Следует отметить, что схема разведения КА «Globalstar» чувствительна к возмущающим факторам, так как основана на малых разностях проекций скоростей отделения на орбитальную скорость. Поэтому при разработке схемы было создано программное обеспечение расчета вероятностных характеристик параметров взаимного движения объектов орбитальной группировки с учетом полной модели возмущений. Модель включает в себя 63 независимые случайные величины.

Методом статистического моделирования получено, что вероятность несоударения космических аппаратов орбитальной группировки равна 0.997.

Система отделения успешно прошла функциональные испытания. Несмотря на то, что провести отработку схемы в реальном полете не удалось из-за аварии на активном участке, методология, программное обеспечение и опыт, полученный в процессе разработок, позволяет создавать различные схемы группового выведения КА без применения дополнительных средств разведения.

ORBITAL MOTION PROJECT FOR GLOBALSTAR-SYSTEM SPACECRAFT GROUP LAUNCH

V. I. Ivanova, A. M. Ivanov

A principal lay-out of 12 Globalstar-system spacecrafts group launch by Zenit-2 Launch Vehicle without additional post-boost stage is described.

УДК 62-50

О ЧАСТИЧНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ОРИЕНТАЦИИ СПУТНИКА С ПОМОЩЬЮ ДВУХ УПРАВЛЯЮЩИХ МОМЕНТОВ

© А. Л. Зуев

21

Інститут прикладної математики і механіки НАН України, Донецьк

Досліджується задача стабілізації положення рівноваги відносно частини змінних для системи звичайних диференціальних рівнянь типу Ейлера — Пуассона, що описує рух супутника як абсолютно твердого тіла навколо його центра мас в обмеженій постановці. Розглянуто два випадки: керуючі моменти створюються реактивними двигунами орієнтації; керування реалізується за допомогою пари маховиків. Для розв'язання задачі про часткову стабілізацію доведена теорема, яка дозволяє побудувати керування зі зворотним зв'язком за допомогою функції Ляпунова системи з розімкнутим ланцюгом керування. На основі теореми отримано явний вираз функції зворотного зв'язку, яка вирішує задачу про одновісну стабілізацію. Проведено числове моделювання руху супутника при використанні запропонованого керування зі зворотним зв'язком.

1. ВВЕДЕНИЕ

Во многих задачах движение управляемого КА может быть описано системой обыкновенных дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i\, \mathbf{f}_i(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \qquad (1)$$

где $\mathbf{x} \in \Re^n$ — фазовый вектор системы, $\mathbf{u} \in \Re^m$ — вектор управления; предполагается, что точка $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ является положением равновесия системы (1) при отключенном управлении, $\mathbf{f}_0(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Хорошо известно, что если система (1) имеет интеграл, то ее положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ не может быть асимптотически стабилизировано по всем фазовым переменным. В таких случаях возможна лишь частичная стабилизация [4] — стабилизация положения равновесия по отношению к части фазовых переменных, малость которых обеспечивает нормальное функционирование объекта. Например, если система (1) описывает вращательное движение спутника с инерционными исполнительными органами, то в качестве стабилизируемых выбираются переменные, характеризующие угловую скорость и ориентацию тела-носителя (стабилизация по угловым скоростям реактивных маховых масс невозможна из-за наличия интеграла моментов).

В настоящей статье решается задача о частичной стабилизации спутника как абсолютно твердого тела, управляемого реактивными двигателями ориентации, а также задача для спутника, содержащего пару динамически симметричных маховиков.

2. ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Запишем вектор состояния системы (1) покомпонентно:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{y}, \mathbf{z}), \qquad \mathbf{y} \in \Re^{n_1}, \quad \mathbf{z} \in \Re^{n_2}, \qquad (n_1 + n_2 = n). \tag{2}$$

Введем стандартные обозначения:

$$|\mathbf{y}| = \left(\sum_{i=1}^{n_1} y_i^2\right)^{1/2}, \qquad |\mathbf{z}| = \left(\sum_{i=1}^{n_2} z_i^2\right)^{1/2},$$

$$|\mathbf{x}| = (|\mathbf{y}|^2 + |\mathbf{z}|^2)^{1/2}.$$

С учетом (2) система (1) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{f}_{01}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) + \sum_{i=1}^{m} u_i \mathbf{f}_{i1}(\mathbf{y}, \mathbf{z}), \\ \dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{f}_{02}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) + \sum_{i=1}^{m} u_i \mathbf{f}_{i2}(\mathbf{y}, \mathbf{z}), \end{aligned} \tag{3}$$

где функции $\mathbf{f}_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ предполагаются непрерывно дифференцируемыми в области D_H,

$$D_H = \left\{(\mathbf{y}, \mathbf{z}):\ |\mathbf{y}| < H = \text{const},\ \mathbf{z} \in \Re^{n_2}\right\}.$$

Всякое управление с обратной связью $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ при подстановке в (3) дает автономную систему следующего вида

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{f}_{01}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) + \sum_{i=1}^{m} u_i(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \mathbf{f}_{i1}(\mathbf{y}, \mathbf{z}), \\ \dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{f}_{02}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) + \sum_{i=1}^{m} u_i(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \mathbf{f}_{i2}(\mathbf{y}, \mathbf{z}). \end{aligned} \tag{4}$$

В качестве допустимых обратных связей для системы (3) будем рассматривать непрерывные в области D_H функции $\mathbf{u}(\mathbf{y}, \mathbf{z})$, $\mathbf{u}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$, которые удовлетворяют на всяком компакте из D_H условию Липшица ($\mathbf{u} \in \mathrm{Lip}_{loc} D_H$). Очевидно, что для всякой допустимой обратной связи система (4) имеет тривиальное решение $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ и удовлетворяет условиям существования и единственности решения задачи Коши в D_H.

Задача стабилизации системы (1) по переменным $\mathbf{y}$ состоит в построении такой допустимой обратной связи $\mathbf{u}(\mathbf{y}, \mathbf{z})$, для которой тривиальное решение соответствующей системы (4) становится асимптотически устойчивым по $\mathbf{y}$, т. е. для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что всякое решение $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$ системы (4) с начальными условиями $|\mathbf{x}_0| < \delta(\varepsilon)$ определено на $[0, +\infty)$ и удовлетворяет условиям

$$|\mathbf{y}(t; \mathbf{x}_0)| < \varepsilon, \qquad t \geq 0; \qquad \lim_{t \to +\infty} |\mathbf{y}(t; \mathbf{x}_0)| = 0.$$

Как показано в работе [6], систему (1) возможно стабилизировать по всем переменным тогда и только тогда, когда у нее существует управляемая функция Ляпунова, т. е. определенно-положительная функция $V(\mathbf{x})$, для которой нижняя граница ее производных в силу системы (1) является определенно-отрицательной функцией. В работе [2] предложен способ построения обратной связи для системы (1) с помощью управляемой функции Ляпунова по части переменных. Заметим, что если система не является линейной по управлению, то из существования управляемой функции Ляпунова не следует стабилизируемость с помощью непрерывной обратной связи. Этот факт вытекает из необходимого условия стабилизируемости — «условия Брокетта», имеющего место и в задачах стабилизации по части переменных [10].

На практике нахождение управляемой функции Ляпунова может оказаться затруднительным, в то время как функция $V(\mathbf{x})$ со знакопостоянной нижней границей производных в силу системы (1) может быть в ряде случаев построена из физических соображений (например, если система (1) консервативна при $\mathbf{u} = \mathbf{0}$). Этот факт обуславливает интерес к конструктивному определению обратной связи с помощью определенно-положительной функции $V(\mathbf{x})$, удовлетворяющей условию знакопостоянства производной:

$$\forall\, \mathbf{x} \in D_H\ \exists\, \mathbf{u} \in \Re^m:\ \nabla V(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \leq 0. \tag{5}$$

В работе [8] получены формулы для стабилизации системы (1) по всем переменным при условиях локальной управляемости системы в окрестности нуля и существования у системы (1) при $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ функции Ляпунова с отрицательно-постоянной производной. При этом достаточное условие локальной управляемости в терминах скобок Ли, использованное в работе [8], гарантирует выполнение условий теоремы Барбашина — Красовского на траектории системы с обратной связью.

Настоящая работа посвящена решению задачи стабилизации системы вида (1) по части переменных при условии, что известна функция, удовлетворяющая свойству (5).

Введем в рассмотрение класс K функций Хана, состоящий из всех непрерывных строго возрастающих функций a: $[0, +\infty) \to [0, +\infty)$, удовлетворяющих условию $a(0) = 0$. Пусть $V \in C^1(D_H)$. Вычислим производную от V в силу системы (1):

$$\dot{V} = a(\mathbf{x}) + \mathbf{u} \cdot \mathbf{b}(\mathbf{x}),$$

где скалярная функция $a(\mathbf{x})$ и компоненты вектор-функции $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ определяются выражениями

$$a(\mathbf{x}) = \nabla V(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}_0(\mathbf{x}), \quad b_i(\mathbf{x}) = \nabla V(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}_i(\mathbf{x}), \quad i = 1, ..., m. \tag{6}$$

Нетрудно видеть, что функция $V(\mathbf{x})$ удовлетворяет свойству (5) тогда и только тогда, когда при всех $\mathbf{x} \in D_H$ выполняется

$$|\mathbf{b}(\mathbf{x})| = 0 \Rightarrow a(\mathbf{x}) \le 0.$$

Докажем теорему о стабилизации системы (1) по переменным $\mathbf{y}$.

Теорема 1.

Пусть существует функция $V(\mathbf{x}) \in C^2(D_H)$, удовлетворяющая следующим условиям.

1) $\alpha_1(|\mathbf{y}|) \le V(\mathbf{x}) \le \alpha_2(|\mathbf{y}|), \quad \alpha_1, \alpha_2 \in K.$

2) Уравнение

$$a(\mathbf{x}) + \mathbf{u}^0(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{b}(\mathbf{x}) = 0$$

имеет решение $\mathbf{u}^0(x) \in \mathrm{Lip}_{loc} D_H$, для которого множество

$$M_1 = \{\mathbf{x}: |\mathbf{b}(\mathbf{x})| = 0, \qquad |\mathbf{y}| \ne 0\}$$

не содержит положительных полутраекторий системы (3) с $\mathbf{u} = \mathbf{u}^0(\mathbf{x})$.

3) Существует функция $h \in \mathrm{Lip}_{loc} D_H$, $h(\mathbf{x}) > 0$, такая что всякое решение системы (3) с обратной связью

$$u_i(\mathbf{x}) = u^{0i}(\mathbf{x}) - h(\mathbf{x}) b_i(\mathbf{x}), \quad i = 1, ..., m, \tag{7}$$

начинающееся в достаточно малой окрестности нуля, ограничено по переменным $\mathbf{z}$.

Тогда обратная связь (7) обеспечивает стабилизацию системы по переменным $\mathbf{y}$. (Функции $a(\mathbf{x})$, $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ определяются выражениями (6)).

Доказательство.

Вычислим производную функции V в силу системы (3) с обратной связью $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, определяемой выражением (7):

$$\dot{V} = -h |\mathbf{b}(\mathbf{x})|^2 \le 0.$$

Производная $\dot{V}$ обращается в нуль на множестве

$$M = \{x: |\mathbf{b}(\mathbf{x})| = 0\}.$$

Легко видеть, что $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^0(\mathbf{x})$ на множестве M. По условию 2) теоремы множество M не содержит положительных полутраекторий системы с обратной связью, за исключением траекторий с $\mathbf{y} = 0$. Условие 3) вместе с условием $\dot{V} \le 0$ гарантирует ограниченность по всем переменным для решений системы с обратной связью (7), которые начинаются в достаточно малой окрестности нуля. Таким образом, при использовании обратной связи (7) выполнены все условия теоремы Ризито — Румянцева [4, теорема 19.1] об асимптотической устойчивости тривиального решения системы (4) по переменным $\mathbf{y}$. Теорема доказана.

3. ОДНООСНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ СПУТНИКА С ПОМОЩЬЮ РЕАКТИВНЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ ОРИЕНТАЦИИ

Рассмотрим модельную задачу о движении твердого тела вокруг центра масс под действием реактивных управляющих моментов без учета изменения массы. Уравнения движения могут быть записаны в форме Эйлера — Пуассона:

$$\dot{\omega}_1 = \frac{A_2 - A_3}{A_1} \omega_2 \omega_3 + u_1, \quad \dot{\omega}_2 = \frac{A_3 - A_1}{A_2} \omega_1 \omega_3 + u_2, \quad \dot{\omega}_3 = \frac{A_1 - A_2}{A_3} \omega_1 \omega_2, \tag{8}$$

$$\dot{\nu}_1 = \omega_3 \nu_2 - \omega_2 \nu_3, \tag{9}$$

где ω_1, ω_2, ω_3 — проекции вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ на соответствующие главные оси инерции тела; ν_1, ν_2, ν_3 — проекции неподвижного орта $\boldsymbol{\nu}$ на соответствующие главные оси инерции; A_1, A_2, A_3 — главные центральные моменты инерции тела; u_1, u_2 — управляющие моменты.

Система (8), (9) при $u_1 = u_2 = 0$ допускает следующее частное решение:

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0, \quad \nu_1 = \nu_2 = 0, \quad \nu_3 = 1. \tag{10}$$

Решение (10) соответствует положению равновесия, при котором третья главная ось инерции тела направлена по вектору $\boldsymbol{\nu}$. Заметим, что решение (10) не может быть асимптотически стабилизировано по всем переменным, поскольку у системы (8), (9) существует геометрический интеграл:

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = \mathrm{const}.$$

Задача стабилизации решения (10) по переменным $\boldsymbol{\omega}$, ν_1, ν_2 решена в [1] для случая трехмерного вектора управления. Стабилизируемость решения $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ системы (8) без учета уравнений Пуассона (9) под действием одномерного управляющего момента изучена в [5] для случая динамически несимметричного тела, а также в [9] для тела с двумя одинаковыми главными моментами инерции. В работе [3] исследованы условия стабилизируемости равномерных вращений под действием одномерного вектора управления. Вопросы робастной стабилизации тривиального решения системы (8) под действием двумерного управляющего момента изучены в статье [7].

Применим сформулированные выше теоремы для стабилизации решения (10) системы (8), (9) по переменным

$$\omega_1\ ,\ \omega_2\ ,\ \nu_1\ ,\ \nu_2. \qquad (11)$$

Такой выбор переменных соответствует задаче об одноосной стабилизации твердого тела, т. е. проекции ν_1, ν_2 и их производные $\dot{\nu}_1$, $\dot{\nu}_2$ должны быть «малыми» и стремящимися к нулю при $t \to +\infty$, при этом остальные компоненты решения предполагаются ограниченными. Функцию $V(\mathbf{x})$ определим следующим образом:

$$V = \frac{1}{2}\,(A_1\omega_1^2 + A_2\omega_2^2) + \frac{1}{2}(\nu_1^2 + \nu_2^2).$$

Проведя непосредственные вычисления, будем иметь

$$\begin{aligned} a(\mathbf{x}) &= (A_2 - A_1)\omega_1\omega_2\omega_3 + \nu_3(\omega_1\nu_2 - \omega_2\nu_1), \\ b_1(\mathbf{x}) &= A_1\omega_1, \quad b_2(\mathbf{x}) = A_2\omega_2. \end{aligned} \qquad (12)$$

Разыскивая частное решение уравнения $a(\mathbf{x}) + \mathbf{u}^0\cdot \mathbf{b}(\mathbf{x}) = 0$, получим:

$$\begin{aligned} u_1^0(\mathbf{x}) &= \omega_2\omega_3 - \frac{1}{A_1}\,\nu_2\nu_3\ , \\ u_2^0(\mathbf{x}) &= -\omega_1\omega_3 + \frac{1}{A_2}\,\nu_1\nu_3. \end{aligned} \qquad (13)$$

Нетрудно проверить, что для достаточно близких к (10) начальных условий все целые траектории системы (8), (9) с управлением (13) удовлетворяют свойству $\nu_1 = \nu_2 = 0$ на множестве M_1:

$$A_1\omega_1 = A_2\omega_2 = 0,$$

т. е. выполнено второе условие теоремы 1. Все решения системы (8), (9) ограничены по переменным ν_i благодаря наличию геометрического интеграла. Остается проверить ограниченность решений по ω_3, для чего воспользуемся теоремой 39.1 из монографии [4]. Согласно этой теореме для ω_3-ограниченности решений достаточно, чтобы существовала определенно-положительная по ω_3 функция $W(\mathbf{x})$, которая не убывает на решениях замкнутой системы и удовлетворяет условию $W(\mathbf{x}) \to \infty$ при $|\omega_3| \to \infty$. В качестве такой функции выберем

$$W = \frac{1}{2}\,(A_1\omega_1^2 + A_2\omega_2^2 + A_3\omega_3^2) + \frac{1}{2}\,(\nu_1^2 + \nu_2^2).$$

Производная от $W(\mathbf{x})$ в силу системы (8), (9) с обратной связью вида (7) равна

$$\dot{W}(\mathbf{x}) = (A_1 - A_2)\omega_1\omega_2\omega_3 - h(\mathbf{x})(A_1^2\omega_1^2 + A_2^2\omega_2^2).$$

Согласно теореме об ограниченности решений для ω_3-ограниченности достаточно, чтобы выполнялось неравенство $\dot{W} \le 0$, т. е. чтобы функция $h(\mathbf{x}) > 0$ удовлетворяла следующему условию:

$$h(\mathbf{x})(A_1^2\omega_1^2 + A_2^2\omega_2^2) \ge (A_1 - A_2)\omega_1\omega_2\omega_3. \qquad (14)$$

Используя неравенство $2A_1A_2\omega_1\omega_2 \le A_1^2\omega_1^2 + A_2^2\omega_2^2$, убеждаемся в том, что для выполнения (14) достаточно положить

$$h(\mathbf{x}) = \left| \frac{A_1 - A_2}{2A_1A_2}\omega_3 \right| + \varepsilon, \qquad (15)$$

где ε — произвольное положительное число. Запишем выражение для обратной связи (7), принимая во внимание (12), (13), (15):

$$\begin{aligned} u_1 &= \omega_2\omega_3 - \frac{1}{A_1}\,\nu_2\nu_3 - \left\{ \frac{|A_1 - A_2|}{2A_2}\,|\omega_3| + \varepsilon A_1 \right\}\omega_1, \\ u_2 &= -\omega_1\omega_3 + \frac{1}{A_2}\,\nu_1\nu_3 - \left\{ \frac{|A_1 - A_2|}{2A_1}\,|\omega_3| + \varepsilon A_2 \right\}\omega_2 \end{aligned} \qquad (16)$$

$$(\varepsilon > 0).$$

Таким образом, с помощью теоремы 1 получена обратная связь (16), решающая задачу стабилизации режима (10) системы (8), (9) по отношению к переменным (11). Отметим, что поскольку $\dot{W} \le 0$, то решение (10) системы с обратной связью (16) неасимптотически устойчиво по переменным $\boldsymbol{\omega}$, ν_1, ν_2 в силу теоремы Румянцева [4, теорема 5.1].

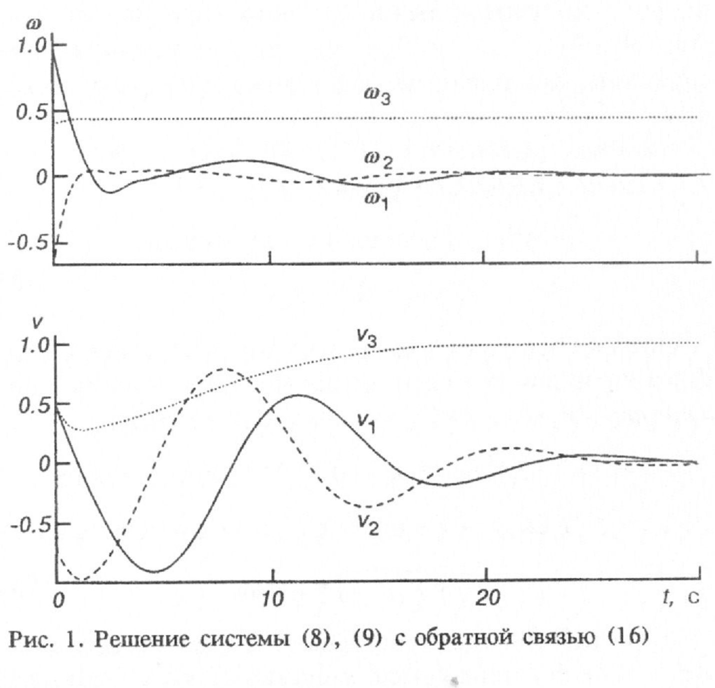

Рис. 1. Решение системы (8), (9) с обратной связью (16)

На рис. 1 показаны характерные зависимости фазовых переменных системы (8), (9) от времени при использовании закона управления с обратной связью (16), для значений параметров $A_2 = (3/2)A_1$, $A_3 = 2A_1$, $\varepsilon = 1$. Из рис. 1 видно, что с увеличением времени переменные (11) стремятся к нулю, при этом координата $\omega_3(t)$ стремится к некоторому предельному значению. Таким образом, предельными движениями спутника являются равномерные вращения вокруг неподвижного вектора ориентации $\boldsymbol{\nu}$, который направлен при таких движениях по третьей главной оси инерции.

4. ОДНООСНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ СПУТНИКА С ПОМОЩЬЮ ДВУХ МАХОВИКОВ

Динамические уравнения движения твердого тела, содержащего пару симметричных маховиков, могут быть записаны в следующем виде [1]:

$$\begin{gathered}(A_1 - I_1)\dot{\omega}_1 = (A_2 - A_3)\omega_2\omega_3 + I_2\Omega_2\omega_3 - u_1,\\ (A_2 - I_2)\dot{\omega}_2 = (A_3 - A_1)\omega_1\omega_3 - I_1\Omega_1\omega_3 - u_2,\\ A_3\dot{\omega}_3 = (A_1 - A_2)\omega_1\omega_2 + I_1\Omega_1\omega_2 - I_2\Omega_2\omega_1,\\ I_1(\dot{\Omega}_1 + \dot{\omega}_1) = u_1, \qquad I_2(\dot{\Omega}_2 + \dot{\omega}_2) = u_2, \end{gathered} \tag{17}$$

где ω_i — координаты вектора угловой скорости тела-носителя в главной системе координат; Ω_1, Ω_2 — относительные угловые скорости первого и второго маховика; A_i — главные моменты инерции всей системы, состоящей из тела-носителя и маховиков; I_1, I_2 — осевые моменты инерции первого и второго маховика соответственно (предполагается, что $A_1 > I_1$, $A_2 > I_2$); u_1, u_2 — управляющие моменты, приложенные к первому и второму маховику.

Система уравнений (17), (9) при $u_1 = u_2 = 0$ допускает положение равновесия:

$$\begin{gathered}\omega = 0, \quad \Omega_1 = \mathrm{const}, \quad \Omega_2 = \mathrm{const},\\ \nu_1 = \nu_2 = 0, \quad \nu_3 = 1.\end{gathered} \tag{18}$$

Положение равновесия (18) не может быть стабилизировано по всем фазовым переменным, поскольку система (17), (9) имеет интегралы

$$\begin{gathered}(A_1\omega_1 + I_1\Omega_1)^2 + (A_2\omega_2 + I_2\Omega_2)^2 + (A_3\omega_3)^2 = \mathrm{const},\\ (A_1\omega_1 + I_1\Omega_1)\nu_1 + (A_2\omega_2 + I_2\Omega_2)\nu_2 + A_3\omega_3\nu_3 = \mathrm{const},\\ \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = \mathrm{const}.\end{gathered} \tag{19}$$

Для стабилизации системы (17), (9) по переменным (11) воспользуемся теоремой 1 со следующей функцией:

$$2V(\mathbf{x}) = (A_1 - I_1)\omega_1^2 + (A_2 - I_2)\omega_2^2 + \nu_1^2 + \nu_2^2.$$

Вычисляя функции (6), будем иметь

$$\begin{gathered}a(\mathbf{x}) = (A_2 - A_1)\omega_1\omega_2\omega_3 +\\ + (I_2\Omega_2\omega_1 - I_1\Omega_1\omega_2)\omega_3 + (\omega_1\nu_2 - \omega_2\nu_1)\nu_3,\\ b_1(\mathbf{x}) = -\omega_1, \quad b_2(\mathbf{x}) = -\omega_2 .\end{gathered}$$

Обратная связь $\mathbf{u}^0(\mathbf{x})$ из условия теоремы 1 является решением следующего уравнения:

$$\begin{gathered}[(A_2\omega_2 + I_2\Omega_2)\omega_3 + \nu_2\nu_3 - u_1^0]\omega_1 -\\ - [(A_1\omega_1 + I_1\Omega_1)\omega_3 + \nu_1\nu_3 + u_2^0]\omega_2 = 0.\end{gathered} \tag{20}$$

Можно показать, что если в качестве решения уравнения (20) выбрать функцию

$$\begin{gathered}u_1^0 = \nu_2\nu_3 + (A_2\omega_2 + I_2\Omega_2)\omega_3,\\ u_2^0 = -\nu_1\nu_3 - (A_1\omega_1 + I_1\Omega_1)\omega_3,\end{gathered} \tag{21}$$

то множество

$$M_1 = \{(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\nu}) \in \Re^8 \colon \omega_1 = \omega_2 = 0, \nu_1^2 + \nu_2^2 \neq 0\}$$

не содержит целых полутраекторий системы (17), (9) с обратной связью (21) в достаточно малой окрестности (18).

Положим $h(\mathbf{x}) \equiv \varepsilon$ и покажем, что при любом $\varepsilon > 0$ соответствующая обратная связь

$$\begin{gathered}u_1 = \nu_2\nu_3 + (A_2\omega_2 + I_2\Omega_2)\omega_3 + \varepsilon\omega_1,\\ u_2 = -\nu_1\nu_3 - (A_1\omega_1 + I_1\Omega_1)\omega_3 + \varepsilon\omega_2\end{gathered} \tag{22}$$

удовлетворяет условию 3) теоремы 1. Действительно, ограниченность решений по переменным ω_3, Ω_1, Ω_2, ν_3 для системы (17), (9) с обратной связью (22) следует из существования интеграла модуля кинетического момента и геометрического интеграла (соответственно первое и третье выражение из (19)).

Итак, обратная связь (22) обеспечивает асимптотическую устойчивость положение равновесия (18) системы (17), (9) по переменным (11).

На рис. 2 показаны результаты численного интегрирования системы (17), (9) при использовании найденной обратной связи (22) для значений параметров

$$\begin{gathered}A_1 = A_2 = 2I_1, \quad A_3 = 3I_1,\\ I_2 = I_1, \quad \varepsilon = 1.\end{gathered}$$

Легко видеть, что на рис. 2 все стабилизируемые переменные (11) стремятся к нулю с увеличением времени, так что в пределе тело-носитель равно-

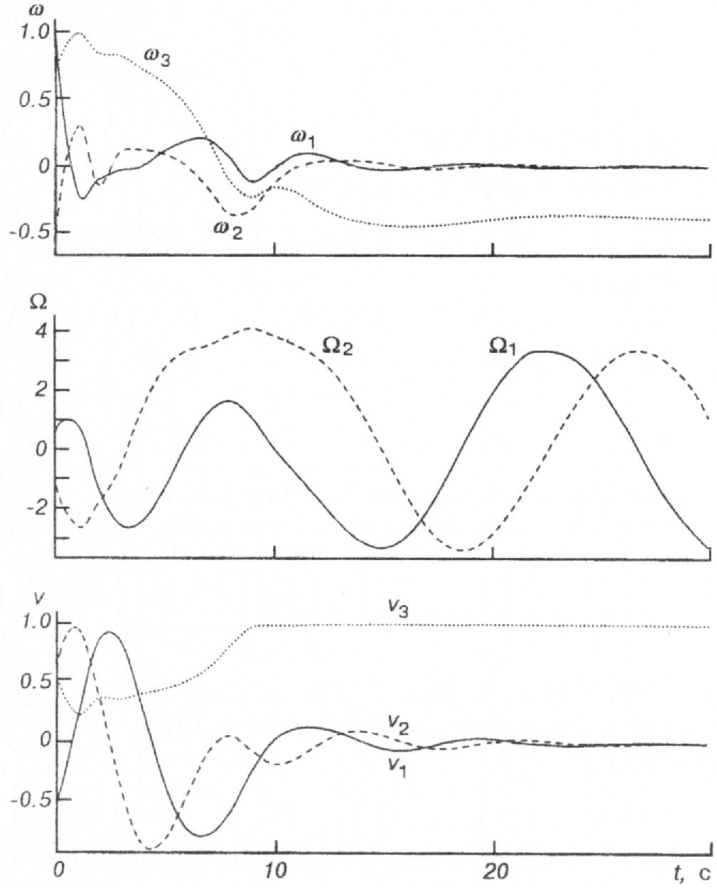

Рис. 2. Решение системы (17), (9) с обратной связью (22)

мерно вращается вокруг вектора ориентации $\boldsymbol{\nu}$. При этом ограниченные угловые скорости маховиков $\Omega_1(t)$, $\Omega_2(t)$ не имеют пределов при $t \to +\infty$.

1. *Зубов В. И.* Лекции по теории управления. — М.: Наука, 1975.—496 с.
2. *Зуев А. Л.* Построение стабилизирующей обратной связи с помощью управляемой функции Ляпунова относительно части переменных // Тр. Ин-та прикладной математики и механики НАН Украины.—1999.—**4**.—С. 70—76.
3. *Ковалев А. М., Исса Салем Абдалла* Стабилизация равномерных вращений твердого тела вокруг главной оси // Прикладная механика.—1992.—**28** (38), № 9.—С. 73—79.
4. *Румянцев В. В., Озиранер А. С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. — М.: Наука, 1987.—256 с.
5. *Aeyels D., Szafranski M.* Comments on the stabilizability of the angular velocity of a rigid body // Systems and Control Letters.—1988.—**10**.—P. 35—39.
6. *Artstein Z.* Stabilization with relaxed controls // Nonlinear Analysis, TMA.—1983.—**7**, N 11.—P. 1163—1173.
7. *Astolfi A., Rapaport A.* Robust stabilization of the angular velocity of a rigid body // Systems and Control Letters.—1998.—**34**.—P. 257—264.
8. *Jurdjevic V., Quinn J. P.* Controllability and stability // Journal of Differential Equations.—1978.—**28**.—P. 381—389.
9. *Sontag E. D., Sussmann H. J.* Further comments on the stabilizability of the angular velocity of a rigid body // Systems and Control Letters.—1989.—**12**.—P. 213—217.
10. *Zuiev A. L.* On Brockett's condition for smooth stabilization with respect to a part of the variables // Proc. European Control Conference ECC'99, Karlsruhe, Germany, 1999.

ON PARTIAL STABILIZATION OF SATELLITE ORIENTATION BY MEANS OF TWO CONTROL TORQUES

A. L. Zuyev

The problem of stabilization with respect to a part of the variables for the system of ordinary differential equations of Euler — Poisson type describing the motion of a satellite around its center of masse is investigated. Two cases are considered. In the first case the control is implemented by jet engines of orientation. In the second case the control is implemented with a help of a pair of flywheels. The theorem on partial stabilization is proved, which allows to design a feedback control by means of Lyapunov function of the open-loop system. The explicit expression of a feedback law solving the problem of single-axis stabilization is obtained with a help of the above theorem. The numerical simulation of motion is carried out for a satellite subjected to the proposed feedback law.