

УДК 621.396

Г. Л. Баранов¹, В. Л. Баранов¹, С. В. Ковбасюк²¹Державне підприємство Науково-дослідний інститут «Квант-Навігація» Мінпромполітики України, Київ²Житомирський військовий інститут радіоелектроніки імені С. П. Корольова

Статистические характеристики дифференциального спектра траектории движения КА

Розрахунок точності визначення положення космічного апарата на орбіті ґрунтується на диференціальних перетвореннях. Приведено результати моделювання.

Математическое моделирование динамических объектов, функционирующих в условиях воздействия случайных возмущений, широко используется в различных областях науки и техники. Современные исследования нелинейных систем оценивания и управления проводятся с обязательным моделированием случайных процессов, возникающих в результате действия случайных возмущений [5]. Эффективным подходом к решению проблемы моделирования случайных процессов в реальном и ускоренном времени является применение математического аппарата дифференциальных преобразований, с помощью которого в процессе моделирования в области изображений исключается временной аргумент. Достоинством метода дифференциальных преобразований является выполнение моделирования в аналитическом, численно-аналитическом и численном виде [2].

В данной работе предлагается подход к моделированию случайного процесса, каким является оценка движения космического аппарата (КА) в околоземном пространстве, и оценка его статистических характеристик. Предложенный подход позволяет на основе дифференциальных преобразований получать в области изображений точные модели случайных процессов в рамках корреляционной теории. Ограничим область исследования случайных процессов задачами анализа точности нелинейных систем оценивания и управления, сформулированными в [4, 5]. Математическая модель систем оценивания и управления описывается дифференциальными уравнениями относительно выходных координат. Математическое описание со-

ставляется из объективных законов взаимодействия системы управления и среды. Случайные отклонения и возмущения моделируются случайными величинами и случайными функциями.

Задача анализа точности систем оценивания и управления сводится к определению требуемых вероятностных характеристик некоторых функционалов от выходных координат исследуемой системы при заданных вероятностных характеристиках случайных отклонений и случайных величин, моделирующих случайные отклонения и возмущения, действующие на систему. Математическая модель случайных процессов в рамках сформулированной задачи содержит векторное дифференциальное уравнение

$$\frac{dy(t)}{dt} = f[t, y(t), x(t), V] \quad (1)$$

с начальными условиями при $t = 0$

$$y(0) = y_0,$$

где y — n -мерный вектор выходных координат моделируемой системы; x — v -мерная случайная функция времени, моделирующая случайные воздействия на систему; V — s -мерный вектор случайных величин, моделирующий случайные отклонения параметров моделируемой системы; y_0 — n -мерный вектор начальных условий, которые в общем случае являются случайными величинами.

В модели (1) заданы вероятностные характеристики случайной функции $x(t)$ и вектора начальных условий в виде моментов или законов распределения вероятностей.

Кроме модели (1) выбрана система функционалов от выходных координат

$$\Phi_l[t, y(t)], l = 1, 2, \dots, L. \quad (2)$$

Задаются также функции

$$\chi_l(\Phi), l = 1, 2, \dots, L, \quad (3)$$

определяющие форму вероятностных характеристик функционалов (характеристические функции).

В общей постановке задача формулируется следующим образом. По заданному дифференциальному уравнению (1) и заданным вероятностным характеристикам случайных функций $x(t)$ и случайных величин V определить математические ожидания

$$M[\chi_l(\Phi)], l = 1, 2, \dots, L. \quad (4)$$

Математические ожидания (4) в частных случаях функций (3) могут выражать, например, следующие вероятностные характеристики: математические ожидания выходных координат, их дисперсии; интегральные многомерные законы распределения выходных координат; математические ожидания, дисперсии и интегральные законы для некоторых функций от выходных координат; вероятность того, что некоторая функция от выходных координат будет в течение выбранного промежутка времени изменяться в заданной области. Математическая модель (1)—(4) является общей и довольно сложной. Эта модель может быть упрощена на основе известных преобразований [5]. Линейная замена переменных $z(t) = y(t) - y_0$ позволяет перейти от случайных начальных условий к нулевым случайным условиям. В работе [5] показано, что от случайных функций $x(t)$ можно перейти к детерминированным функциям от случайных величин, используя представления случайных функций в виде

$$x(t) = m_x(t) + \varphi(t, v_1, v_2, \dots, v_r), \quad (5)$$

где $m_x(t) = M[x(t)]$, $M[\varphi] = 0$; φ — некоторая детерминированная функция указанных аргументов; v_1, v_2, \dots, v_r — некоррелированные случайные величины, вероятностные характеристики которых определяются по заданным вероятностным характеристикам случайных функций $x(t)$.

В случае коррелированных случайных величин при помощи линейных преобразований переходят к системе некоррелированных нормированных случайных величин [5].

В результате проведенных преобразований (5) математическая модель (1)—(4) может быть представлена в более простом виде

$$\frac{dz}{dt} = F[t, z, v_1, v_2, \dots, v_m], \quad (6)$$

$$t = 0, \quad z(0) = 0,$$

где случайные величины v_1, v_2, \dots, v_m — некоррелированы и нормированы:

$$\begin{aligned} M[v_1] = M[v_2] = \dots = M[v_m] &= 0, \\ M[v_1^2] = M[v_2^2] = \dots = M[v_m^2] &= 1. \end{aligned} \quad (7)$$

Предполагается, что случайные величины v_1, v_2, \dots, v_m независимы, и для них заданы плотности распределения вероятностей

$$P_1(v_1), P_2(v_2), \dots, P_m(v_m). \quad (8)$$

На основе математической модели (6)—(8) задача анализа точности системы автоматического управления формулируется следующим образом. Необходимо определить математические ожидания

$$M\{\chi_l[\Phi_1(t, z(t))]\}, l = 1, 2, \dots, L, \quad (9)$$

если задано векторное дифференциальное уравнение (6), условия (7) и плотности распределения (8) независимых случайных величин v_1, v_2, \dots, v_m .

Уравнение (6) в векторной форме описывает систему обыкновенных стохастических дифференциальных уравнений. Случайные величины v_1, v_2, \dots, v_m можно рассматривать в качестве некоторых числовых параметров, так как они по определению не зависят от времени и в каждом конкретном опыте принимают определенные числовые значения. При каждой выборке значений случайных величин v_1, v_2, \dots, v_m уравнение (6) является обычным детерминированным векторным дифференциальным уравнением.

В дальнейшем воспользуемся результатами теоремы, доказанной в [5]. Совокупность компонентов z_1, z_2, \dots, z_n случайной функции $z(t, v_1, v_2, \dots, v_m)$, являющейся решением уравнения (6), можно представить в виде некоторых детерминированных функций времени и случайных величин v_1, v_2, \dots, v_m :

$$z_i = \psi_i(t, v_1, v_2, \dots, v_m), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (10)$$

причем функции ψ_i непрерывны относительно аргументов t, v_1, v_2, \dots, v_m , если правые части системы дифференциальных уравнений вида (6) непрерывны относительно параметров v_1, v_2, \dots, v_m и допускают лишь разрывы первого рода относительно аргумента t на множестве нулевой меры.

Из этой теоремы следует, что в классе решений z_i (10), допускающих дифференцирование по временному аргументу, возможно применение диффе-

ренциальных преобразований [1, 2], разработанных для детерминированных функций. Обозначим совокупность случайных величин v_1, v_2, \dots, v_m

$$V = (v_1, v_2, \dots, v_m). \quad (11)$$

Компоненты (10) решения уравнения (6) являются детерминированными функциями $z_i = \psi_i(t, V)$ времени и случайных величин, входящих в V . В каждой реализации случайного процесса величина V определяет согласно (11) заданный набор констант.

Прямые и обратные дифференциальные преобразования [1, 2] для детерминированных функций (10) с учетом обозначения (11) имеют вид

$$\underline{z}_i(t, V) = Z_i(K, V) = \frac{H_i^k}{K!} \left[\frac{d^k z_i(t, V)}{dt^k} \right]_{t=0}, \quad (12)$$

$$z_i(t, V) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t}{H_i} \right)^k Z_i(K, V), \quad (13)$$

где V — случайная величина (11), характеристики независимых компонентов которой заданы выражениями (7), (8); $Z_i(K, V)$ — дискретная функция целочисленного аргумента $K = 0, 1, 2, \dots$ и заданной случайной величины V ; H_i — отрезок временного аргумента, на котором рассматривается функция $z_i(t, V)$; значение H_i должно быть меньше радиуса сходимости рядов Тейлора в окрестности точки $t = 0$.

Выражение (12) определяет прямое преобразование, позволяющее по оригиналу $z_i(t, V)$ найти изображение $Z_i(K, V)$. Черта снизу функции $z_i(t, V)$ в выражении (12) обозначает дифференциальное преобразование этой функции.

Обратное преобразование, восстанавливающее оригинал $z_i(t, V)$ в виде ряда Тейлора с центром в точке $t = 0$, определяется выражением (13). Аналогично терминологии, принятой в [1, 2], дифференциальные изображения $Z_i(K, V)$ будем называть дифференциальным спектром, а значения функции $Z_i(K, V)$ при конкретных значениях аргумента $K = 0, 1, 2, \dots$ назовем дискретами дифференциального спектра.

Особенность дифференциальных преобразований (12) заключается в том, что в области изображений случайный процесс $z_i(t, V)$ представляется дифференциальным спектром, дискреты которого являются случайными величинами, определяемые заданным случайными величинами (11). Замена случайной функции $z_i(t, V)$ в области изображений случайной величиной $Z_i(K, V)$ существенно упрощает

моделирование случайных процессов в задаче анализа точности систем автоматического управления по математической модели (6)—(9).

Действительно, применим дифференциальные преобразования (12) к уравнению (6). В результате в области изображений получим математическую модель в форме рекуррентного выражения

$$Z_i(K + 1, V) = \frac{H_i}{K + 1} F_i [T(K), Z(K, V), V],$$

$$Z_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (14)$$

Математическую модель (14) случайного процесса в области изображений условимся называть Р-моделью в честь основателя дифференциальных преобразований Г. Е. Пухова [1, 2]. Присваивая последовательно целочисленные значения $K = 0, 1, 2, \dots$, по Р-модели (14) находим дифференциальный спектр $Z_i(K, V)$, $i = 1, \dots, n$ решения уравнения (6). На этом завершается первый этап решения задачи, заключающийся в моделировании дифференциального уравнения (6) в области изображений.

На втором этапе требуется определить математические ожидания (9). Учитывая, что решение уравнения (6) получено в форме дифференциального спектра $Z_i(K, V)$, переведем выражение (9) в область изображений, применив прямые дифференциальные преобразования (12). В результате получим математическую модель для определения требуемых вероятностных характеристик по дифференциальному спектру $Z(K, V)$

$$M\{\underline{\chi}_l [\underline{\Phi}_l(T(K), Z(K, V))]\}, \quad l = 1, \dots, L. \quad (15)$$

Вычисления по выражению (15) выполняются с учетом заданных характеристик (7), (8) случайных величин (11). Учитывая, что вычисления математических ожиданий по выражению (15) проводятся в области изображений, характеристики случайных функций получаются в форме дифференциальных спектров, которые необходимо перевести во временную область обратными преобразованиями вида (13) или способами, предложенными в [3].

В качестве примера выведем выражения для вычисления основных характеристик случайных процессов в рамках корреляционной теории. Предположим, что рассматривается одномерный случайный процесс $x(t, \omega)$, где ω — заданная случайная величина. В области изображений модель этого случайного процесса представляется дифференциальным спектром $X(K, \omega)$. Если выполнить обратное преобразование $X(K, \omega)$ во временную область согласно (13), то получим выражение

$$x(t, \omega) = \sum_{K=0}^{\infty} \left(\frac{t}{H}\right)^K X(K, \omega). \quad (16)$$

Найдем математическое ожидание случайного процесса $x(t, \omega)$, описываемого выражением (16)

$$m_x(t) = M[x(t, \omega)] = \sum_{K=0}^{\infty} \left(\frac{t}{H}\right)^K M[X(K, \omega)], \quad (17)$$

где

$$M[X(K, \omega)] = m_x(K) = \int_{-\infty}^{\infty} X(K, \omega) p(\omega) d\omega,$$

$p(\omega)$ — заданная плотность распределения вероятностей случайной величины ω .

Если случайный процесс $x(t, \omega)$ рассматривается от нулевого момента времени $t_0 = 0$, то $H = t - t_0 = t$, и выражение (17) упрощается:

$$m_x(t) = \sum_{K=0}^{\infty} m_x(K). \quad (18)$$

Из (18) следует, что математическое ожидание $m_x(t)$ случайного процесса $x(t, \omega)$ определяется суммой математических ожиданий $m_x(K)$ всех дискрет дифференциального спектра $X(K, \omega)$, $K = 0, 1, 2, \dots$ при $H = t$.

Корреляционная функция $R_x(t_1, t_2)$ случайного процесса $x(t, \omega)$ строится по двум дифференциальным спектрам $X(K, \omega)$. Согласно выражению (12) прямого дифференциального преобразования дискреты дифференциального спектра зависят от интервала $H = t - t_0$ представления функции $x(t, \omega)$. Выбираем два интервала времени $H_1 = t_1 - t_0$ и $H_2 = t_2 - t_0$. В случае рассмотрения случайного процесса $x(t, \omega)$ от $t_0 = 0$ эти интервалы времени принимают вид $H_1 = t_1$, $H_2 = t_2$.

Обозначим дифференциальный спектр $X(K, \omega)$, полученный при $H_1 = t_1$, через $X(K, t_1, \omega)$, а при $H_2 = t_2$ представим его в виде спектра $X(K, t_2, \omega)$. Определим математические ожидания дискрет этих двух дифференциальных спектров

$$\begin{aligned} m_x(K, t_1) &= M[X(K, t_1, \omega)] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(K, t_1, \omega) p(\omega) d\omega, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} m_x(K, t_2) &= M[X(K, t_2, \omega)] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(K, t_2, \omega) p(\omega) d\omega. \end{aligned} \quad (20)$$

В области изображений перемножаем дифференциальные спектры (19) и (20)

$$m_x(K, t_1) * m_x(K, t_2) = \sum_{l=0}^{l=K} m_x(K-l, t_1) m_x(l, t_2). \quad (21)$$

Формируем в области изображений произведение двух дифференциальных спектров $X(K, t_1, \omega)$ и $X(K, t_2, \omega)$, а результат перемножения обозначим $Q(K, t_1, t_2, \omega)$

$$\begin{aligned} Q(K, t_1, t_2, \omega) &= X(K, t_1, \omega) * X(K, t_2, \omega) = \\ &= \sum_{l=0}^{l=K} X(K-l, t_1, \omega) X(l, t_2, \omega). \end{aligned} \quad (22)$$

Найдем математическое ожидание от (22)

$$\begin{aligned} m_q(K, t_1, t_2) &= M[Q(K, t_1, t_2, \omega)] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} Q(K, t_1, t_2, \omega) p(\omega) d\omega. \end{aligned} \quad (23)$$

Согласно определению корреляционной функции сформируем ее дифференциальный спектр $R_x(K, t_1, t_2)$ по выражению

$$R_x(k, t_1, t_2) = m_q(k, t_1, t_2) - m_x(K, t_1) * m_x(K, t_2). \quad (24)$$

Переход от дифференциального спектра $R_x(K, t_1, t_2)$ во временную область можно выполнить обратным дифференциальным преобразованием (13) двумя способами: при $H_1 = t_1$ и $H_2 = t_2$. В результате имеем

$$R_x(t_1, t_2) = \sum_{K=0}^{\infty} R_x(K, t_1, t_2). \quad (25)$$

Таким образом, корреляционная функция $R_x(t_1, t_2)$ случайного процесса $x(t, \omega)$ определяется суммой всех дискрет дифференциального спектра $R_x(K, t_1, t_2)$, вычисление которого производится по выражениям (19)–(24).

В случае $t_1 = t_2 = t$ корреляционная функция $R_x(t)$ равна дисперсии $D_x(t)$.

Рассмотрим методику моделирования случайных процессов на основе дифференциальных преобразований на примере задачи оценивания положения космического аппарата. Невозмущенное движение КА описывается дифференциальным уравнением вида

$$\ddot{\bar{\mathbf{r}}} + K_3 \frac{\bar{\mathbf{r}}}{r^3} = 0, \quad (26)$$

где $\bar{\mathbf{r}}$ — радиус-вектор, определяющий положение КА в выбранной системе координат; K_3 — постоянная поля земного тяготения (гравитационная постоянная Земли), равная $3.986 \cdot 10^{14} \text{ м}^3/\text{с}^2$, что эквивалентно системе трех дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{cases} \ddot{x} + \frac{K_3 x}{r^3} = 0, \\ \ddot{y} + \frac{K_3 y}{r^3} = 0, \\ \ddot{z} + \frac{K_3 z}{r^3} = 0, \end{cases} \quad (27)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, или системе шести дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \dot{x}, & \frac{d\dot{x}}{dt} = -\frac{K_3 x}{r^3}, \\ \frac{dy}{dt} = \dot{y}, & \frac{d\dot{y}}{dt} = -\frac{K_3 y}{r^3}, \\ \frac{dz}{dt} = \dot{z}, & \frac{d\dot{z}}{dt} = -\frac{K_3 z}{r^3}. \end{cases} \quad (28)$$

Традиционно решение системы (28) есть совокупность шести независимых между собой частных решений (постоянных), к нахождению которых и сводится задача интегрирования данных уравнений.

Мы же решим поставленную задачу с помощью дифференциальных преобразований. Рассмотрим ход решения на примере одной координаты x и с одним допущением. Положим, что орбита КА круговая и $r = \text{const}$. Принятое допущение позволит уменьшить громоздкость выкладок, так как наша цель — рассмотреть новую методику решения задачи и определение статистических характеристик полученной модели.

Для построения дифференциального спектра модели движения КА определим случайные факторы, которые имеют место при решении данной задачи. Ограничения, наложенные на модель, — фактор не случайный и упрощенная модель имеет методическую погрешность. Известно также, что на точность определения (экстраполяции) положения КА на орбите большое значение оказывают начальные условия, необходимые для решения дифференциальных уравнений. Начальные условия — в данном случае положение и скорость на момент времени $t = 0$ — определяются по измерениям, которые получены с помощью радиолокационных станций, либо по результатам обработки ряда таких измерений. Последние как раз и подвержены большому количеству случайных возмущений, обусловленных неоднородностями трассы распространения радиоволн, неоднородностями и шумами приемных трактов и т. д. Таким образом, случайным процессом при решении задачи построения дифференциального спектра движения КА и определение точностных характеристик модели является определение начальных условий.

В этом случае система уравнений для координаты x запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \dot{x} = g, \\ \frac{d\dot{x}}{dt} &= \frac{dg}{dt} = -\frac{K_3 x}{r^3} \end{aligned} \quad (29)$$

при начальных условиях $t = 0$, $x(0) = x_0 - v_1$, $g(0) = g_0 - v_2$. Независимые случайные величины v_1 , v_2 заданы математическими ожиданиями $m_{v_1} = M[v_1] = 0$; $m_{v_2} = M[v_2] = 0$ и дисперсиями $D_{v_1} = \sigma_{v_1}^2$; $D_{v_2} = \sigma_{v_2}^2$. Требуется построить дифференциальный спектр модели движения КА с принятыми ограничениями и найти математическое ожидание $m_x(t)$ и дисперсию $D_x(t)$ случайного процесса.

В области изображений (учитывая свойства дифференциально-тейлоровских преобразований [1]) система уравнений (29) примет вид

$$\begin{aligned} X(k+1) &= \frac{H}{k+1} G(k), \\ G(k+1) &= -\frac{HK_3}{(k+1)r^3} X(k). \end{aligned} \quad (30)$$

В соответствии с выражением (12) определяем дискреты дифференциального спектра для положения и скорости по координате x :

$$\begin{aligned} X(0) &= x_0 - v_1, \\ X(1) &= g_0 H - v_2 H, \\ X(2) &= -\frac{K_3 H^2}{2!r^3} x_0 + \frac{K_3 H^2}{2!r^3} v_1, \\ X(3) &= -\frac{K_3 H^3}{3!r^3} g_0 + \frac{K_3 H^3}{3!r^3} v_2, \\ X(4) &= \frac{K_3^2 H^4}{4!r^6} x_0 - \frac{K_3^2 H^4}{4!r^6} v_1, \\ X(5) &= \frac{K_3^2 H^5}{5!r^6} g_0 - \frac{K_3^2 H^5}{5!r^6} v_2, \\ G(0) &= g_0 - v_2, \\ G(1) &= -\frac{K_3 H}{r^3} x_0 + \frac{K_3 H}{r^3} v_1, \\ G(2) &= -\frac{K_3 H^2}{2!r^3} g_0 + \frac{K_3 H^2}{2!r^3} v_2, \\ G(3) &= \frac{K_3^2 H^3}{3!r^6} x_0 - \frac{K_3^2 H^3}{3!r^6} v_1, \\ G(4) &= \frac{K_3^2 H^4}{4!r^6} g_0 - \frac{K_3^2 H^4}{4!r^6} v_2, \\ G(5) &= -\frac{K_3^3 H^5}{5!r^9} x_0 + \frac{K_3^3 H^5}{5!r^9} v_1. \end{aligned} \quad (31)$$

Вообще говоря, дифференциальный спектр (31) обоих уравнений системы (30) бесконечен. Мы ограничимся шестью дискретами, так как элементы седьмой будут иметь коэффициенты K_3^3/r^9 порядка 10^{-18} . Для получения решения во временной области надо произвести обратное преобразование, восстанавливающее оригинал $x(t, V)$ в виде ряда Тейлора с центром в точке $t = 0$, определяемое выражением (13).

Для расчета статистических характеристик рассматриваемого случайного процесса воспользуемся выражениями (18) и (25). Для определения дисперсии в последнем выражении приравняем $t_1 = t_2$. Математические ожидания случайных процессов, описываемых положение и скорость космического аппарата по координате x , будут представлены следующими выражениями:

$$\begin{aligned} x(t) &= \left(1 - \frac{K_3}{2!r^3} t^2 + \frac{K_3^2}{4!r^6} t^4\right) x_0 + \\ &+ \left(t - \frac{K_3}{3!r^3} t^3 + \frac{K_3^2}{5!r^6} t^5\right) g_0, \\ g(t) &= \left(-\frac{K_3}{r^3} t + \frac{K_3^2}{3!r^6} t^3 - \frac{K_3^3}{5!r^9} t^5\right) x_0 + \\ &+ \left(1 - \frac{K_3}{2!r^3} t^2 + \frac{K_3^2}{4!r^6} t^4\right) g_0. \end{aligned} \quad (32)$$

Для оценки ошибки определения положения и скорости КА по координате x определим дисперсию случайных процессов:

$$\begin{aligned} D_x(t) &= \sigma_{v_1}^2 + \left(\sigma_{v_2}^2 - \frac{K_3}{r^3} \sigma_{v_1}^2\right) t^2 + \\ &+ \left(\frac{K_3^2}{4r^6} \sigma_{v_1}^2 - \frac{K_3}{3r^3} \sigma_{v_2}^2\right) t^4 + \frac{K_3^2}{3!3!r^3} \sigma_{v_2}^2 t^6, \\ D_g(t) &= \sigma_{v_2}^2 - \left(\frac{K_3}{r^3} \sigma_{v_2}^2 - \frac{K_3^2}{r^6} \sigma_{v_1}^2\right) t^2 + \\ &+ \left(\frac{K_3^2}{4r^6} \sigma_{v_2}^2 - \frac{K_3^3}{3!r^9} \sigma_{v_1}^2\right) t^4 + \frac{K_3^4}{3!3!r^{12}} \sigma_{v_2}^2 t^6. \end{aligned} \quad (33)$$

Дисперсии в системе (33) определялись по четырем дискретам спектра обоих случайных процессов. Для сравнения, дисперсия определения положения, рассчитанная по шести дискретам дифференциального спектра, определяется выражением

$$\begin{aligned} D_x(t) &= \\ &= \sigma_{v_1}^2 + \left(\sigma_{v_2}^2 - \frac{K_3}{r^3} \sigma_{v_1}^2\right) t^2 + \left(\frac{K_3^2}{4r^6} \sigma_{v_1}^2 - \frac{K_3}{3r^3} \sigma_{v_2}^2\right) t^4 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \left(\frac{2.67K_3^2}{60r^6} \sigma_{v_2}^2 - \frac{K_3^3}{4!r^9} \sigma_{v_1}^2\right) t^6 + \left(\frac{K_3^4}{4!4!r^{12}} \sigma_{v_1}^2 - \frac{K_3^3}{5!3r^9} \sigma_{v_2}^2\right) t^8 + \\ &+ \frac{K_3^4}{5!5!r^{12}} \sigma_{v_2}^2 t^{10}. \end{aligned} \quad (34)$$

Результаты моделирования показывают, что добавка двух дискрет дифференциального спектра модели движения КА не приводит к существенному изменению расчетных значений дисперсий. Так, при значении параметра $t = 100$ с ошибка в определении дисперсии положения на четыре порядка меньше дисперсии начальных условий по координате x .

Анализ выражений (33) приводит к следующим выводам. Точность определения положения КА сильно зависит от точности расчета (или измерения) начальных условий как по положению, так и по скорости. Ошибки в начальных условиях скорости имеют решающее значение с увеличением t . Это можно увидеть из выражения для $D_x(t)$, так как коэффициенты при дисперсиях измерения скорости КА для соответствующих степеней времени на несколько порядков больше, чем при дисперсиях измерения положения.

На рис. 1, 2 приведены результаты расчетов. На рис. 1 представлены зависимости среднего квадратичного отклонения определения положения объекта в зависимости от времени экстраполяции при постоянной ошибке определения начальных условий положения и соотношении $\sigma_{g_1} = 2\sigma_{g_2}$.

На рис. 2 представлены также зависимости точности экстраполяции КА при постоянной ошибке определения начальных условий по скорости объекта и соотношении $\sigma_{x_1} = 2\sigma_{x_2}$. Из приведенных графиков следует, что с увеличением времени экстраполяции точность предсказанного положения КА зависит, в основном, от точности начальных условий по скорости.

В заключение отметим следующее. Предложенный подход к моделированию случайного процесса, которым является определение параметров траектории КА, с помощью математического аппарата дифференциальных преобразований обеспечивает точное моделирование случайного процесса в области изображений, где возможно применение различных аналогов известных аналитических методов анализа случайных процессов и нелинейных стохастических систем. Аналитические зависимости математических преобразований случайных процессов существенно сокращают объем вычислений, остающихся для численной реализации вычислений на ЭВМ. Так, на примере упрощенной модели движения КА был произведен аналитический расчет

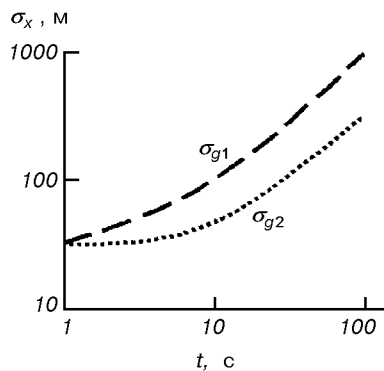


Рис. 1. Зависимости среднего квадратичного отклонения определения положения объекта в зависимости от времени экстраполяции

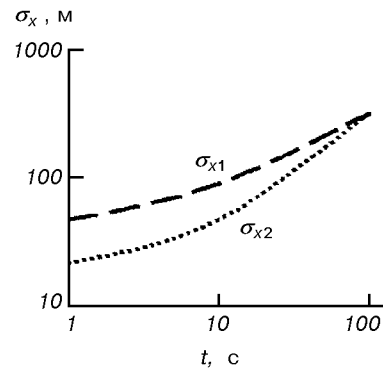


Рис. 2. Зависимости точности экстраполяции КА при постоянной ошибке определения начальных условий по скорости объекта

ошибки определения, экстраполяции положения объекта и в численном виде получены искомые результаты. Расчетные зависимости показывают, что для повышения точности экстраполяции положения КА разработчикам как аппаратной, так и алгоритмической части радиолокационных комплексов необходимо прилагать все усилия для точного измерения составляющей скорости, поскольку именно эта составляющая в основном определяет точность предполагаемого нахождения объекта на заданный момент времени.

1. Пухов Г. Е. Дифференциальные преобразования функций и уравнений. — Киев: Наук. думка, 1984.—420 с.
2. Пухов Г. Е. Дифференциальные спектры и модели. — Киев: Наук. думка, 1990.—184 с.

3. Ронто Н. И., Семагина Э. П. К вопросу нахождения функций оригиналов по дифференциальным Т-спектрам // Электрон. моделирование.—1987.—9, № 6.—С. 5—8.
4. Статистические методы в проектировании нелинейных систем автоматического управления / Под ред. Б. Г. Доступова. — М.: Машиностроение, 1970.—408 с.
5. Чернецкий В. И. Анализ точности нелинейных систем управления. — М.: Машиностроение, 1968.—246 с.

STATISTICAL CHARACTERISTICS OF DIFFERENTIAL SPECTRUM OF SPACECRAFT TRAJECTORY

G. L. Baranov, V. L. Baranov, S. V. Kovbasiuk

The accuracy calculation of spacecraft position in orbit is based on differential transformations. The results of simulation are given.