УДК 52.425

УРАВНЕНИЯ ФРЕНЕ–СЕРРЕ ДЛЯ ТРАЕКТОРИИ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В МАГНИТНОМ ДИПОЛЕ

Носов С. Ф., Маловичко П. П.

Главная астрономическая обсерватория

Национальной академии наук Украины, 252650, Киев

Методами дифференциальной геометрии рассматриваются траектории заряженных частиц в поле магнитного диполя. Определены параметры кривизны и кручения траекторий частиц и траекторий их ведущих центров. Одним из результатов работы, который может иметь важные физические приложения, является обнаруженный эффект превышения средней квадратичной частоты вращения трехгранника Френе относительно частоты Лармора. Особенно этот эффект проявляется для частиц, распространяющихся вдоль искривленных силовых линий магннитного поля под малым питч-углом.

1. Введение

Траектория частицы в магнитном диполе представляет собой сложную пространственную кривую, которую можно исследовать методами дифференциальной геометрии. В данной работе мы нашли точные выражения для кривизны и кручения такой траектории. Определена угловая скорость вращения трехгранника Френе, численно равная модулю вектора Дарбу. Физический интерес представляет средняя величина квадрата этой частоты вращения, которая может существенно превышать частоту Лармора при распространении частиц вдоль магнитного поля.

Для режима быстрого вращения частицы представляет интерес определить параметры траектории усредненного движения - ведущего центра частицы. В нашей работе мы записываем уравнения Френе–Серре для этой траектории и определяем ее параметры: кривизну и кручение.

2. Уравнения Френе-Серре для траектории частицы в поле магнитного диполя

Уравнение движения частицы в магнитном поле **B** для единичного вектора скорости **v**=**V**/V запишем в виде

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \Omega[\mathbf{v}\times\mathbf{h}]; \quad \Omega = \frac{\mathrm{eB}}{\mathrm{mc}}, \quad \mathrm{m} = \mathrm{m}_0 / \sqrt{1-\mathrm{V}^2/\mathrm{c}^2}, \tag{1}$$

где e — заряд, m — масса частицы, c — скорость света, Ω — частота Лармора, **h** = = **B**/B — единичный вектор в направлении магнитного поля, V и B — модули векторов скорости **V** и магнитного поля **B.**

Определим ортогональный репер Френе для траектории частицы, одним из единичных векторов выберем скорость **v**, а второй вектор $\mathbf{n}_{tr}$ репера направим по вектору ускорения частицы. Перепишем уравнение (1) в безразмерном виде:

$$\frac{d\mathbf{v}}{ds}=\frac{C_{st}\Omega}{V}[\mathbf{v}\times\mathbf{h}];\;\; ds=\frac{Vdt}{C_{st}} \tag{2}$$

где $C_{st}=(a_0^3\Omega_0/V)^{1/2}$ — единица длины Штермера, a_0 — радиус намагниченного шара, создающего дипольное магнитное поле, Ω_0 — ларморовская частота на поверхности этого шара на экваторе. Единичным вектором, параллельным $[\mathbf{v}\times\mathbf{h}]$, является вектор $\mathbf{n_{tr}}$ = = $[\mathbf{v}\times\mathbf{h}]/(1-\mu^2)^{1/2}$, где $\mu = \mathbf{v}\cdot\mathbf{h}$ — косинус питч-угла частицы, и мы можем записать (2) в виде $d\mathbf{v}/ds = k_{tr}\mathbf{n_{tr}}$, где величина $k_{tr}=\frac{C_{st}\Omega\sqrt{1-\mu^2}}{V}$ называется кривизной траектории частицы. Третий вектор трехгранника Френе, бинормаль $\mathbf{b_{tr}}$, определяется автоматически:

$$\mathbf{b}_{tr}=[v\times n_{tr}]=\frac{\mathbf{v}\mu-\mathbf{h}}{\sqrt{1-\mu^2}}.$$

Полная система уравнений Френе–Серре [2] для кривой, представляющей собой траекторию частицы в магнитном поле диполя, имеет вид

$$\frac{d\mathbf{v}}{ds}=k_{tr}\mathbf{n_{tr}},\; \frac{d\mathbf{n_{tr}}}{ds}=-\chi_{tr}\mathbf{b_{tr}}-k_{tr}\mathbf{v},\; \frac{d\mathbf{b_{tr}}}{ds}=\chi_{tr}\mathbf{n_{tr}}, \tag{3}$$

где χ_{tr} — кручение траектории, которое еще подлежит определению.

Из третьего уравнения системы Френе–Серре (3) имеем

$$\frac{d\mathbf{b_{tr}}}{ds}=\frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}}\left(\mu k_{tr}\mathbf{n_{tr}}+\mathbf{v}\frac{d\mu}{ds}+\frac{\mathbf{v}\mu-\mathbf{h}}{1-\mu^2}\mu\frac{d\mu}{ds}-\frac{d\mathbf{h}}{ds}\right)=\chi_{tr}\mathbf{n_{tr}}. \tag{4}$$

Умножив (4) скалярно на $\mathbf{n_{tr}}$, получаем для кручения выражение

$$\chi_{tr}=\frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}k_{tr}-\frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}}\left(\mathbf{n}_{tr}\cdot\frac{d\mathbf{h}}{ds}\right). \tag{5}$$

Введем “магнитный” вращающийся репер $\{\mathbf{h}, \mathbf{e}_\perp, \mathbf{n}_{tr}\}$, где $\mathbf{e}_\perp = [\mathbf{h}\times\mathbf{n}_{tr}]$, и преобразуем уравнения (3) для векторов этого репера. Этот репер вводится для удобства перехода в дальнейшем к невращающейся локальной системе координат, в которой мы намерены проводить усреднение по фазе вращения. Связь тройки векторов $\{\mathbf{v}, \mathbf{n}_{tr}, \mathbf{b}_{tr}\}$ с тройкой векторов $\{\mathbf{e}_\perp, \mathbf{h}, \mathbf{n}_{tr}\}$ выражается в виде

$$\mathbf{v}=\sqrt{1-\mu^2}\,\mathbf{e}_\perp+\mu\mathbf{h}\equiv\mathbf{v}_\perp+v_{II}\mathbf{h},\;\; \mathbf{b}_{tr}=\mu\mathbf{e}_\perp-\sqrt{1-\mu^2}\,\mathbf{h}, \tag{6}$$

где $\mathbf{v}_\perp$ и $\mathbf{v}_\parallel$ — перпендикулярная и параллельная составляющие скорости $\mathbf{v}$ частицы относительно магнитного поля.

Подставляя (6) в (3) после несложных преобразований, мы получим из уравнений Френе-Серре систему следующих уравнений:

$$\frac{d\mathbf{h}}{ds}=\frac{\mathbf{e}_{\perp}}{\sqrt{1-\mu^2}}\frac{d\mu}{ds}+\chi_m\mathbf{n}_{tr}\,,\ \frac{d\mathbf{n}_{tr}}{ds}=-k_m\mathbf{e}_{\perp}-\chi_m\mathbf{h}\,,\ \frac{d\mathbf{e}_{\perp}}{ds}=-\frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}}\frac{d\mu}{ds}\mathbf{h}+k_m\mathbf{n}_{tr}\,, \tag{7}$$

где обозначено

$$k_m=(\mu\chi_{tr}+\sqrt{1-\mu^2}k_{tr})=\frac{C_{St}\Omega}{V}-\frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}\left(\mathbf{n}_{\mathbf{tr}}\frac{d\mathbf{h}}{\mathbf{ds}}\right),\chi_m=(\mu k_{tr}-\sqrt{1-\mu^2}\chi_{tr})=\left(\mathbf{n}_{\mathbf{tr}}\frac{d\mathbf{h}}{\mathbf{ds}}\right). \tag{8}$$

Для описания движения частицы в магнитном поле обычно вводится локальная невращающаяся система координат, в которой удобно представить гировращение частицы. Перейдем к такому невращающемуся реперу, двумя векторами которого являются **h** и единичный вектор **n** в направлении главной нормали к силовой линии магнитного поля. Третий вектор репера определяется автоматически: **b** = [**h**×**n**] и называется бинормалью к силовой линии. Плоскость вращения векторов $\mathbf{n}_{tr}$ и $\mathbf{e}_{\perp}$ расположена в плоскости векторов **n** и **b**. Угол вращения этих векторов относительно невращающихся **n** и **b** определяется как фаза вращения. Отсчет фазы φ будем производить от направления бинормали **b** в сторону вращения для положительных частиц и от направления антибинормали (-**b)** — для отрицательных. При таком способе отсчета фазы соотношения между вращающимися и невращающимися векторами реперов выражаются следующим образом:

$$\mathbf{n}_{tr}=\mp\mathbf{b}\cos\varphi-\mathbf{n}\sin\varphi,\ \mathbf{e}_{\perp}=\mathbf{n}\cos\varphi\mp\mathbf{b}\sin\varphi\,, \tag{9}$$

где верхние знаки перед вектором **b** относятся к положительным, а нижние — к отрицательным частицам.

Если подставить теперь (9) в (7), то после несложных преобразований можно получить следующую систему уравнеий, которая потребуется нам ниже:

$$\frac{d\mathbf{h}}{ds}=\frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}}\frac{d\mu}{ds}(\mathbf{n}\cos\varphi-\mathbf{b}\sin\varphi)-\chi_m\ (\mathbf{n}\sin\varphi\ \pm\mathbf{b}\ \mathbf{cos}\varphi)\,,$$

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds}=-\frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}}\frac{d\mu}{ds}\mathbf{h}\cos\varphi+\chi_m\mathbf{h}\sin\varphi\pm\frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}\chi_m\mathbf{b}\,, \tag{10}$$

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds}=\pm\frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}}\frac{d\mu}{ds}\mathbf{h}\sin\varphi-\chi_m\mathbf{h}\cos\varphi+\frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}\chi_m\mathbf{n}\,,$$

где верхний знак относится к положительным, нижний — к отрицательным частицам.

Кроме параметра s — длины вдоль траектории частицы, введем параметр l — длину вдоль силовой линии магниттного поля, дифференциальный элемент которого dl связан с элементом ds соотношением $dl = V_{\|}dt/C_{St} = \mu\ ds$. При изменении s изменяется как l, так и φ. Поэтому переход от параметра s к параметру l предполагает, что величины **h, n, b,** а также μ зависят от переменных l и φ как от координат частицы. Производная d/ds при этом переходе преобразуется в форму

$$\frac{d}{ds} = \frac{d\varphi}{ds}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{dl}{ds}\frac{\partial}{\partial l}; \ \frac{d\varphi}{ds} = \frac{C_{St}\Omega}{V}, \ \frac{dl}{ds} = \mu . \tag{11}$$

При фиксированном значении φ частица находится на некоторой силовой линии магнитного диполя, для которой уравнения Френе–Серре записываются как для плоской кривой в следующем виде:

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial l} = K\,\mathbf{n}, \ \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial l} = -K\,\mathbf{h}, \ \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial l} = 0, \tag{12}$$

где K — кривизна этой силовой линии, равная $K = \dfrac{3\sin\theta(1+\cos^2\theta)}{r\,(1+3\cos^2\theta)^{3/2}}$, а r и θ — координаты частицы в полярной системе координат с началом в центре диполя, причем расстояние r выражается здесь для упрощения формы записи в единицах длины Штермера C_{st}.

Используя соотношения (9) и (11)-(12), из первого уравнения системы (8) после несложных преобразований мы получаем выражения для $d\mathbf{h}/ds$, $\partial\mathbf{h}/\partial\varphi$, определяем величины χ_m, k_m, и наконец, находим кручение траектории частицы в магнитном диполе:

$$\frac{d\mathbf{h}}{ds} = \mu\,K\,n + \frac{C_{St}\Omega}{V}\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial\varphi}, \tag{13}$$

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial\varphi} = (n\cdot\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial\varphi})n + (b\cdot\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial\varphi})b = \pm\left|\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial\varphi}\right|e_\perp \tag{14}$$

$$\chi_m = (n_{tr}\cdot\frac{d\mathbf{h}}{ds}) = -\mu\,K\sin\varphi, \quad k_m = \frac{C_{St}\Omega}{V} + \frac{\mu^2}{\sqrt{1-\mu^2}}\,K\sin\varphi, \tag{15}$$

$$\chi_{tr} = \frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}(k_{tr} + K\sin\varphi). \tag{16}$$

В правой части (14) знак плюс и минус относятся соответственно к случаям расходящихся и сходящихся силовых линий магнитного поля.

Из (16) следует, что роль кривизны магнитного поля в поведении частицы, которая характеризуется параметром кручения ее траектории, возрастает при $\mu^2 \to 1$. При этом увеличивается и зависимость этого параметра от фазы φ. Наиболее ясное представление об этом явлении можно получить, обратившись к понятию вектора Дарбу [3]. Трехгранник Френе $\{\mathbf{v}, \mathbf{n_{tr}}, \mathbf{b_{tr}}\}$ вращается как твердое тело вокруг мгновенной оси, направление которой определяется вектором Дарбу $\mathbf{\Omega}_D$. В нашем случае он равен

$$\mathbf{\Omega}_D = |k_{tr}|\,\mathbf{b_{tr}} - \chi_{tr}\,\mathbf{v} = -k_m\,\mathbf{h} + \chi_m\cdot(\mathbf{n}\cos\varphi \mp \mathbf{b}\sin\varphi), \tag{17}$$

где k_m и χ_m определяются соотношениями (15). Угловая скорость вращения трехгранника Френе определяется модулем вектора Дарбу $|\,\mathbf{\Omega}_D\,|$ и численно равна полной кривизне траектории. В обычных единицах измерения эта угловая скорость, которую назовем частотой Дарбу и обозначим как ω_D, равна

$$\omega_D = \frac{V}{C_{St}} |\Omega_D| = \frac{V}{C_{St}} \sqrt{k_{tr}^2 + \chi_{tr}^2} = \frac{V}{C_{St}} \sqrt{k_m^2 + \chi_m^2} = \Omega \sqrt{1-\mu^2 + \mu^2 (1+\frac{\sin\varphi}{\sqrt{1-\mu^2}}\frac{\rho_L}{R_l})^2}, \quad (18)$$

где $\rho_L = V/\Omega$ - радиус Лармора, $R_l = C_{St}/K$ - радиус кривизны силовой линии магнитного поля в точке местонахождения частицы. Из (18) мы видим, что частота Дарбу отличается от частоты Лармора тем больше, чем меньше питч-угол частицы. Физический интерес представляет средний квадрат частоты Дарбу $<\omega_D^2>$, который мы определим с помощью усреднения по фазе φ. После усреднения получим

$$<\omega_D^2> = <\Omega^2> (1+ \frac{\langle\mu^2\rangle}{1-\langle\mu^2\rangle}\frac{\langle\rho_L^2\rangle}{2\langle R_l^2\rangle}), \quad (19)$$

где угловые скобки обозначают усредненные значения величин за период вращения частицы. Из формулы (19) следует, что средний квадрат частоты Дарбу может существенно превышать квадрат частоты Лармора при $<\mu^2> \to 1$. Таким образом, торсионный эффект (torsion - кручение) может оказывать заметное влияние на физические процессы при распространении частиц вдоль искривленных силовых линий магнитного поля. Торсионный эффект тем больше, чем больше кривизна поля и выше скорость частиц. Этот эффект, в частности, может проявляться при синхротронном излучении релятивистских электронов, выбрасываемых вдоль магнитного поля из зон повышенных продольных градиентов этого поля. Такие ситуации характерны для многих астрофизических объектов, таких как пульсары, корона Солнца, магнитосферы планет и др. Отметим, что кривизну поля могут повышать и различные магнито-гидродинамические волны и неоднородности, обычные для реальной плазмы этих объектов.

3. Траектория ведущего центра частицы в магнитном диполе

В криволинейном магнитном поле частица может двигаться или в режиме гировращения или в режиме медленного изменения фазы, близком к центральной траектории Штермера [2]. В данной работе мы рассмотрим режим гировращения, подходящий для использования дрейфовой теории [1, 4 - 6].

Чтобы записать уравнения Френе–Серре для траектории ведущего центра рассмотрим более подробно процедуру усреднения по фазе циклотронного вращения частицы, исходя из нижеследующих достаточно очевидных соображений.

В течение одного оборота частицы по ларморовой орбите направления векторов **h, n, b** на этой орбите изменяются около своих средних значений, которые приблеженно соответствуют векторам репера $\{\mathbf{h}_d , \mathbf{n}_d , \mathbf{b}_d\}$ для ведущей силовой линии $r = \sin^2\theta/(2\gamma)$, γ — постоянная интегрирования Штермера. Для захваченных диполем частиц $\gamma > 1$. Такая силовая линия определяет дрейфовую оболочку, по которой происходит азимутальный дрейф частиц. Линейная азимутальная скорость дрейфа u_d в поле магнитного диполя равна [1, 4 - 6]

$$u_d = \frac{q}{|q|}\frac{VL^2}{a_0\Omega_0}\frac{1+\langle\mu^2\rangle}{2}\frac{(1+\cos^2\theta)\sin^5\theta}{(1+3\cos^2\theta)^2}, \quad (20)$$

где q - заряд частицы, L - параметр Мак-Илвайна, определяющий дрейфовую оболочку. Используя постоянную Штермера можно записать $VL^2/a_0\Omega_0 = 1/(2\gamma)^2$.

Аналогично определению Штермера [8] меридианальной E-плоскости, которая вращается вокруг оси диполя вместе с частицей, определим среднюю дрейфовую E_d-плоскость, которая вращается вокруг оси диполя вместе с центром ларморовой окружности этой частицы. В проекции на E_d-плоскость траектория ведущего центра приближённо повторяет форму ведущей силовой линии. Такое представление о траектории ведущего центра частицы является одним из основных результатов дрейфовой теории для магнитного поля диполя [1]. Отметим, что здесь мы пренебрегаем "радиальным" дрейфом частицы, направленным перпендикулярно к дрейфовой оболочке и обусловленным ускорением du_d/dt. По порядку величины скорость радиального дрейфа составляет $2\gamma(a_0/C_{St})^3\,|u_d|$ и пренебрежимо мала по сравнению с u_d, так как $a_0/C_{St} << 1$.

Представляет интерес рассмотреть пространственную кривую траектории ведущего центра в неподвижной системе координат и определить параметры кривизны и кручения этой траектории. Для этого мы усредним по фазе φ полученные в предыдущем пункте уравнения (10), а затем используем результат усреднения для записи уравнений Френе-Серре траектории ведущего центра. Усреднённые величины векторов **h, n, b,** а также среднее значение величины $v_\perp=\sqrt{1-\mu^2}$ зависят от координат центра ларморовой окружности, находящегося на E_d-плоскости. При усреднении (10) мы воспользуемся выражениями для $d\mu/ds$ и $\langle v_\perp\rangle$, полученными при решении аналогичной задачи в работе [7]:

$$\frac{d\mu}{ds} = K\, ctg\theta \left\{ \frac{1+3\cos^2\theta}{1+\cos^2\theta} \left[(1-\langle\mu^2\rangle)\sin^2\varphi + u_d^2\cos^2\varphi - 2u_d\sqrt{1-\langle\mu^2\rangle - u_d^2}\,\sin\varphi \right] + \right.$$
$$\left. + 2(1-\langle\mu^2\rangle - u_d^2)\cos^2\varphi + \mu\sqrt{1-\langle\mu^2\rangle - u_d^2}\, tg\theta\cos\varphi \right\}, \tag{21}$$

$$\langle v_\perp \rangle = \sqrt{1-\langle\mu^2\rangle - u_d^2}\,. \tag{22}$$

Заменяя в (10) величину $\sqrt{1-\mu^2}$ её средним значением по (22) и используя (21) и соотношения (11,13-16), получим в результате усреднения системы (10)

$$\frac{d\langle\mathbf{h}\rangle}{ds} = K\,\mathbf{n_d} + K\, ctg\theta\,\frac{1+3\cos^2\theta}{1+\cos^2\theta}\,u_d\mathbf{b}_d\,,$$
$$\frac{d\langle\mathbf{n}\rangle}{ds} = -K\,\mathbf{h_d}\,, \tag{23}$$
$$\frac{d\langle\mathbf{b}\rangle}{ds} = -K\, ctg\theta\,\frac{1+3\cos^2\theta}{1+\cos^2\theta}\,u_d\mathbf{h}_d\,.$$

Определим также средние величины для вектора Дарбу и скорости частицы. Средний за гиропериод вектор Дарбу указывает среднее направление оси, вокруг которой вращается трёхгранник Френе на траектории частицы. Усреднение (17) даёт

$$<\mathbf{\Omega}_D> = \frac{C_{St}\Omega}{V}\ \mathbf{h}_d \pm \frac{\langle\mu\rangle}{2} K\ \mathbf{b}_d. \tag{24}$$

Из формулы (24) следует важный вывод о том, что среднее направление оси, вокруг которой вращается частица в искривлённом магнитном поле, отклонена от касательной к силовой линии в направлении её бинормали или антибинормали, и величина этого отклонения пропорциональна локальной кривизне поля K.

Средняя скорость частицы определяет скорость ведущего центра и будет равна

$$<\mathbf{v}> = <\mu>\mathbf{h}_d + <\mathbf{v}_\perp> = <\mu>\mathbf{h}_d \pm |u_d|\ \mathbf{b}_d. \tag{25}$$

В (24)-(25) верхние знаки относятся к положительным, а нижние - к отрицательным частицам.

Единичный вектор $\mathbf{v}_c$, касательный к траектории центра ларморовской окружности, находим из (25):

$$\mathbf{v}_c = \frac{\langle\mu\rangle\mathbf{h}_d + u_d\mathbf{b}_d}{\sqrt{\langle\mu\rangle^2 + u_d^2}}, \tag{26}$$

Чтобы найти единичный вектор $\mathbf{n}_c$ в направлении главной нормали к траектории ведущего центра, запишем для неё первое уравнение Френе

$$\frac{d\mathbf{v}_c}{dl'} = k_c\ \mathbf{n}_c, \tag{27}$$

где k_c - кривизна траектории ведущего центра, dl' - элемент длины вдоль этой траектории, который выражается через элемент длины dl вдоль силовой линии соотношением

$$dl' = \frac{\sqrt{\langle\mu\rangle^2 + u_d^2}}{\langle\mu\rangle} dl\ . \tag{28}$$

Используя (28) и (23), находим

$$\frac{d\mathbf{v}_c}{dl'} = \frac{\langle\mu\rangle^2}{\langle\mu\rangle^2 + u_d^2} K\mathbf{n}_d + \frac{\langle\mu\rangle^2}{\langle\mu\rangle^2 + u_d^2} u_d K \operatorname{ctg}\theta \left[\frac{1+3\cos^2\theta}{1+\cos^2\theta} - \frac{3+5\cos^2\theta}{1+\cos^2\theta}\ \frac{1-\langle\mu\rangle^2}{2\langle\mu\rangle(\langle\mu\rangle^2+u_d^2)}\right] \mathbf{b}_d +$$

$$+ \frac{\langle\mu\rangle^2}{\langle\mu\rangle^2 + u_d^2} u_d^2\ K \operatorname{ctg}\theta \left[\frac{3+5\cos^2\theta}{1+\cos^2\theta}\ \frac{1-\langle\mu\rangle^2}{2\langle\mu\rangle(\langle\mu\rangle^2+u_d^2)} - \frac{1+3\cos^2\theta}{1+\cos^2\theta}\right] \mathbf{h}_d. \tag{29}$$

Рассмотрим два различных участка траектории ведущего центра: (1) — участок в окрестности точки отражения частицы, когда $<\mu>^2 << u_d^2$, т. е. при $<\mu>^2 \approx 0$, и участок (2) вдали от точек отражения, когда $<\mu>^2 >> u_d^2$. В первом случае ограничимся определением только кривизны и направления главной нормали траектории в точке отражения. Второй случай рассмотрим более подробно.

(1): При условии $\langle\mu\rangle^2 \ll u_d^2$, учитывая также, что обычно $u_d^2 \ll 1$, получим из (29)

$$\frac{d\mathbf{v}_c}{dl'} = \mp \frac{\langle\mu\rangle}{|u_d^3|} K\mathrm{ctg}\theta \frac{3+5\cos^2\theta}{2(1+\cos^2\theta)} \mathbf{b}_d + \frac{K}{u_d^2} \mathrm{ctg}\theta\left[\frac{3+5\cos^2\theta}{2(1+\cos^2\theta)} - \langle\mu\rangle u_d^2 \frac{1+3\cos^2\theta}{1+\cos^2\theta}\right] \mathbf{h}_d. \quad (30)$$

В самой точке отражения можно положить $\langle\mu\rangle = 0$. Тогда из (30) и (27) определяется значение кривизны k_{c*} в точке отражения $\theta = \theta_*$

$$k_{c*} = \frac{K_*}{2u_{d*}^2} |\mathrm{ctg}\theta_*| \frac{3+5\cos^2\theta_*}{1+\cos^2\theta_*}$$

и единичный вектор $\mathbf{n}_{c*}$ в направлении главной нормали к траектории ведущего центра в этой точке $\mathbf{n}_{c*} = \dfrac{\cos\theta_*}{|\cos\theta_*|} \mathbf{h}_{d*}$.

(2): На большем участке траектории ведущего центра выполняется условие $\langle\mu\rangle^2 \gg u_d^2$. Из (29) мы получаем при таком условии уравнение

$$\frac{d\mathbf{v}_c}{dl'} = K\mathbf{n}_d + u_d K\,\mathrm{ctg}\theta \left[\frac{1+3\cos^2\theta}{1+\cos^2\theta} - \frac{3+5\cos^2\theta}{1+\cos^2\theta} \frac{1-\langle\mu\rangle^2}{2\langle\mu\rangle\langle\mu\rangle^2}\right] \mathbf{b}_d +$$

$$+ \frac{u_d^2}{\langle\mu\rangle^2} K\,\mathrm{ctg}\theta \left[\frac{3+5\cos^2\theta}{1+\cos^2\theta} \frac{1-\langle\mu\rangle^2}{2\langle\mu\rangle^2} - \langle\mu\rangle \frac{1+3\cos^2\theta}{1+\cos^2\theta}\right] \mathbf{h}_d . \quad (31)$$

В достаточном удалении от экватора два последних члена в (31) пренебрежимо малы по сравнению с первым. Поэтому траектория ведущего центра здесь практически совпадают с силовой линией. Вблизи экватора, где необходимо учитывать величину скорости дрейфа, мы имеем при условии удалённости от точек отражения : $\langle\mu\rangle^2 \approx 1$. Тогда из уравнения (31) мы получаем

$$\frac{d\mathbf{v}_c}{dl'} = K\mathbf{n}_d + u_d K\,\mathrm{ctg}\theta \frac{1+3\cos^2\theta}{1+\cos^2\theta} \mathbf{b}_d - \langle\mu\rangle \frac{u_d^2}{\langle\mu\rangle^2} K\,\mathrm{ctg}\theta \frac{1+3\cos^2\theta}{1+\cos^2\theta} \mathbf{h}_d .$$

Пренебрегая величинами второго порядка малости по u_d , запишем выражения для кривизны $k_{c(e)}$ и единичного вектора нормали $\mathbf{n}_{c(e)}$ в экваториальной области

$$k_{c(e)} \approx K , \ \mathbf{n}_{c(e)} \approx \mathbf{n}_d + u_d\,\mathrm{ctg}\theta \frac{1+3\cos^2\theta}{1+\cos^2\theta} \mathbf{b}_d.$$

Вектор бинормали $\mathbf{b}_{c(e)}$ к траектории ведущего центра в этой области равен

$$\mathbf{b}_{c(e)} = [\mathbf{v}_{c(e)} \times \mathbf{n}_{c(e)}] \approx \frac{\langle\mu\rangle}{|\langle\mu\rangle|} \mathbf{b}_d - u_d \mathbf{h}_d - \frac{\langle\mu\rangle}{|\langle\mu\rangle|} u_d\,\mathrm{ctg}\theta \frac{1+3\cos^2\theta}{1+\cos^2\theta} \mathbf{n}_d .$$

Кручение $\chi_{c(e)}$ траектории ведущего центра в экваториальной области диполя определяется из соотношения

$$\chi_{c(e)} = (\mathbf{n}_{c(e)} \cdot \frac{d\mathbf{b}_{c(e)}}{dl'}) \approx - \frac{\langle \mu \rangle}{|\langle \mu \rangle|} u_d K (1 - |<\mu>| \frac{(1+3\cos^2\theta)(1+7\cos^2\theta)}{3\sin^2\theta(1+3\cos^2\theta)}).$$

Полная кривизна ведущего центра близка к K, а вектор Дарбу приближённо направлен по бинормали для прямой траектории (μ>0) и по антибинормали для обратной траектории (μ<0)

$$\mathbf{\Omega}_{Dc} \approx K \frac{\langle \mu \rangle}{|\langle \mu \rangle|} \mathbf{b_d} .$$

Это соответствует баунс-колебаниям частицы между точками отражения с частотой $\omega_{Dc} \approx VK_{(e)}/C_{St} = V/R_{l(e)}$.

4. Заключение

Кривизна и кручение определяют кривую с точностью до положения в пространстве. Знание этих фундаментальных характеристик для траекторий частиц содержит важную информацию о поведении частиц в магнитных полях различной конфигурации. В нашей работе мы нашли кривизну и кручение траектории частицы в поле магнитного диполя. Определён также вектор Дарбу и вычислена средняя частота вращения частицы - частота Дарбу. Особо следует отметить тот факт, что частота Дарбу может существенно превышать частоту Лармора при малых питч-углах частицы. Этот эффект, в частности, может вносить свой вклад в увеличение частоты максимума в спектре синхротронного излучения электронов.

Найденные параметры траекторий ведущего центра частицы соответствуют представлениям дрейфовой теории. В точках отражения кривизна такой траектории велика и быстро возрастает при уменьшении скорости дрейфа в полярных областях. В экваториальной области кривизна траектории ведущего центра близка к кривизне силовых линий магнитного поля, а кручение пропорционально скорости дрейфа. Частота баунс-колебаний соответствует частоте Дарбу ω_{Dc} для траектории ведущего центра и выражается через кривизну силовых линий в экваториальной области диполя : $\omega_{Dc} \sim K_{(e)}$.

Работа выполнена при поддержке INTAS грант вы00-0810.

1. Альфвен Г., Фельтхаммер К. Г. Космическая электродинамика. -М. : Мир, 1967. -260 с.
2. Ильин В. Д., Кузнецов С. Н., Юшков Б. Ю. Квазиадиабатическое движение энергичных частиц в дипольном магнитном поле. - 1992, Москва, Препринт НИИЯФ МГУ 92-23/272. - 15с.
3. Корн Г. , Корн Т. Справочник по математике. -М.: Наука, 1970. - 831 с.
4. Лихтенберг А. Динамика частиц в фазовом пространстве. -М.: Атомиздат, 1972. - 302 с.
5. Нортроп Т. Адиабатическая теория движения заряженных частиц.-М.: Атомиздат, 1967. -127 с.
6. Носов С. Ф. Дрейфовый гамильтониан и границы его применимости в дипольном магнитном поле. // Кинематика и физика небесных тел. - 1996. -**12**, N 5. -С. 55-62.
7. Носов С. Ф. О двух модах движения заряженной частицы в магнитном диполе//Кинематика и физика небесных тел. - 1999. - **15**, N 3. - С. 273 - 281.
8. Штёрмер К. Проблема полярных сияний. - М.-Л., 1933. - 110 с.