

УДК 621.396

Г. Л. Баранов¹, Д. В. Пясковский², С. В. Ковбасюк²

¹Державне підприємство Науково-дослідний інститут «Квант-Навігація» Мінпромполітики України, Київ

²Житомирський військовий інститут радіоелектроніки імені С. П. Корольова

Объединение информации в МП РЛК с использованием дифференциального спектра траектории движения КА

Запропоновано новий підхід до визначення та екстраполяції положення космічного апарата на орбіті в багатопозиційному радіолокаційному комплексі, що складається з РЛС з автономним прийманням, оснований на диференціальних тейлорівських перетвореннях. Отримано аналітичні залежності точніших характеристик.

Непрерывное повышение требований к объему и качеству радиолокационной информации, помехозащищенности и живучести радиолокационных средств вынуждает специалистов, наряду с поиском новых технических решений в создании основных технологических компонентов радиолокационных станций, развивать новые направления и методы радиолокации. Точность определения положения космического аппарата на орбите является одним из факторов, которые определяют эффективность космической инфраструктуры в целом. Так, ошибки расчетов координат элементов навигационной системы приведут к значительным погрешностям определения положения объектов на суше, воде и в воздухе. Важным также является точность прогноза положения КА на определенный момент времени, влияющая на оптимальное построение системы из нескольких аппаратов, расчет сеансов связи и т. д.

Информация о КА, полученная в результате наблюдения за объектом с помощью РЛС, может быть описана следующей схемой:

наблюдение = модель + ошибки измерений.

Таким образом, суммарные ошибки определения параметров орбиты КА складываются из ошибок описания модели движения объекта и ошибок измерения. Одним из перспективных направлений для уменьшения ошибок измерения является создание активного многопозиционного радиолокационного комплекса (МП РЛК) на базе РЛС с автономным приемом. Ошибки описания модели можно уменьшить с помощью использования операционного ме-

тода дифференциальных преобразований.

Целью статьи является рассмотрение нового подхода к уменьшению ошибок наблюдения за КА на основе дифференциальных преобразований при моделировании случайных процессов применительно к активному МП РЛК.

Основная идея многопозиционной радиолокации состоит в том, чтобы более эффективно (чем в обычных однопозиционных РЛС) использовать информацию, содержащуюся в пространственной структуре электромагнитного поля. Существенные результаты в развитии теории многопозиционной радиолокации получены в радионавигации, радиолокации, гидролокации и других областях.

Однако вопросы объединения и обработки радиолокационной информации в активном МП РЛК практически не освещались. Как правило, рассматриваются малобазовые пассивные (активно-пассивные) многопозиционные РЛС (МП РЛС). Методы получения координатной информации в такой системе требуют минимум две позиции для определения одного из параметров движения цели. При этом не используется ряд преимуществ активного МПРЛК, а именно:

- возможность определения координат объекта наблюдения (ОН) в цикле измерения каждой позицией;
- отдельные РЛС как составные части комплекса могут работать в различных частотных диапазонах;
- повышение точности измерительной информации за счет использования больших баз;

- отсутствие синхронизации между позициями с точностью до фазы несущего колебания, что существенно упрощает аппаратную часть;
- возможность повышения точности определения местоположения объекта наблюдения разными методами за счет избыточности радиолокационной информации.

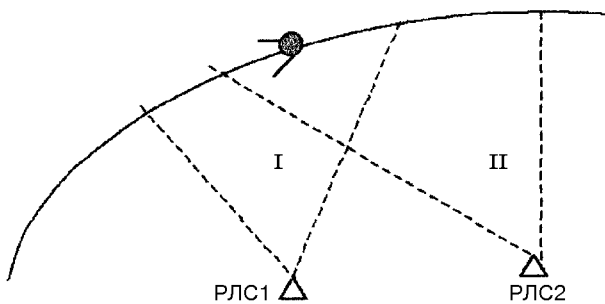


Схема сопровождения КА с помощью МП РЛК

Схематически вариант построения многопозиционного радиолокационного комплекса показан на рисунке, где изображены две РЛС, траектория полета КА и штриховыми линиями обозначены пространственные сектора наблюдения за объектом каждой из РЛС. Для объединения информации от нескольких автономных РЛС наиболее простым и лучшим с точки зрения результирующей точности является случай полного совпадения зон обзора, сложным и худшим — когда зоны обзора вообще не пересекаются.

Объединение данных в МП РЛК производится путем объединения информации либо на этапе единичных измерений, либо на этапе траекторных расчетов. Большое значение для этого имеет принятая модель движения КА. Векторное уравнение, которое описывает полет космического объекта (для простоты рассмотрим случай невозмущенного движения) можно представить в виде

$$\ddot{\vec{r}} + K_s \frac{\vec{r}}{r^3} = 0, \quad (1)$$

где \vec{r} — радиус-вектор, определяющий положение объекта в выбранной системе координат, K_s — постоянная поля земного тяготения (гравитационная постоянная Земли), равная $3.986 \cdot 10^{14} \text{ м}^3/\text{с}^2$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Традиционно для решения таких дифференциальных уравнений применяют приближенные численные методы, такие как методы Рунге—Кутты, многозначные методы [1]. Эти методы не позволя-

ют получить решение в аналитическом виде, а результат решения не всегда носит достоверный характер.

Эффективным подходом к решению проблемы решения дифференциальных уравнений является применение математического аппарата дифференциальных преобразований. Дифференциальные преобразования — новый операционный метод, который в отличие от известных интегральных преобразований Лапласа и Фурье, основан на переводе оригиналов в область изображений при помощи операции дифференцирования. При математическом моделировании физических объектов и процессов, описываемых дифференциальными и интегральными уравнениями, дифференциальные преобразования позволяют заменить операции интегрирования и дифференцирования эквивалентными алгебраическими операциями как в численном, так и в аналитическом виде.

Дифференциальными тейлоровскими преобразованиями называются функциональные преобразования вида [2, 4]

$$\underline{z}(t, V) = Z(K, V) = \frac{H^k}{K!} \left[\frac{d^k z(t, V)}{dt^k} \right]_{t=0}, \quad (2)$$

$$z(t, V) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t}{H} \right)^k Z(K, V), \quad (3)$$

где V — случайная величина, $Z(K, V)$ — дискретная функция целочисленного аргумента $K = 0, 1, 2, \dots$ и заданной случайной величины V , H — отрезок временного аргумента, на котором рассматривается функция $z(t, V)$; значение H должно быть меньше радиуса сходимости рядов Тейлора в окрестности точки $t = 0$.

Выражение (2) определяет прямое преобразование, позволяющее по оригиналу $z(t, V)$ найти изображение $Z(K, V)$. Черта снизу функции $z(t, V)$ в выражении (2) обозначает дифференциальное преобразование этой функции. Обратное преобразование, восстанавливающее оригинал $z(t, V)$ в виде ряда Тейлора с центром в точке $t = 0$, определяется выражением (3). Аналогично терминологии, принятой в [2, 4], дифференциальные изображения $Z(K, V)$ будем называть дифференциальным спектром, а значения функции $Z(K, V)$ при конкретных значениях аргумента $K = 0, 1, 2, \dots$ назовем дискретами дифференциального спектра.

В области изображений математическая модель случайного процесса, которым является измерение координат КА, представляется в виде дискретного дифференциального спектра, элементы которого являются случайными величинами [5]. Дифферен-

циальный спектр прямого преобразования выражения (1) имеет бесконечную длину. Для наглядности ограничимся первыми шестью дискретами, рассмотрим только координату x и примем $r = \text{const}$.

В этом случае система уравнений для координаты x запишется в виде

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = g, \quad \ddot{x} = \frac{dg}{dt} = -\frac{K_3 x}{r^3} \quad (4)$$

при начальных условиях $t = 0$, $x(0) = x_0 + v_1$, $g(0) = g_0 + v_2$. Независимые случайные величины v_1 , v_2 заданы математическими ожиданиями $m_{v_1} = M[v_1] = 0$; $m_{v_2} = M[v_2] = 0$ и дисперсиями $D_{v_1} = \sigma_{v_1}^2$, $D_{v_2} = \sigma_{v_2}^2$. Требуется построить дифференциальный спектр модели движения КА с принятыми ограничениями. В этом случае дискреты спектра (учитывая свойства дифференциально-тейлоровских преобразований [3]), полученные для системы (4), запишутся в виде

$$X(0) = x_0 + v_1; \quad X(1) = (g_0 + v_2)H;$$

$$X(2) = -\frac{K_3}{2!r^3} (x_0 + v_1)H^2;$$

$$X(3) = -\frac{K_3}{3!r^3} (g_0 + v_2)H^3;$$

$$X(4) = \frac{K_3^2}{4!r^6} (x_0 + v_1)H^4;$$

$$X(5) = \frac{K_3^2}{5!r^6} (g_0 + v_2)H^5;$$

$$G(0) = g_0 + v_2;$$

$$G(1) = -\frac{K_3}{r^3} (x_0 + v_1)H;$$

$$G(2) = -\frac{K_3}{2!r^3} (g_0 + v_2)H^2;$$

$$G(3) = \frac{K_3^2}{3!r^6} (x_0 + v_1)H^3;$$

$$G(4) = \frac{K_3^2}{4!r^6} (g_0 + v_2)H^4;$$

$$G(5) = -\frac{K_3^3}{5!r^9} (x_0 + v_1)H^5.$$

Произведя обратное дифференциальное преобразование спектра по выражению (3), получим восстановленный оригинал во временной области.

Начальные условия для построения дифференциального спектра движения КА определяются путем

обработки измерений на интервале сопровождения объекта с помощью РЛС одним из известных методов. Если они рассчитаны для разных РЛС в многопозиционном комплексе не на один момент времени (в случае малого пересечения или непересечения пространственных секторов сопровождения объекта), спектры, описывающие движение КА, будут смещены друг относительно друга. Смещенный дифференциальный спектр определяется выражением [3]

$$x(t \pm h) \Xi e^{\pm hD} X(K) = X(k) \pm (k+1) \frac{h}{H} X(k+1) + \frac{(k+2)!}{2!k!H^2} h^2 X(k+2) \pm \frac{(k+3)!}{3!k!H^3} h^3 X(k+3) + \dots$$

Для рассматриваемого случая движения КА смещенные спектры по положению и первой производной описываются выражениями

$$X(K)e^{\pm hD} = \left[1 - \frac{K_3}{2!r^3} (h+H)^2 + \frac{K_3^2}{4!r^6} (h+H)^4 \right] x_0 + \left[h+H - \frac{K_3}{3!r^3} (h+H)^3 + \frac{K_3^2}{5!r^6} (h+H)^5 \right] g_0$$

и

$$G(K)e^{\pm hD} = \left[-\frac{K_3}{r^3} (h+H) + \frac{K_3^2}{3!r^6} (h+H)^3 - \frac{K_3^3}{5!r^9} (h+H)^5 \right] x_0 + \left[1 - \frac{K_3}{2!r^3} (h+H)^2 + \frac{K_3^2}{4!r^6} (h+H)^4 \right] g_0.$$

Учитывая случайный характер определения начальных условий, определим точность расчета координаты и скорости объекта при восстановлении оригинала с использованием обратного дифференциального преобразования.

Предположим, что рассматривается одномерный случайный процесс $l(t, \omega)$, где ω — заданная случайная величина. По определению дисперсия случайной функции $l(t, \omega)$ вычисляется по выражению

$$D_l(t) = M[l^2(t, \omega)] - m_l^2(t). \quad (5)$$

Введем вспомогательную переменную

$$U(t, \omega) = l^2(t, \omega). \quad (6)$$

Выражение (5) с учетом (6) принимает вид

$$D_l(t) = M[U(t, \omega)] - m_l^2(t). \quad (7)$$

Переведем выражения (6), (7) в область изображений, применив дифференциальные преобразования (2):

$$D_1(K) = M[U(K, \omega)] - m_1(K) * m_1(K), \quad (8)$$

$$U(K, \omega) = L(K, \omega) * L(K, \omega) = \sum_{n=0}^{n=K} L(K-n, \omega) \cdot L(n, \omega), \quad (9)$$

$$M[U(K, \omega)] = m_u(K) = \int_{-\infty}^{\infty} U(k, \omega) \cdot p(\omega) d\omega, \quad (10)$$

$$m_1^2(K) = m_1(K) * m_1(K) = \sum_{n=0}^{n=K} m_1(K-n) \cdot m_1(n), \quad (11)$$

где «*» — символ операции умножения в области изображений, а черта снизу операции возведения в квадрат также обозначает выполнение этой операции в области изображений.

Выражения (8)–(11) позволяют определить дифференциальный спектр $D_1(K)$, моделирующий дисперсию $D_1(t)$ в области изображений. С целью восстановления дисперсии $D_1(t)$ во временной области по дифференциальному спектру $D_1(K)$ применим обратные дифференциальные преобразования вида (3)

$$D_1(t) = \sum_{K=0}^{\infty} \left(\frac{t}{H}\right)^K D_1(K). \quad (12)$$

Учитывая, что случайный процесс $l(t, \omega)$ рассматривается от $t_0 = 0$ и $H = t - t_0 = t$, выражение (12) преобразуется к виду

$$D_1(t) = \sum_{K=0}^{\infty} D_1(K), \quad (13)$$

где дифференциальный спектр $D_1(K)$ вычисляется по выражениям (8)–(11) на основании дифференциального спектра $L(K, \omega)$. Соотношение (13) дает простой алгоритм определения дисперсии $D_1(t)$ случайного процесса $l(t, \omega)$. Необходимо для каждой дискреты дифференциального спектра $L(K, \omega)$ найти дисперсию $D_1(K)$, и просуммировать дисперсии $D_1(K)$, $K = 0, 1, 2, \dots$ всех дискрет дифференциального спектра $X(K, \omega)$ при $H = t$.

Применив рассмотренную методику для случая смещения дифференциального спектра движения КА, получим

$$D_x(t + \Delta t) = \sigma_{v_1}^2 + \left[\sigma_{v_2}^2 - \frac{K_3}{r^3} \sigma_{v_1}^2 \right] (t + \Delta t)^2 + \left[\frac{K_3^2}{4r^6} \sigma_{v_1}^2 - \frac{K_3}{3r^3} \sigma_{v_2}^2 \right] (t + \Delta t)^4 + \frac{K_3^2}{3!3!r^6} \sigma_{v_2}^2 (t + \Delta t)^6, \quad (14)$$

$$D_g(t + \Delta t) = \sigma_{v_2}^2 - \left[\frac{K_3}{r^3} \sigma_{v_2}^2 - \frac{K_3^2}{r^6} \sigma_{v_1}^2 \right] (t + \Delta t)^2 + \left[\frac{K_3^2}{4r^6} \sigma_{v_2}^2 - \frac{K_3^3}{3!r^9} \sigma_{v_1}^2 \right] (t + \Delta t)^4 + \frac{K_3^4}{3!3!r^{12}} \sigma_{v_2}^2 (t + \Delta t)^6. \quad (15)$$

Если в выражениях (14), (15) принять $\Delta t = 0$, то выражения примут вид для частного случая определения дисперсий не сдвинутых спектров. Анализ выражений позволяет сделать вывод, что точность расчетов как сдвинутого, так и экстраполированного положения и скорости объекта зависят в большей степени от точности определения начальных условий по скорости.

Одним из известных вариантов объединения измеренных координат в МП РЛК, приведенных к единому временному моменту, является весовое усреднение данных по методу средневзвешенных. Процедура объединения дифференциальных спектров будет отличаться тем, что весовой обработке будут подвергаться не полученные измерения, а рассчитанные на их основе дискреты спектров, соответствующие математической модели полета космического объекта. Вес дискрет дифференциального спектра по положению и скорости пропорционален ошибкам измерения $\sigma_{v_1}^2$, $\sigma_{v_2}^2$ соответственно и интервалу временного сдвига спектра Δt . Рассмотрим случай, когда многопозиционный радиолокационный комплекс состоит из двух РЛС, и дискреты дифференциальных спектров равноточны. В этом случае начальные условия при $t = 0$ для первой и второй РЛС будут иметь вид соответственно

$$x(0) = x_0 + v'_1, \quad g(0) = g_0 + v'_2,$$

$$x(0) = x_0 + v''_1, \quad g(0) = g_0 + v''_2.$$

В случае равноточных измерений, получаемых обеими радиолокационными станциями, дисперсии определения положения и скорости будут равны

$$\sigma_{v'_1}^2 = \sigma_{v''_1}^2, \quad \sigma_{v'_2}^2 = \sigma_{v''_2}^2.$$

Дискреты для расчета дисперсии объединенной в МП РЛК информации по положению объекта будут иметь вид:

$$D_x(0) = \frac{\sigma_{v_1}^2}{2},$$

$$D_x(1) = 0,$$

$$D_x(2) = -\frac{K_3 \sigma_{v_1}^2}{2r^3} t^2 + \frac{\sigma_{v_2}^2}{2} t^2,$$

$$\begin{aligned}
 D_x(3) &= 0, \\
 D_x(4) &= -\frac{K_s^2 \sigma_{v_2}^2}{6r^3} t^4 + \frac{K_s^2 \sigma_{v_1}^2}{8r^6} t^4, \\
 D_x(5) &= 0, \\
 D_x(0) &= \frac{K_s^2 \sigma_{v_2}^2}{72r^6} t^6.
 \end{aligned}$$

Выражение для дисперсии является суммой всех дискрет:

$$\begin{aligned}
 D_x(t) &= \frac{\sigma_{v_1}^2}{2} + \left(\frac{\sigma_{v_2}^2}{2} - \frac{K_s^2 \sigma_{v_1}^2}{2r^3} \right) t^2 + \\
 &+ \left(\frac{K_s^2 \sigma_{v_1}^2}{8r^6} - \frac{K_s^2 \sigma_{v_2}^2}{6r^3} \right) t^4 + \frac{K_s^2 \sigma_{v_2}^2}{72r^6} t^6,
 \end{aligned}$$

В результате аналогичной процедуры для скорости объекта получаем:

$$\begin{aligned}
 D_g(t) &= \frac{\sigma_{v_2}^2}{2} - \left(\frac{K_s^2 \sigma_{v_2}^2}{4r^3} - \frac{K_s^2 \sigma_{v_1}^2}{2r^6} \right) t^2 + \\
 &+ \left(\frac{K_s^2 \sigma_{v_2}^2}{8r^6} - \frac{K_s^3 \sigma_{v_1}^2}{12r^9} \right) t^4 + \frac{K_s^4 \sigma_{v_1}^2}{72r^{12}} t^6.
 \end{aligned}$$

Таким образом, использование метода дифференциальных преобразований позволяет получить в аналитическом виде бесконечного ряда точное решение уравнения движения КА. Точность приближенной модели определяется количеством взятых

для рассмотрения дискрет дифференциального спектра. Объединение же информации в активном МП РЛК с использованием дифференциальных преобразований позволяет получить в аналитическом виде как результат объединения и экстраполяции данных с нескольких источников с учетом дифференциальной модели движения космического объекта, так и выражения для дисперсий ошибок расчетов.

1. Каханер Д., Моулер К., Нэш С. Численные методы и математическое обеспечение: Пер. с англ. — М.: Мир, 1998.—575 с.
2. Основы автоматического управления / Под ред. В. С. Пугачева. — М.: Наука, 1974.—720 с.
3. Пухов Г. Е. Дифференциальные преобразования и математическое моделирование физических процессов. — Киев: Наук. думка, 1986.—158 с.
4. Статистические методы в проектировании нелинейных систем автоматического управления / Под ред. Б. Г. Доступова. — М.: Машиностроение, 1979.—408 с.
5. Чернецкий В. И. Анализ точности нелинейных систем управления. — М.: Машиностроение, 1968.—246 с.

INFORMATION IN MULTIPOSITION RADAR COMPLEX BY USING DIFFERENTIAL SPECTRUM OF SPACECRAFT TRAJECTORY

G. L. Baranov, D. V. Piaskovs'kyi, S. V. Kovbasiuk

It is proposed a new approach to determination and extrapolation of the spacecraft position in orbit for multiposition radar complex, consisted of independent radar station based on the differential Taylor transformations. The analytical dependences of accuracy characteristics are obtained.