

ВЛИЯНИЕ НЕСОХРАНЕНИЯ МАГНИТНОГО МОМЕНТА БЫСТРЫХ ПРОТОНОВ НА ИХ УДЕРЖАНИЕ В ГЕОМАГНИТНОЙ ЛОВУШКЕ

Черемных О. К.¹, Голобородько В. Я.², Резник С. Н.²

¹Институт космических исследований НАН Украины и Национального космического агентства Украины, Киев

²Институт ядерных исследований НАН Украины, Киев

Изучается возможность численного описания поведения высокоэнергетичных протонов в магнитосфере Земли в областях динамической неустойчивости их движения в фазовом пространстве. Представлены результаты сравнения различных методов численного расчета движения протонов в этих областях и предложен подход для усредненного описания их поведения.

Динамическая неустойчивость движения протонов и его описание

Как известно [1], устойчивость движения заряженной частицы в геомагнитной ловушке определяется степенью сохранения поперечного адиабатического инварианта $\mu = m v_{\perp}^2 / 2B$, где v_{\perp} – поперечная по отношению к магнитному полю ловушки \mathbf{B} составляющая скорости частицы массы m . Разрушение этого инварианта происходит за счет резонансного взаимодействия ларморовского движения частицы с продольными колебаниями между точками отражения. Согласно [1] система резонансов определяется выражением

$$\frac{\bar{\omega}_c(v, \alpha)}{2\omega_l(v, \alpha)} = n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где $\bar{\omega}_c(v, \alpha)$ – ларморовская частота, усредненная по периоду продольных колебаний, $\bar{\omega}_l(v, \alpha)$ – частота продольных колебаний, v – полная скорость частицы, α – экваториальный питч-угол.

При достаточно большом значении параметра адиабатичности $\chi_{\perp e} \approx 3\rho_c / LR_E$ (ρ_c – ларморовский радиус, R_E – радиус Земли, L – координата Мак-Илвайна) соседние резонансы перекрываются, образуя стохастическую область. Граница стохастической неустойчивости в соответствии с теорией перекрытия резонансов [1] определяется условием

$$K = \mu_n \xi(\mu_n) d'_{\mu}(\mu_n) = 1, \quad (2)$$

где μ_n – значение магнитного момента в резонансе,

$$\xi = \frac{\Delta\mu}{\mu}, \quad d'_{\mu}(\mu_n) = \frac{\pi \sin \alpha}{\mu_n} \frac{\partial n}{\partial \sin \alpha},$$

$\Delta\mu$ – приращение магнитного момента за полупериод продольных колебаний. В случае дипольного магнитного поля скачки адиабатического инварианта $\Delta\mu$ можно находить по следующей формуле [2]:

$$\frac{\Delta\mu}{\mu} \approx 0.74 \frac{14 - \sin^2 \alpha}{\sin 2\alpha} \exp\left[-3 \frac{\psi(\alpha)}{\chi_{\perp e}}\right], \quad (3)$$

где

$$\psi(\alpha) = \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{1-x^2}{(1+x^2)^3} \left(1 - \sin^2 \alpha \cdot \frac{(1-3x^2)^{1/2}}{(1+x^2)^3}\right)^{-1/2} dx.$$

Тогда (2) принимает вид [3]

$$K \approx \frac{0.56}{\chi_{\perp e}} \frac{(14 - \sin^2 \alpha)}{\cos \alpha} \frac{(1 + 1.44 \sin \alpha)}{\sin^3 \alpha} \exp\left[-3 \frac{\psi(\alpha)}{\chi_{\perp e}}\right] = 1. \quad (4)$$

Из последнего выражения и определяются границы области стохастичности. Следует, однако, отметить, что оно справедливо лишь при сравнительно небольших значениях параметра адиабатичности ($\chi_{\perp e} \leq 0.1$).

Целью настоящей работы было сравнение оценочной формулы (4) с результатами прямых численных расчетов. В качестве характеристики стохастической неустойчивости движения протонов в ловушке использовался усредненный коэффициент питч-угловой диффузии, определяемый как

$$D_{\lambda\lambda} = \langle (\Delta\bar{\lambda})^2 / \Delta t \rangle. \quad (5)$$

Здесь $\lambda = \mu B_0 / E$ - нормализованный магнитный момент протона, B_0 - значение магнитного поля на экваторе, $E = m v^2 / 2$ - энергия протона. Для вычисления накапливающихся изменений магнитного момента была использована процедура, аналогичная предложенной в [1]. Уравнения движения протона интегрировались на промежутке времени t , значительно превышающем все характерные времена движения частицы. Этот временной интервал разбивался на n равных подынтервалов Δt_n , в пределах каждого из которых производилось усреднение λ по времени и определялось $\bar{\lambda}_n$. Эта процедура выполнялась с целью устранения вклада адиабатических изменений магнитного момента в диффузионный коэффициент. После этого вычислялись разности $\bar{\lambda}_i - \bar{\lambda}_j$ для каждой пары временных интервалов, и проводилось усреднение по всем парам. В (5) это усреднение условно обозначено угловыми скобками, а Δt представляет собой временной промежуток между центрами интервалов.

Изложенный выше теоретический подход к описанию динамически неустойчивого движения справедлив лишь в дрейфовом приближении. По этой причине для сравнения результатов численных расчетов с теоретическими предсказаниями прово-

дилось дополнительное усреднение по начальной фазе ларморовского вращения на дрейфовой траектории движения протона.

Используемые методы расчета динамики движения протонов

Результаты расчетов получены на основе численного интегрирования уравнений движения

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \left[\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \boldsymbol{\omega} \right], \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{e\mathbf{B}}{mc}, \quad (6)$$

где \mathbf{r} – радиус вектор частицы, e – заряд частицы, c – скорость света,

$$B_R = M \frac{3RZ}{(R^2 + Z^2)^{5/2}}, \quad B_\varphi = 0, \quad B_Z = M \frac{2Z^2 - R^2}{(R^2 + Z^2)^{5/2}}$$

– компоненты магнитного поля в цилиндрической системе координат (R, φ, Z) , M – дипольный магнитный момент Земли. Эти уравнения при заданных начальных значениях $\mathbf{r}(0)$ и $\frac{d\mathbf{r}}{dt}(0)$ интегрировались на достаточно длительном промежутке времени (тысяча и больше периодов продольного движения) с помощью различных численных методов:

- метод Рунге–Кутты 4^{го} порядка
- программа LSODAR из пакета ODEPACK [4]
- симплектический метод 6^{го} порядка для сепарабельных гамильтоновых систем [5] (Symplectic 1)
- симплектический метод 4^{го} порядка для гамильтоновых систем общего вида [6] (Symplectic 2).

В расчетах, которые проводились с помощью 1), 2) и 4), не использовались законы сохранения энергии протона E и его обобщенного азимутального импульса

$$P_\varphi = R \left(m \frac{d\varphi}{dt} + \frac{eMR}{c(R^2 + Z^2)^{3/2}} \right).$$

Симплектический метод интегрирования высокого порядка [5] применялся для контроля точности расчетов, полученных другими методами, и в этом случае явно использовалось постоянство во времени P_φ . Отметим, что симплектические методы сохраняют все инварианты Пуанкаре, что особенно важно при проведении интегрирования уравнений движения одной частицы на больших промежутках времени.

Результаты численного моделирования

Применение различных методов интегрирования уравнений движения обусловлено тем, что мы пытаемся получить характеристики поведения высокоэнергетичных протонов в динамически неустойчивой области. Большую роль в этом случае играет соотношение между точностью проводимых расчетов и вычислительным временем, не-

обходимым для ее достижения. Сравнительные результаты расчетов коэффициентов питч-угловой диффузии, полученные с использованием различных численных методов, упомянутых в предыдущем разделе, представлены на рис.1. При этом предполагалось, что для первого и второго методов относительная точность сохранения энергии в процессе вычислений была не хуже 10^{-3} .

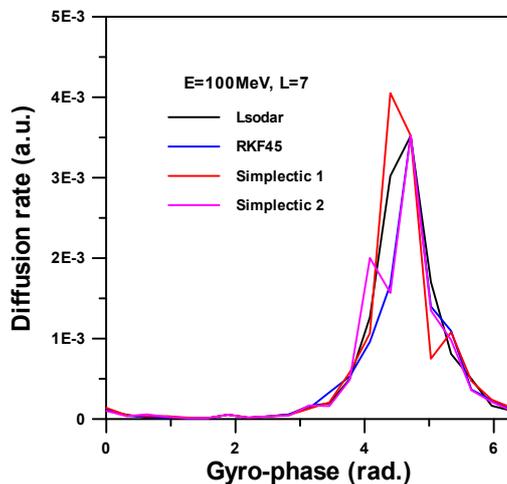


Рис. 1а. Скорость диффузии для $\alpha=1.57$ как функция начальной фазы ларморовского вращения в экваториальной плоскости.

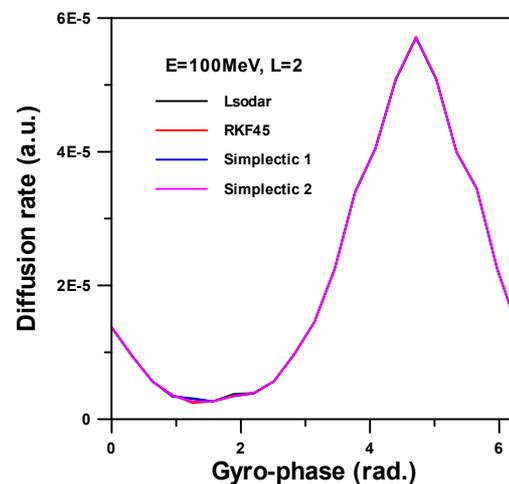


Рис. 1б. Скорость диффузии для $\alpha=1.57$ как функция начальной фазы ларморовского вращения в экваториальной плоскости.

Видно, что в области устойчивого движения все использованные численные методы расчета движения частиц приводят к практически одинаковым значениям парных корреляций (мы их условно называем здесь коэффициентом диффузии). В соответствии с формулой (4) высокоэнергетичные протоны на больших оболочках должны находиться в области динамически неустойчивого движения, и результаты расчетов, приведенные на рис.1,а, показывают, что движение одной частицы в этой области фазового пространства не может быть описано достаточно хорошо ни одним из использованных методов. Однако переход в режим динамически неустойчивого – стохастического движения может быть адекватно описан всеми рассматриваемыми численными методами в терминах предложенного в данном докладе коэффициента питч-угловой диффузии при соблюдении заданной точности сохранения энергии.

На рис.2 представлены типичные результаты расчетов коэффициента питч-угловой диффузии быстрых протонов. Этот коэффициент испытывает скачок около 102 раз при энергиях порядка 80МэВ на оболочке с $L=4.7$, что находится в качественном соответствии с теоретическими предсказаниями формулы (4). Это характеризует переход в режим динамически неустойчивого движения и, как следствие, к возникновению стохастической бесстолкновительной питч-угловой диффузии протонов.

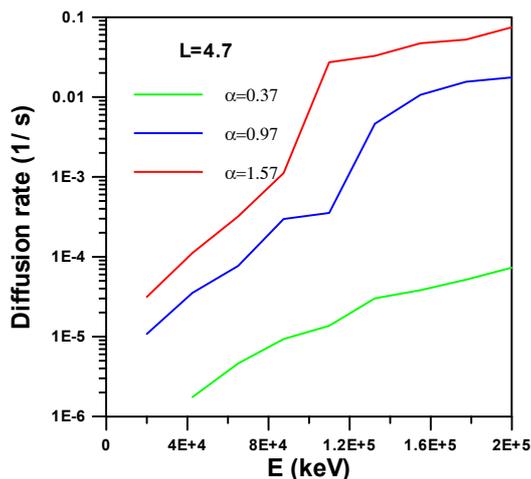


Рис. 2. Скорость диффузии как функция энергии

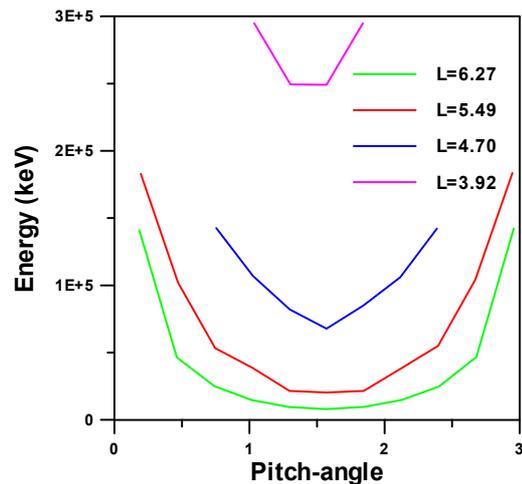


Рис. 3. Область удержания в фазовом пространстве

Указанное значение коэффициента диффузии использовалось для качественного определения области стохастического переноса во всем фазовом пространстве области дрейфового удержания протонов в магнитосфере. Области усиленного переноса протонов представлены на рис. 3 и лежат выше приведенных на графике кривых. Приведенные на данном рисунке зависимости находятся в соответствии с теоретическими оценками формулы (4). При этом область фазового пространства, подверженная стохастическому переносу, существенно анизотропна по питч-углу и расширяется с ростом энергии частиц и номером оболочки.

Обсуждение результатов

Представленные результаты численного моделирования показывают, что удовлетворительное описание поведения высокоэнергетичных протонов в магнитосфере Земли в областях динамически неустойчивого движения возможно при использовании усредненного коэффициента питч-угловой диффузии. Численно рассчитанный энергетический порог возникновения стохастической диффузии и ее интенсивность находятся в качественном согласии с теоретическими предсказаниями. Расчеты стохастического коэффициента питч-угловой диффузии могут быть выполнены методами типа Рунге-Кутты при надежном контроле точности сохранения энергии и использованы в трехмерном моделировании переноса быстрых протонов в магнитосфере Земли.

Следует отметить, что рассмотренный механизм стохастической диффузии протонов имеет резонансный характер. По этой причине он может существенно изменяться даже при учете небольших отклонений магнитного поля от рассмотренного дипольного приближения для магнитного поля Земли. Однако предложенный подход к описанию неадиабатического поведения быстрых протонов может быть применен и для реальной геометрии геомагнитного поля.

1. Chirikov B. V.// Physics Reports v.52, No.5 (1979) p.263.
2. Ильин В. Д., Ильина А. Н.// Физика плазмы, т.4 (1978) с.521.
3. Ильин В. Д., Ильина А. Н.// Физика плазмы, т.8 (1982) с.148.

4. Hindmarsh A. C., ODEPACK, a systematized collection of ODE solvers // Scientific Computing/ R.S.Stepleman et al. (eds.).- North-Holland, Amsterdam, 1983, p. 55-64.
5. Schlier Ch., Seiter A.// Comp. Phys. Comm., v.130 (2000) p.176.
6. Channell P.J., Scovel C.// Nonlinearity, v.3 (1990) p.231.