

и относительного сужения $\Delta\psi$ на 33.3 % под влиянием 0.01 % S при взаимодействии с марганцем;

— наибольшее влияние от каждого 0.01 % S при наличии 0.02 % Ti;

— повышение пластичности ψ на 30 % и снижение предела прочности σ_B на 50 % под влиянием серы при наличии марганца (рис. 2);

— оптимальное содержание серы равно 0.04 % S, которое обеспечивает стабильность механических свойств.

Полученные результаты позволяют расширить внедрение новых раскислителей-модификаторов-

микролигатур на металлургических заводах Украины взамен дефицитных и дорогостоящих материалов.

INFLUENCE OF MANGANESE AND SULPHURE IN STEEL 07YuT, TREATMENT BY TECHNOLOGICAL ADDITIVES FROM WASTES OF AEROSPACE INDUSTRY

O. M. Shapovalova, T. V. Nosova

The multicomponent system — steel 07YuT is investigated. The new facts of complex influence of sulphur, manganese and other elements on stress-strain features of steel for deep pulling are established. The optimum contents of sulphur in steel 07YuT is established.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ТРЕХСЛОЙНЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С ДИСКРЕТНЫМ НАПОЛНИТЕЛЕМ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ НАГРУЗКАХ

© С. Э. Штанцель

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України

В рамках геометрично нелінійної теорії оболонок і стержнів розглядаються рівняння руху тришарових сферичних оболонок з дискретним наповнювачем при осесиметричному нестационарному навантаженні. Побудовано чисельний алгоритм, який дозволяє ефективно досліджувати нестационарні хвильові процеси в дискретно-неоднорідних по товщині пружних структурах.

Дискретно-неоднородная по толщине упругая структура сферического типа представляет собой систему, которая состоит из внутренней и внешней гладких сферических оболочек (внутренняя и внешняя обшивки) с соответствующими толщинами и радиусами срединных поверхностей [1]. Оболочки жестко соединены между собой дискретными ребрами. Предполагается, что рассматриваемая трехслойная конструкция подвергается действию внутренней (или внешней) нестационарной распределенной нормальной нагрузки $P_3(s, t)$, где s, t — пространственная и временная координаты.

Математической моделью процесса динамического деформирования трехслойной упругой структуры с дискретным наполнителем является гиперболическая система нелинейных дифференциальных уравнений типа Тимошенко. При выводе уравнений движения рассматриваемой структуры используется вариант геометрически нелинейной теории тонких оболочек в квадратичном приближении [2]. Деформированное состояние внутренней и внешней

сплошных сферических оболочек определяется соответствующими составляющими обобщенных векторов перемещений $U_1 = (u_1^1, u_3^1, \varphi_1^1)^T$ и $U_2 = (u_1^2, u_3^2, \varphi_1^2)^T$. Внутренний наполнитель моделируется системой дискретных ребер. При этом полагается, что деформированное состояние j -го ребра определяется обобщенным вектором перемещения центра тяжести его поперечного сечения $U_j = (\{u_{1j}, u_{3j}, \varphi_{1j}\})^T$. Исходя из предположений жесткого соединения дискретных ребер со сферическими обшивками, записываются условия контакта центров тяжести ребер с обшивками

$$u_{1j} = u_1^i(s_j) \pm h_j \varphi_1^i(s_j), \quad (1)$$

$$u_{3j} = u_3^i(s_j),$$

$$\varphi_{1j} = \varphi_1^i(s_j),$$

$$i = 1, 2; \quad j = 1, \dots, J;$$

где s_j — координата линии сопряжения центра

тяжести поперечного сечения j -го ребра с соответственной срединной поверхностью; $h_j^i = 0.5h_i + H_j$, h_i ($i = 1, 2$) — толщины сферических внутренней и внешней оболочек; H_j — расстояние от оси j -го ребра до поверхностей гладких оболочек.

Для вывода уравнений колебаний трехслойной неоднородной по толщине структуры используется вариационный принцип стационарности Гамильтона — Остроградского:

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta(\Pi - K) - \delta A] dt = 0, \quad (2)$$

где Π — потенциальная энергия упругой системы; K — кинетическая энергия; A — работа внешних сил.

Выражения для величин $\delta\Pi$ и δK записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta\Pi &= \sum_{i=1}^2 \delta\Pi_{0i} + \sum_{j=1}^J \delta\Pi_j; \\ \delta K &= \sum_{i=1}^2 \delta K_{0i} + \sum_{j=1}^J \delta K_j; \\ \delta\Pi_{0i} &= \int_{s_i} (T_{11}^i \delta\varepsilon_{11}^i + T_{22}^i \delta\varepsilon_{22}^i + \\ &+ T_{13}^i \delta\varepsilon_{13}^i + M_{11}^i \delta\kappa_{11}^i + M_{22}^i \delta\kappa_{22}^i) ds_i; \\ \delta\Pi_j &= T_{22j} \delta\varepsilon_{22j}; \\ \delta K_{0i} &= \rho_i h_i \int_{s_i} \left[\left(\frac{\partial^2 u_1^i}{\partial t^2} \right) \delta u_1^i + \left(\frac{\partial^2 u_3^i}{\partial t^2} \right) \delta u_3^i + \right. \\ &+ \left. \frac{h_i^2}{12} \left(\frac{\partial^2 \varphi_1^i}{\partial t^2} \right) \delta \varphi_1^i \right] ds_i; \\ \delta K_j &= \rho_j F_j \left[\left(\frac{\partial^2 u_{1j}}{\partial t^2} \right) \delta u_{1j} + \left(\frac{\partial^2 u_{3j}}{\partial t^2} \right) \delta u_{3j} + \right. \\ &+ \left. \frac{I_{\kappa pj}}{F_j} \left(\frac{\partial^2 \varphi_{1j}}{\partial t^2} \right)^2 \delta \varphi_{1j} \right], \end{aligned} \quad (3)$$

где $s_i = \alpha_i R^i$, t — пространственная (для каждой обшивки) и временная координаты соответственно; R^i ($i = 1, 2$) — радиусы срединных поверхностей внутренней и внешней оболочек; ρ_i, ρ_j — плотности обшивок и ребра; $F_j, I_{\kappa pj}$ — геометрические параметры j -го ребра.

В соотношениях (3) выражения для усилий-моментов вводятся следующим образом:

$$\begin{aligned} T_{11}^i &= B_{11}^i (\varepsilon_{11}^i + \nu_2^i \varepsilon_{22}^i), \quad T_{22}^i = B_{11}^i (\varepsilon_{22}^i + \nu_1^i \varepsilon_{11}^i), \\ T_{13}^i &= B_{13}^i \varepsilon_{13}^i, \quad M_{11}^i = D_{11}^i (\kappa_{11}^i + \nu_2^i \kappa_{22}^i), \\ M_{22}^i &= D_{22}^i (\kappa_{22}^i + \nu_1^i \kappa_{11}^i), \quad T_{22j} = B_{22j} \varepsilon_{22j}, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^i &= \frac{\partial u_1^i}{\partial s_i} + \frac{1}{2} [\theta_1^i]^2 + \frac{u_3^i}{R^i}, \quad \varepsilon_{22}^i = \frac{u_1^i}{R^i} \operatorname{ctg} \alpha_1 + \frac{u_3^i}{R^i}, \\ \varepsilon_{13}^i &= \varphi_1^i + \theta_1^i, \quad \theta_1^i = \frac{\partial u_3^i}{\partial s_i} - \frac{u_1^i}{R^i}, \\ \kappa_{11}^i &= \frac{\partial \varphi_1^i}{\partial s_i}, \quad \kappa_{22}^i = \frac{\varphi_1^i}{R^i} \operatorname{ctg} \alpha_1, \quad \varepsilon_{22j} = \frac{u_{3j}}{R_j}, \\ B_{11}^i &= \frac{E_1^i h_i}{1 - \nu_1^i \nu_2^i}, \quad B_{22}^i = \frac{E_2^i h_i}{1 - \nu_1^i \nu_2^i}, \\ B_{13}^i &= G_{13} K_i^2, \quad D_{11}^i = \frac{E_1^i h_i^3}{12(1 - \nu_1^i \nu_2^i)}, \\ D_{11}^i &= \frac{E_2^i h_i^3}{12(1 - \nu_1^i \nu_2^i)}, \quad B_{22j} = E_j F_j. \end{aligned} \quad (5)$$

В соотношениях (4) величины $E_1^i, E_2^i, G_{13}^i, \nu_1^i, \nu_2^i, E_j$ суть физико-механические характеристики материалов обшивок и соответствующих ребер; K_i^2 — коэффициент поперечного сдвига в теории оболочек типа Тимошенко.

С учетом условий контакта (1) вариационное уравнение (2) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{J+1} \sum_{i=1}^2 \left\{ \left[\frac{1}{\sin \alpha_1} \frac{\partial}{\partial s_i} (\sin \alpha_1 T_{11}^i) - \frac{\operatorname{ctg} \alpha_1}{R^i} T_{22}^i + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\bar{T}_{13}^i}{R^i} - \rho_i h_i \frac{\partial^2 u_1^i}{\partial t^2} \right] \delta u_1^i + \right. \\ \left. + \left[\frac{1}{\sin \alpha_1} \frac{\partial}{\partial s_i} (\sin \alpha_1 \bar{T}_{13}^i) - \frac{T_{11}^i}{R^i} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{T_{22}^i}{R^i} + P_3^i - \rho_i h_i \frac{\partial^2 u_3^i}{\partial t^2} \right] \delta u_3^i + \right. \\ \left. + \left[\frac{1}{\sin \alpha_1} \frac{\partial}{\partial s_i} (\sin \alpha_1 M_{11}^i) - \frac{\operatorname{ctg} \alpha_1}{R^i} M_{22}^i - \right. \right. \\ \left. \left. - \rho_i \frac{h_i^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1^i}{\partial t^2} \right] \delta \varphi_1^i \right\} ds_{ij} + \\ + \sum_{j=1}^J \left\{ \left(\sum_{i=1}^2 T_{11}^{i\pm} - \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_{1j}}{\partial t^2} \right) \delta u_{1j} + \right. \\ \left. + \left(\sum_{i=1}^2 \bar{T}_{13}^{i\pm} - \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_{3j}}{\partial t^2} \right) \delta u_{3j} + \right. \\ \left. + \left[\sum_{i=1}^2 (M_{11}^{i\pm} \mp h_j T_{11}^{i\pm}) - \rho_j I_{\kappa pj} \frac{\partial^2 \varphi_{1j}}{\partial t^2} \right] \delta \varphi_{1j} \right\} \Big|_{\alpha_1 = \alpha_{1j}} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

В уравнениях (6) величины $T_{11}^{i\pm}$, $\bar{T}_{13}^{i\pm} = T_{11}^{i\pm} + \theta_{11}^{i\pm}$, $M_{11}^{i\pm}$ ($i = 1, 2$) соответствуют усилиям-моментам, которые действуют на j -й дискретный элемент на линии разрыва $\alpha_1 = \alpha_{1j}$.

Из уравнения (6) в силу произвольности вариаций δu_1^i , δu_3^i , $\delta \varphi_1^i$, δu_{1j} , δu_{3j} , $\delta \varphi_{1j}$ следуют уравнения движения трехслойной оболочки:

— в гладкой области между ребрами при $s_{ij} < s_i < s_{ij+1}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \alpha_1} \frac{\partial}{\partial s_i} (\sin \alpha_1 T_{11}^i) - \frac{\operatorname{ctg} \alpha_1}{R^i} T_{22}^i + \frac{\bar{T}_{13}^i}{R^i} &= \rho_i h_i \frac{\partial^2 u_1^i}{\partial t^2}, \\ \frac{1}{\sin \alpha_1} \frac{\partial}{\partial s_i} (\sin \alpha_1 \bar{T}_{13}^i) - \frac{T_{11}^i}{R^i} - \frac{T_{22}^i}{R^i} + P_3 &= \rho_i h_i \frac{\partial^2 u_3^i}{\partial t^2}, \\ \frac{1}{\sin \alpha_1} \frac{\partial}{\partial s_i} (\sin \alpha_1 M_{11}^i) - \frac{\operatorname{ctg} \alpha_1}{R^i} M_{22}^i - T_{13}^i &= \frac{\rho_i h_i^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1^i}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (7)$$

— на линии разрыва $\alpha_1 = \alpha_{1j}$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 T_{11}^{i\pm} &= \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_{1j}}{\partial t^2}, \\ \sum_{i=1}^2 \bar{T}_{13}^{i\pm} &= \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_{3j}}{\partial t^2}, \\ \sum_{i=1}^2 (M_{11}^{i\pm} \mp h_j T_{11}^{i\pm}) &= \rho_j I_{\kappa p j} \frac{\partial^2 \varphi_{1j}}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Уравнения движения (7), (8) дополняются соответствующими граничными и начальными условиями.

Численный алгоритм решения (7), (8) основан на конечно-разностной аппроксимации исходных уравнений с применением явной конечно-разностной схемы типа «крест» [3, 4]. Решение ищется в гладкой области (уравнения (7)) и склеиваются на линиях разрывов (уравнения (8)). При построении численного решения в гладкой области используется интегро-интерполяционный метод построения разностных уравнений [3]. При этом компоненты обобщенных векторов перемещений соотносят к целым точкам разностной сетки, а соответствующие величины деформаций и усилий к полужелым точкам. Разностные уравнения, которые аппроксимируют исходные уравнения (7), записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \alpha_{1k}} [(\sin \alpha_1 T_{11}^i)_{k-1/2}^n]_{s_i} - \\ - \frac{\operatorname{ctg} \alpha_{1k}}{R^i} (T_{22}^i)_k^n + \frac{1}{R^i} (\bar{T}_{13}^i)_k^n = \rho_i h_i [(u_1^i)_k^n]_{\bar{t}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \alpha_{1k}} [(\sin \alpha_1 \bar{T}_{13}^i)_{k-1/2}^n]_{s_i} - \\ - \frac{1}{R^i} [(T_{11}^i)_k^n + (T_{22}^i)_k^n] + P_{3k} = \rho_i h_i [(u_3^i)_k^n]_{\bar{t}}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \alpha_{1k}} [(\sin \alpha_1 M_{11}^i)_{k-1/2}^n]_{s_i} - \\ - \frac{\operatorname{ctg} \alpha_{1k}}{R^i} (M_{22}^i)_k^n - (T_{13}^i)_k^n = \rho_i \frac{h_i^3}{12} [(\varphi_1^i)_k^n]_{\bar{t}}. \end{aligned}$$

Разностные выражения для усилий-моментов и соответствующих деформаций имеют вид

$$\begin{aligned} (T_{11}^i)_{k\pm 1/2}^n &= B_{11}^i [(\varepsilon_{11}^i)_{k\pm 1/2}^n + \nu_2^i (\varepsilon_{22}^i)_{k\pm 1/2}^n], \\ (T_{22}^i)_{k\pm 1/2}^n &= B_{22}^i [(\varepsilon_{22}^i)_{k\pm 1/2}^n + \nu_1^i (\varepsilon_{11}^i)_{k\pm 1/2}^n], \\ (T_{13}^i)_{k\pm 1/2}^n &= B_{13}^i (\varepsilon_{11}^i)_{k\pm 1/2}^n, \\ (M_{11}^i)_{k\pm 1/2}^n &= D_{11}^i [(\kappa_{11}^i)_{k\pm 1/2}^n + \nu_2^i (\kappa_{22}^i)_{k\pm 1/2}^n], \\ (M_{22}^i)_{k\pm 1/2}^n &= D_{22}^i [(\kappa_{22}^i)_{k\pm 1/2}^n + \nu_1^i (\kappa_{11}^i)_{k\pm 1/2}^n], \\ (\bar{T}_{13}^i)_{k\pm 1/2}^n &= (T_{13}^i)_{k\pm 1/2}^n + (T_{11}^i \theta_1^i)_{k\pm 1/2}^n; \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} (\varepsilon_{11}^i)_{k\pm 1/2}^n &= [(u_1^i)_k^n]_{s_i} + \frac{1}{2} (\theta_1^i)_{k\pm 1/2}^n + \frac{(u_3^i)_k^n + (u_3^i)_{k+1}^n}{2 R^i}, \\ (\varepsilon_{22}^i)_{k\pm 1/2}^n &= \frac{(u_1^i)_k^n + (u_1^i)_{k+1}^n}{2 R^i} \operatorname{ctg} \alpha_{1k+1/2} + \frac{(u_3^i)_k^n + (u_3^i)_{k+1}^n}{2 R^i}, \\ (\theta_1^i)_{k\pm 1/2}^n &= [(u_3^i)_k^n]_{s_i} - \frac{(u_1^i)_k^n + (u_1^i)_{k+1}^n}{2 R^i}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$(\varepsilon_{13}^i)_{k\pm 1/2}^n = \frac{(\varphi_1^i)_k^n + (\varphi_1^i)_{k+1}^n}{2} + (\theta_1^i)_{k\pm 1/2}^n,$$

$$(\kappa_{11}^i)_{k\pm 1/2}^n = [(\varphi_1^i)_k^n]_{s_i},$$

$$(\kappa_{22}^i)_{k\pm 1/2}^n = \frac{(\varphi_1^i)_k^n + (\varphi_1^i)_{k+1}^n}{2 R^i} \operatorname{ctg} \alpha_{1k+1/2}.$$

В соотношениях (9)–(11) нижние индексы k , $k \pm 1/2$ соответствуют обозначениям разностной сетки по пространственной координате s_i ($i = 1, 2$), а верхние индексы n определяют временной слой. Обозначения разностных производных по пространственной и временной координатам в соотношениях (9), (11) введены согласно [3]. Соотношения для величин деформаций с индексом $k-1/2$ записываются аналогично формулам (11) с учетом сдвига на единицу.

Разностные соотношения на линиях разрывов

$\alpha = \alpha_j$ записываются следующим образом

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 (T_{11}^{i\pm})_j^n &= \rho_j F_j [(u_{1j})_j^n]_{\text{н}}, \\ \sum_{i=1}^2 (\bar{T}_{13}^{i\pm})_j^n &= \rho_j F_j [(u_{3j})_j^n]_{\text{н}}, \\ \sum_{i=1}^2 (M_{11}^{i\pm} \mp h_j T_{11}^{i\pm})_j^n &= \rho_j I_{\text{кр}j} [(\varphi_{1j})_j^n]_{\text{н}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Учитывая, что применяется явная конечно-разностная схема, при расчетах разностные шаги выбирались исходя из условия $\Delta t \leq K \Delta s / c_{11}$, где $c_{11}^2 = E_1 / [\rho(1 - \nu_1 \nu_2)]$, K — число Куранта. При расчетах полагалось $K = 0.3 \dots 0.5$, исходя из практической сходимости результатов.

В качестве числового примера рассматривалась задача динамического поведения трехслойной полусферической оболочки при внутреннем импульсном нагружении. Предполагалось, что один край оболочки при $\alpha_1 = \alpha_0$ свободен, а другой край оболочки при $\alpha_1 = \alpha_N$ жестко зашпелен. Граничные условия для свободного края при $\alpha_1 = \alpha_0$ имеют следующий вид

$$T_{11}^i = 0, \quad \bar{T}_{13}^i = 0, \quad M_{11}^i = 0, \quad i = 1, 2.$$

Для случая жесткого зашпеления при $\alpha_1 = \alpha_N$ полагалось

$$u_1^i = u_3^i = \varphi_1^i = 0, \quad i = 1, 2.$$

Нестационарная импульсная нагрузка задавалась в виде

$$P_3 = A \sin \frac{\pi t}{T} [\eta(t) - \eta(t - T)],$$

где A — амплитуда нагрузки, T — длительность нагрузки. В расчетах полагалось $A = 10^6$ Па, $T = 50 \cdot 10^{-6}$ с.

Расчет проводился при следующих геометрических и физико-механических параметрах:

$$\begin{aligned} E_1^1 &= E_1^2 = E_j = 7 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \\ \nu_1^1 &= \nu_1^2 = 0.3, \\ \rho_1 &= \rho_2 = \rho_j = 2.7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \\ R_1 &= 0.3 \text{ м}, \quad R_1/h_1 = 30, \\ h_1 &= h_2; \quad h_j = 2h, \\ F_j &= 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2, \\ \alpha_0 &= \pi/12; \quad \alpha_N = \pi/2. \end{aligned}$$

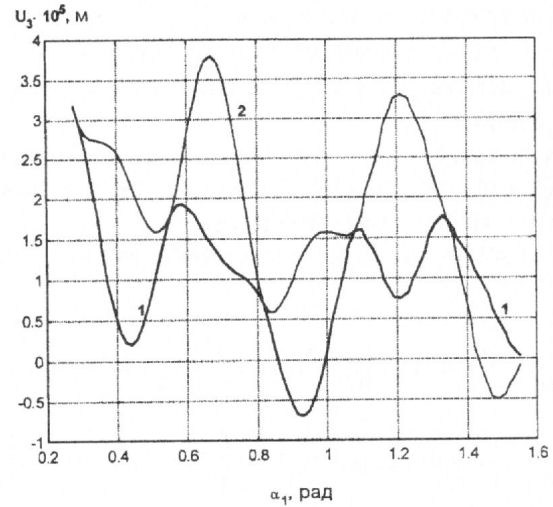


Рис. 1.

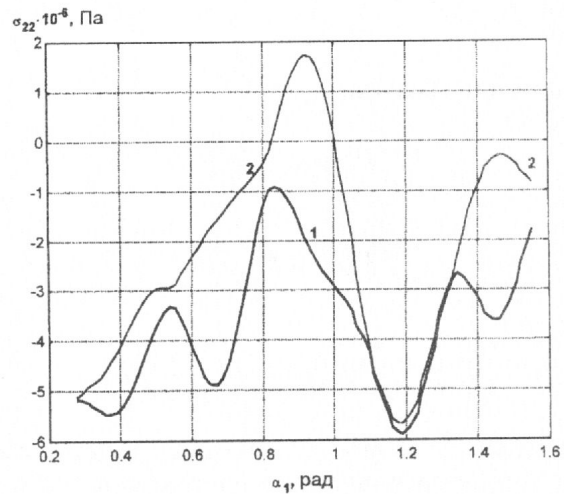


Рис. 2.

Дискретные подкрепляющие элементы располагались в точках

$$\alpha_j = [3 + (k - 1)16] \Delta \alpha, \quad k = 1, \dots, 5,$$

$$\Delta \alpha = (\alpha_N - \alpha_0)/80.$$

Полученные численные результаты позволяют проводить анализ напряженно-деформированного состояния трехслойной упругой структуры сферического типа в любой момент времени на временном интервале $0 \leq t \leq 40T$ (расчеты проводились при) согласно приведенной постановки задачи.

В частности, на рис. 1 и 2 приведены зависимости величин U_3 и σ_{22} от пространственной координаты α_1 . На рис. 1 кривая с индексом 1 соответствует величине U_3 внутренней сферической оболочки, кривая с индексом 2 соответствует величине U_3

внешней сферической оболочки в момент времени $t = 7T$. Точки соединения кривых 1 и 2 указывают на размещение дискретных ребер.

На рис. 2 приведены зависимости величин σ_{22} от пространственной координаты в момент времени $t = 10T$. Из представленного графического материала прослеживается влияние дискретного заполнителя на напряженно-деформированное состояние трехслойной структуры.

1. Мейш В. Ф., Штанцель С. Е. До побудови математичної моделі динамічного процесу вимушених коливань тришарових оболонок з дискретним наповнювачем // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур. — Львів. 2000.—1.—С. 81—83.
2. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости. — Л.—М.: Гостехиздат, 1948.—212 с.
3. Самарский А. А. Теория разностных схем. — М.: Наука,

1977.—656 с.

4. Луговой П. З., Мейш В. Ф. Численное моделирование динамического поведения подкрепленных оболочек вращения при нестационарном воздействии // Прикладная механика.—1992.—28, № 11.—С. 38—44.

NUMERICAL SIMULATION OF DYNAMICAL BEHAVIOUR OF THREE LAYERED SPHERICAL SHELLS WITH DISCRETE RIBBED FILLER UNDER NONSTATIONARY LOADING

S. E. Shtantsel'

Postulation and numerical solution algorithm for nonstationary behavior problem of three layers spherical shells with heterogeneous filler are considered. The system of nonlinear differential equations is based on the Timoshenko type theory of rods and shells. The Hamilton variation principle of stationary is used to obtain the motion equations. Numerical example is given.