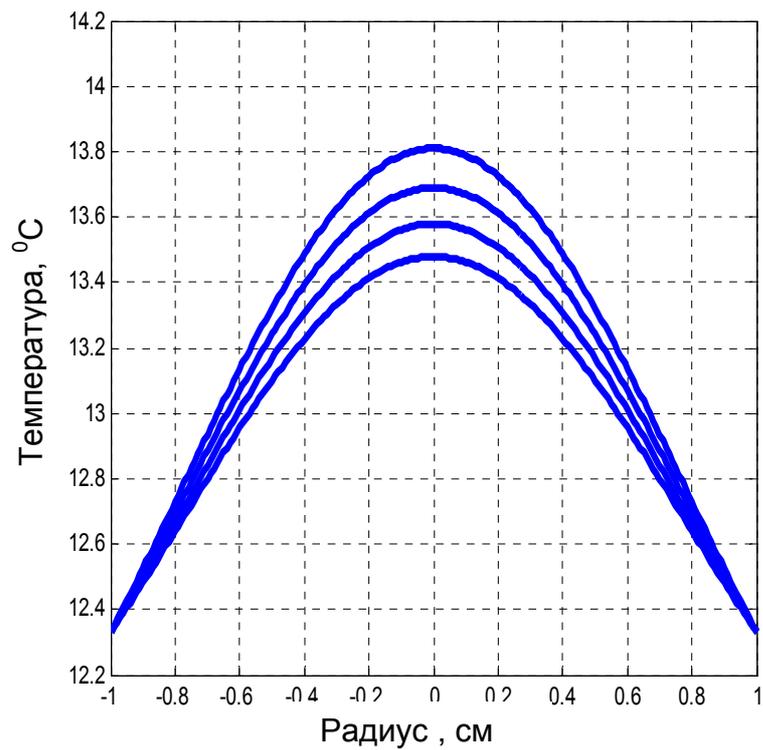


Рис.6. Изменение температуры в зоне холодильника

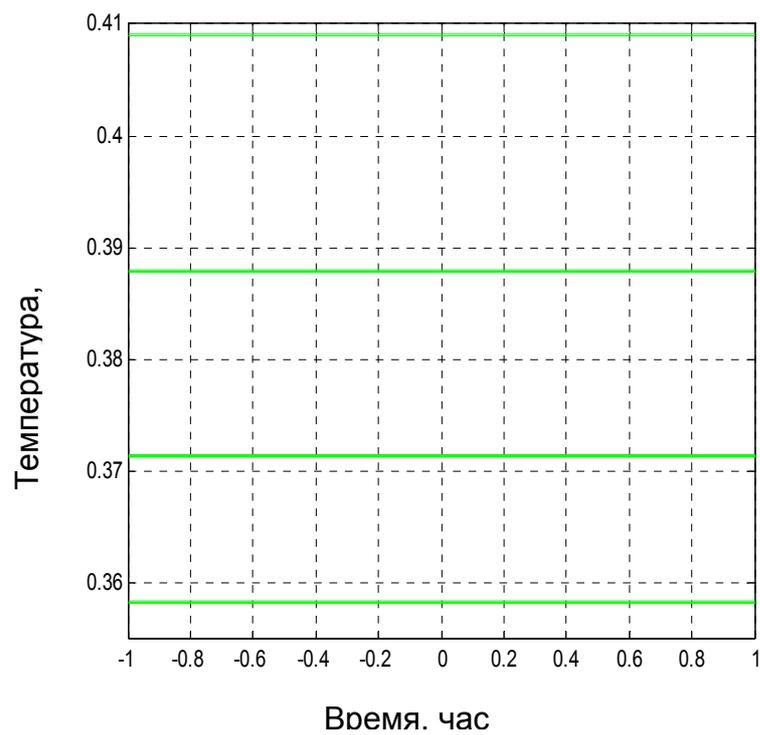


Рис.7. Изменение во времени оптимальной температуры холодильника $T_x = T_x^*(t)$

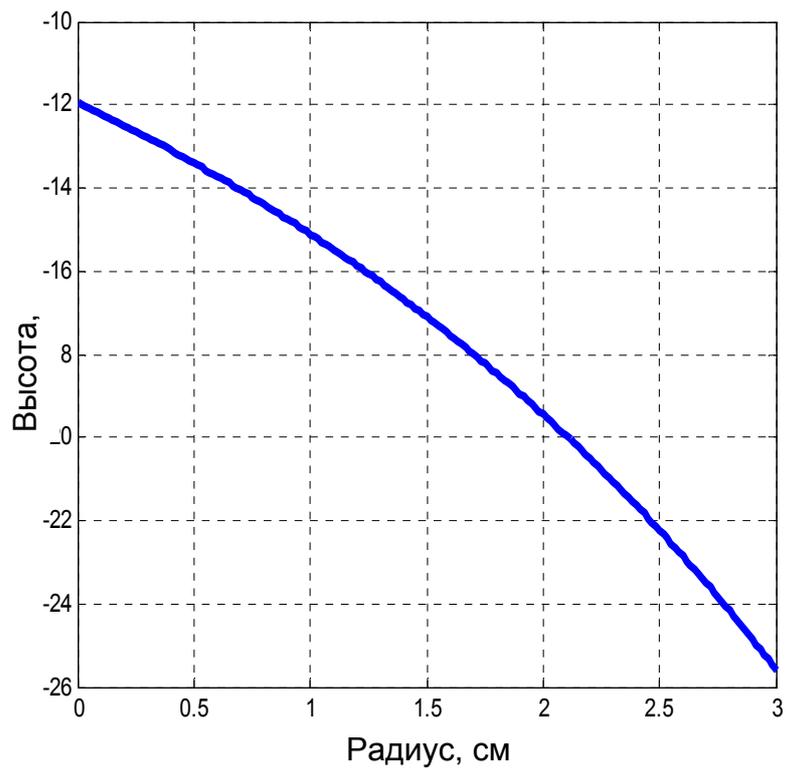


Рис.8. Форма фронта кристаллизации при $T_x = T_x^*(t)$ для моментов времени $t=0, 1, 2, 3$ ч