К ВОПРОСУ О ГЕНЕРАЦИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ЗЕМЛИ

Логинов А. А.

Институт космических исследований НАНУ - НКАУ, г. Киев

Работа посвящена исследованию ламинарного динамо-эффекта, который проявляется в достаточно интенсивных ламинарных сдвиговых течениях электропроводящей жидкости с высокой электропроводностью как спонтанное возникновение и стационарное поддержание магнитного поля. Интерес к этому явлению постоянно возрастает в связи с изучением природы магнетизма планет и других объектов космоса.

Рассмотрим в декартовой системе координат $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ течение Куэтта проводящей жидкости с профилем скорости

$$\vec{V} = -\vec{e}_y \Omega x \qquad (-h \le x \le h, \quad [\Omega] = c^{-1}), \tag{1}$$

который создается двумя увлекающими жидкость встречно движущимися в направлении $\vec{e}_y$ непроводящими пластинами, равноудаленными на h от плоскости $\{y, z\}$, как показано на рис. 1.

Выбирая для удобства систему единиц измерения длины и времени, в которой $h = 1$, $\Omega = 1$, запишем уравнения, определяющие поле $\vec{H}$ и обеспечивающие непротекание тока сквозь пластины в виде

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \mathrm{rot}\left[x\vec{e}_y \times \vec{H}\right] = \mu\Delta\vec{H},$$

$$\mathrm{div}\vec{H} = 0, \tag{2}$$

$$\mathrm{rot}_x \vec{H}\Big|_{x=\pm 1} = 0 \cdot$$

Ввиду их линейности и трансляционной инвариантности относительно t, y, z, решение будем искать как суперпозицию фурье-гармоник

$$\vec{H} = \left[\vec{e}_y H_y(x) + \vec{e}_z H_z(x)\right] e^{\mu\gamma t + i(ky + \ell z)}, \tag{3}$$

задав поляризацию такой, что $H_x(x) \equiv 0$, и обеспечивая тем самым наиболее полную локализацию поля в области, занятой течением.

Подстановка (3) в (2) дает соотношение $kH_y(x) + \ell H_z(x) = 0$ и условия краевой задачи для $H_z(x)$:

$$H_z''(x) = \left(k^2 + \ell^2 + \gamma - i\mu^{-1}kx\right)H_z(x) \quad (-1 < x < 1), \tag{4}$$

$$H_z(\pm 1) = 0. \tag{5}$$

Заменой переменных

$$Z = -\left(\frac{k}{\mu}\right)^{\frac{1}{3}} \left\{\mu k\left[1 + k^{-1}\left(\ell^2 + \gamma\right)\right] - ix\right\} = Z(x), \tag{6}$$

$$H_z(x) = W(Z)\big|_{Z=Z(x)} \tag{7}$$

уравнение (4) преобразуется в уравнение Эйри

$$W''(Z) = ZW(Z). \tag{8}$$

При этом отрезок $[-1, 1]$ вещественной прямой x переходит в прямолинейный отрезок на комплексной плоскости Z, перпендикулярный к вещественной оси и соединяющий комплексно-сопряженные точки

$$Z_{(\pm)} = -a^{\frac{1}{3}} e^{\mp i\varphi} \tag{9}$$

где a и φ определены соотношениями

$$\mathrm{ctg}\varphi = \mu k\left[1 + k^{-2}\left(\ell^2 + \gamma\right)\right], \tag{10}$$

$$a = k^2\left[1 + k^{-2}\left(\ell^2 + \gamma\right)\right] \cdot \left(1 + \mathrm{tg}^2\varphi\right)^{\frac{3}{2}} \mathrm{ctg}^2\varphi .$$

Соответственно граничные условия (5) для $H_z(x)$ преобразуются в граничные условия, заданные на концах указанного отрезка комплексной плоскости Z для $W(Z)$:

$$W\left(Z_{(\pm)}\right) = 0 . \tag{11}$$

Благодаря предлагаемой замене переменных, решение интересующей нас краевой задачи удается выразить через целые трансцендентные функции Эйри $\mathrm{Ai}(Z)$, которые, согласно [2], представляются сходящимися на всей плоскости Z степенными рядами следующим образом:

$$\mathrm{Ai}(Z) = \mathrm{Ai}(0)\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z^{3n}}{\prod\limits_{k=1}^{n}(3k-1)\prod\limits_{\ell=1}^{n}(3\ell)}\right] + \mathrm{Ai}'(0)\left[Z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z^{3n+1}}{\prod\limits_{k=1}^{n}(3k)\prod\limits_{\ell=1}^{n}(3\ell+1)}\right], \tag{12}$$

где $\mathrm{Ai}(0) = \left[3^{\frac{2}{3}}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\right]^{-1}$, $\mathrm{Ai}'(0) = \left[3^{\frac{1}{3}}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\right]^{-1}$.

Определяемые через $\mathrm{Ai}(Z)$ функции

$$W_{(\pm)}(Z) = \mathrm{Ai}\left(Ze^{\pm\frac{2\pi i}{3}}\right) \tag{13}$$

являются двумя линейно независимыми решениями уравнения (8), как и сама функция $\mathrm{Ai}(Z) = W(Z)$, связанная с $W_{(+)}$ и $W_{(-)}$ линейно:

$$W(Z) + W_{(+)}(Z)e^{\frac{2\pi i}{3}} + W_{(-)}(Z)e^{-\frac{2\pi i}{3}} = 0. \qquad (14)$$

Функция

$$w(Z) = u(Z) + iv(Z) = 2\sqrt{\pi}W_{(+)}(Z)e^{i\frac{\pi}{6}}, \qquad (15)$$

предложенная В.А. Фоком [3] для применения в теории распространения радиоволн над искривленной поверхностью, достаточно хорошо изучена и табулирована. Для вещественных значений $Z = t$ составлены таблицы функций $u(t)$, $v(t)$, $u'(t)$, $v'(t)$, позволяющие при помощи тождества (14) получать значения функции Эйри не только на вещественной оси, но и на всех шести лучах комплексной плоскости, на которых

$$\arg Z = \frac{n\pi}{3} \text{ (n = 0, 1, 2, 3, 4, 5).}$$

Однако для решения краевой задачи динамо этих табличных данных недостаточно, так как заранее неизвестно, какие именно значения Z будут характеристическими числами. Поэтому для их определения следует использовать представление в виде общих степенных рядов (12), сходящихся на всей комплексной плоскости, а также указанные В.А. Фоком асимптотики для $u(Z)$ и $v(Z)$, справедливые в достаточно широком секторе $-\frac{\pi}{3} < \arg < \frac{\pi}{3}$, в котором сходятся ряды

$$u(Z) = Z^{-\frac{1}{4}} \exp\left(\frac{2}{3}Z^{\frac{3}{2}}\right)\left(1 + a_1 Z^{-1} + a_2 Z^{-2} + a_3 Z^{-3} + \ldots\right), \qquad (16)$$

$$v(Z) = Z^{-\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{2}{3}Z^{\frac{3}{2}}\right)\left(1 - a_1 Z^{-1} + a_2 Z^{-2} - a_3 Z^{-3} + \ldots\right),$$

где $a_1 = \frac{5}{72}$, $a_2 = \frac{(5\cdot 11)\cdot 7}{(1\cdot 2)\cdot 72^2}$, $a_3 = \frac{(5\cdot 11\cdot 17)\cdot(7\cdot 13)}{(1\cdot 2\cdot 3)\cdot 72^3}$, …,
$a_n = \frac{[5\cdot 11\cdot \ldots \cdot(6n-1)]\cdot[7\cdot 13\cdot \ldots \cdot(6n-5)]}{n!\,72^n}$.

Применяя функции Эйри (13), представим общее решение уравнения (8) в виде

$$W(Z) = C^{(+)}W_{(+)}(Z) + C^{(-)}W_{(-)}(Z). \qquad (17)$$

Подставляя (17) в граничные условия (11), получим линейную однородную алгебраическую систему двух уравнений относительно двух неизвестных констант $C^{(+)}$, $C^{(-)}$:

$$C^{(+)}W_{(+)}\left(Z_{(+)}\right)+C^{(-)}W_{(-)}\left(Z_{(+)}\right)=0, \tag{18}$$
$$C^{(+)}W_{(+)}\left(Z_{(-)}\right)+C^{(-)}W_{(-)}\left(Z_{(-)}\right)=0.$$

Как известно, для существования нетривиального решения этой системы необходимо и достаточно, чтобы ее определитель равнялся нулю. Соответственно получаем характеристическое уравнение

$$W_{(+)}\left(Z_{(+)}\right)W_{(-)}\left(Z_{(-)}\right)=W_{(+)}\left(Z_{(-)}\right)W_{(-)}\left(Z_{(+)}\right). \tag{19}$$

Простые выкладки, использующие (9), (12), (13), приводят это уравнение к удобной для вычислений окончательной форме, устанавливающей взаимосвязь a и φ:

$$\sin\varphi+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a^n f_n(\varphi)=0, \tag{20}$$

где

$$f_n(\varphi)=\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}(3k-1)}{(3n+1)!}\sin[(3n+1)\varphi]+\sum_{m=1}^{n-1}\frac{\prod\limits_{k=1}^{n-m}(3k-1)\prod\limits_{\ell=1}^{m}(3\ell-2)}{(3m)!\,[3(n-m)+1]!}\sin\{[3(n-2m)+1]\varphi\}-$$
$$-\frac{\prod\limits_{\ell=1}^{n}(3\ell-2)}{(3n)!}\sin[(3n-1)\varphi].$$

Указанный здесь степенной ряд, как это следует из теории функций Эйри, сходится на всей комплексной плоскости Z, т. е. при всех $a \geq 0$ и любых φ (mod 2π), но область существования решений уравнения (20), разумеется, не обязана совпадать со всей плоскостью Z. Как показывает анализ, решения существуют по крайней мере в секторе $\frac{\pi}{2}<\varphi<\pi$.

Вычисления производились в пределах 1< n < N. Уже начиная с $N \geq 20$, дальнейшее увеличение N вплоть до N = 60 не выявило практически никаких отличий в результатах расчета дисперсионной зависимости $a=a(\varphi)$ в диапазоне $0 \leq a \leq 160$. Выявлена зонная структура неустойчивости, в которой, собственно, и проявляется динамо-эффект. Для иллюстрации на рис. 2 приведены эпюры трех зон (они затушеваны), попадающих в указанный диапазон изменения a.

Принципиальное значение имеет пороговое значение $a_* = a_{\min}$ и соответствующее ему φ_*. Эти числа определяют наибольшее значение магнитной вязкости $\mu = \mu_{кр}$, выше которого генерация поля невозможна, и реализуемая при $\mu_{кр}$ наименьшая длина волны поля $\lambda_{\min}=\frac{2\pi}{k_{кр}}$, связь которых с a_* и φ_* устанавливается согласно (10). Фрагмент первой зоны с a_* и φ_* укрупненно показан на рис. 3.

В результате подстановки найденной дисперсионной зависимости a=a(φ) в формулы, определяющие $Z_{(\pm)}$, получаем с точностью до произвольного множителя решение уравнения (8), удовлетворяющее заданным граничным условиям (11), имеющее вид

$$W(Z) = W_{(-)}\left(Z_{(+)}\right)W_{(+)}(Z) - W_{(+)}\left(Z_{(+)}\right)W_{(-)}(Z). \tag{21}$$

Явное выражение для $H_z(x)$ получается из (21) по формулам (6) и (7). При этом $H_y(x) = -\frac{\ell}{k}H_z(x)$. Векторное поле токов определяется в результате применения операции rot к (3). Выделение действительной части из полученных выражений для магнитного поля и токов дает окончательную вещественную форму решения рассмотренной задачи.

Для случая $\gamma = 0$ и $\ell = 0$ при $a = a_{кр} = 6{,}970$ и $\varphi_* = 2{,}247$, которым, согласно (10), соответствуют $k_* = -1{,}629$ и $Re_m^* = \mu_*^{-1} = 2{,}029$, на рис.4 линиями уровня в пределах $-0{,}8 \le H_z \le +0{,}8$ представлен результат расчета z-составляющей напряженности магнитного $\vec{H}$ как функции x и y. Подобным же образом на рис. 9 и 10 даны распределения x- и y- составляющих плотности тока $\vec{J}$ в пределах от –1,5 до +1,5.

На приведенных иллюстрациях обращают на себя внимание следующие две особенности построенных эпюр:

- наклон ячеек генерируемого поля и токов навстречу сдвиговому течению и S-образность линий нулевого уровня;
- обращение в нуль нормальной к непроводящим границам составляющей J_x поля токов в соответствии с заданными граничными условиями.

В более общем случае, когда $\ell \ne 0$, дисперсионная зависимость для каждой из зон генерации поля должна изображаться в виде параметризованного инкрементом γ семейства поверхностей над плоскостью волновых чисел k и ℓ $\mu^{-1} = Re_m = R^{\sigma}(k, \ell; \gamma)$, где σ - номер зоны ($\sigma = 1, 2, 3, \ldots$). Минимальное значение Re_m для течения, способного поддерживать стационарный динамо-процесс, достигается при $\ell = 0$. Объемные пондеромоторные силы $\left[\vec{H} \times \mathrm{rot}\,\vec{H}\right]$, возмущая поле скоростей в соответствии с уравнением (2), приводят к увеличению касательных напряжений, тормозящих движение пластин. Тем самым обеспечивается трансформация механической энергии в электромагнитную, что и определяет, в конечном счете, сущность эффекта гидромагнитного динамо.

1. Моффат Г. Возбуждение магнитного поля в проводящей среде. — М.: Мир, 1980, 340 с.
2. Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции. — М.: Наука, 1978, 376 с.
3. Фок В. А. Таблицы функций Эйри. — М.: Изд. Инф. Отд. НИИ-108, 1946, 56 с.

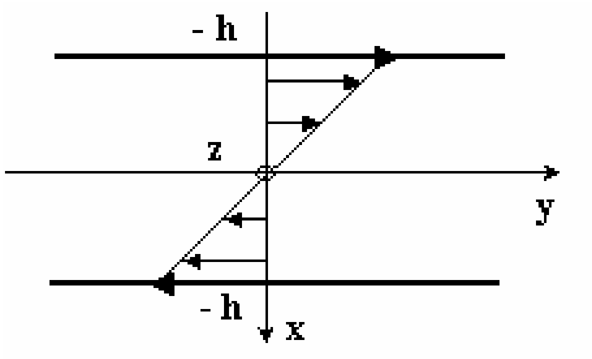

Рис.1. Течение Куэтта между встречно тангенциально движущимися параллельными плоскостями.

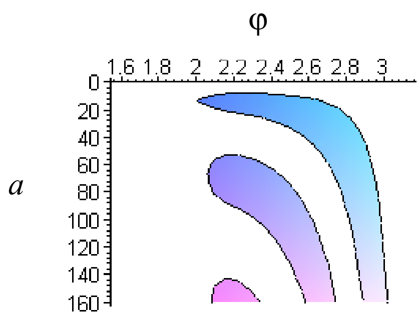

Рис.2. Зонная структура решения системы уравнений (18). Темные зоны соответствуют отрицательным значениям детерминанта, неокрашенная область – положительным. Линия границы между областями – решения уравнения (19) (нулевые значение детерминанта системы (18))

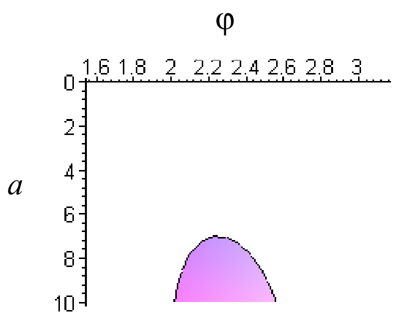

Рис.3. Укрупненный фрагмент первой (по мере возрастания параметра *a*) зоны

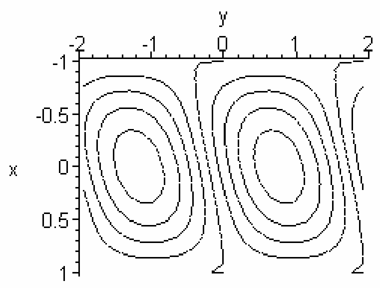

Рис.4. Линии уровня величины H_z - компонента магнитного поля

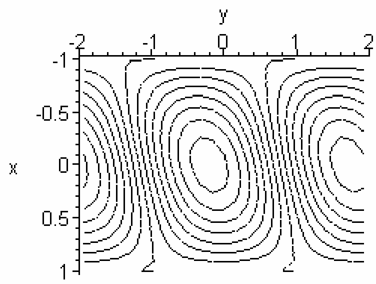

Рис.5. Линии уровня J_x - компонента плотности тока

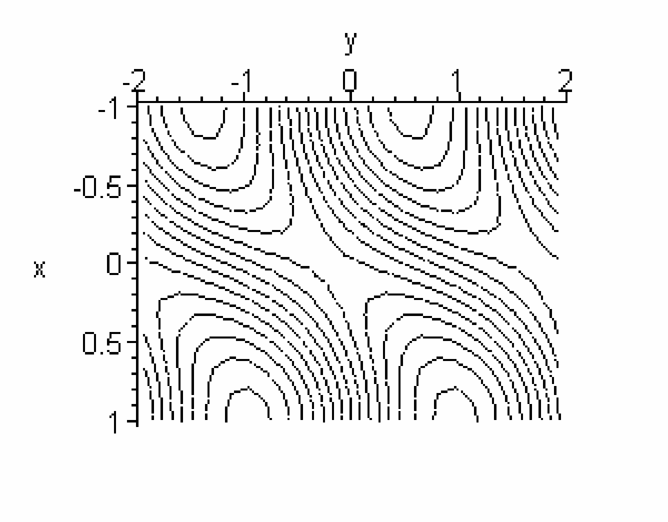

Рис.6. Линии уровня J_y -компоненты плотности тока