ISSN 1561-8889. Космічна наука і технологія. 2001. Т 7. № 2/3. С. 100—103.

УДК 621.455

В. Ф. Присняков

Відділення механіки НАН України, Дніпропетровськ

Простейшая модель связи удельной стоимости запускаемой полезной нагрузки и удельного импульса

Надійшла до редакції 04.01.00

На основі простого зв'язку питомої вартості корисного навантаження і початкової та кінцевої маси ракети з використанням формули Ціолковського отримана залежність вартості виведення на орбіту 1 кг корисної маси і питомого імпульсу ракетного двигуна. Дослідження отриманої функції на екстремум дозволило найти оптимальне значення запропонованого вартісного критерію і питомого імпульсу двигуна. Показано, що прагнення до використання двигунів з максимально можливим значенням питомого імпульсу не приводить до мінімізації вартості виведення на орбіту корисного вантажу.

В связи с расширяющейся комерциализацией космических услуг вопрос уменьшения стоимости вывода полезного груза на орбиту становится особенно актуальным. При рассмотрении различных типов двигателей обычно в качестве основного параметра используют удельный импульс, считая, что его увеличение автоматически удешевляет стоимость запуска. Очевидно, назрела необходимость введения дополнительного, рыночного, критерия, влияющего на стоимость запуска ракеты. Для его получения рассмотрим задачу выведения груза на орбиту в такой постановке: заданы тяга двигателя P, время его работы τ, конечная скорость запускаемого полезного груза w массой m_p, масса конструкции m_s. Для простоты примем случай одноступенчатой ракеты, причем космодромные затраты на запуск условно, чтобы не загромождать расчетные формулы, отнесем к стоимости топлива. (В более общей постановке — многоступенчатая ракета с учетом затрат на запуск — задача не несет какихлибо принципиальных трудностей, но конечные математические выражения более громоздки).

Удельная стоимость запуска полезной нагрузки на орбиту со скоростью w равняется

$$p_p = (p_s m_s + p_f m_f)/m_p, \qquad (1)$$

где p — цена 1 кг материала, m_f — масса компонентов топлива.

Введем коэффициенты относительных масс: компонентов топлива $\nu = m_f/m_p$ и конструкции ракеты $\mu = m_s/m_p$. Тогда формулу (1) можно представить следующим образом:

$$p_p = \mu p_s + \nu p_f \, . \qquad (2)$$

Определим коэффициенты ν и μ из следующих соображений. В идеальном случае конечная скорость ракеты равняется

$$w = I_{sp} \ln m_0/m_\tau \, , \qquad (3)$$

где I_{sp} — удельный импульс двигателя, м/с, (которому приравнена эффективная скорость продуктов сгорания из камеры сгорания), m_0 и m_τ — начальная и конечная массы ракеты:

$$m_0 = m_s + m_p + m_f \, ,$$

$$m_\tau = m_s + m_p \, .$$

С учетом этих выражений формула (3) может быть переписана следующим образом

$$w = I_{sp} \ln[1 + \nu/(1 + \mu)]. \tag{4}$$

Масса топлива m_f связана с тягой двигателя P и временем его работы τ очевидным соотношением

$$m_f = \dot{m}\tau = P\tau/I_{sp}\,, \tag{5}$$

где $\dot{m}$ — суммарный расход топлива за секунду. Из этого выражения нетрудно получить значение коэффициента ν:

$$\nu = (P\tau/m_p)/I_{sp} = w_p/I_{sp}\,. \tag{6}$$

Здесь $w_p = P\tau/m_p$ — некоторая фиктивная скорость выведения.

Из выражения (4) находим значение отношения $\nu/(1 + \mu)$ и с учетом (6) получаем выражение для μ:

$$\mu = w_p/\left\{I_{sp}[\exp(w/I_{sp}) - 1]\right\} - 1. \tag{7}$$

Подставляем выражения (4) и (7) в (2):

$$\overline{p}_p = \frac{w_p p_s}{I_{sp}[\exp(w/I_{sp}) - 1]} + \frac{w_p p_f}{I_{sp}} - p_s. \tag{8}$$

Обозначим

$$\overline{p_p} = p_p/p_s; \qquad \kappa = p_f/p_s; \qquad A = \exp(w/I_{sp}) - 1.$$

Тогда вид формулы (8) упрощается:

$$\overline{p_p} = \frac{w_p}{I_{sp}[1/A(I_{sp}) + \kappa]} - 1. \tag{9}$$

Исследуем эту функцию на экстремум. Производная по удельному импульсу имеет такой вид

$$\frac{\partial \overline{p_p}}{\partial I_{sp}} = w_p\left\{-\frac{1}{AI_{sp}^2} - \frac{1}{I_{sp}A^2}\frac{\partial A}{\partial I_{sp}} - \frac{\kappa}{I_{sp}^2}\right\}, \tag{10}$$

где

$$\partial A/\partial I_{sp} = -w\exp(w/I_{sp})/I_{sp}^2\,.$$

В точке экстремума записанная производная становится равной нулю, что позволяет найти оптимальные значения дополнительного стоимостного критерия $\kappa = \kappa_{opt}$:

$$\kappa_{opt} = \frac{(w - I_{sp}^{opt})A(I_{sp}^{opt}) + w}{I_{sp}^{opt}A^2(I_{sp}^{opt})}. \tag{11}$$

Расчеты по формуле (11) при трех различных значениях конечной скорости ракеты w_1 = 7.9 км/с, w_2 = 9 км/с, w_3 = 11.2 км/с приведены в табл. 1 и представлены на рис. 1.

Как видно, для химических ракетных двигателей, которые имеют реальный диапазон I_{sp} = 1...5 км/с (первая цифра — для унитарного топлива), параметр κ, определяющий минимальную стоимость вывода полезной нагрузки (иследования показали, что в рассматриваемом случае имеет место минимум стоимости вывода полезной нагрузки), не должен превышать 0.26 для первой космической скорости и 0.235 — для второй.

Для случая первой космической скорости (что более реально для одноступенчатого аппарата) и при реальном диапазоне изменения I_{sp} = 3...4 км/с для ЖРД и РДТТ κ_{opt} = 0.15...0.24. Наличие оптимальных значений удельного импульса и параметра κ требует не простого увеличения I_{sp}, а увеличения с учетом отношения стоимостей единицы массы топлива и конструкции ракеты. При этом для минимизации стоимости выводимой полезной нагрузки повышение удельного импульса должно сопровождаться одновременным уменьшением сто-

Оптимальные значения стоимостного критерия κ в функции конечной скорости w и удельного импульса I_{sp}

	I_{sp}, км/с									
	1.5	2.0	2.5	3	3.5	4	5.0	6	7.5	I_{sp}= w
	w = 7.9 км/с									
A	193	0.94	22.6	12.9	8.5	6.2	3.9	2.7	1.9	1.7
κ	0.02	0.06	0.1	0.14	0.18	0.21	0.26	0.3	0.3	0.34
	w = 9 км/с									
A	402	89	35.6	19	12.1	8.5	5	4.5	2.3	1.7
κ	0.013	0.04	0.08	0.11	0.15	0.18	0.23	0.27	0.3	0.34
	w = 11.2 км/с									
A	1748	269	87.2	41	23.5	15.4	8.4	5.5	3.5	1.7
κ	0.004	0.017	0.04	0.07	0.1	0.13	0.18	0.22	0.27	0.34

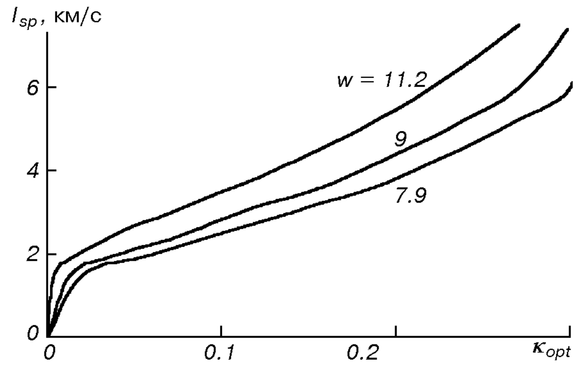

Рис. 1. Зависимость удельного импульса двигателя I_{sp} от оптимального стоимостного критерия κ_{opt}

имости конструкции. Поскольку в стоимости современных ракет (например «Зенит») стоимость двигателя составляет около 2/3, то имеем в общем противоречивые требования увеличения I_{sp} с одновременным удешевлением и облегчением конструкции двигателя.

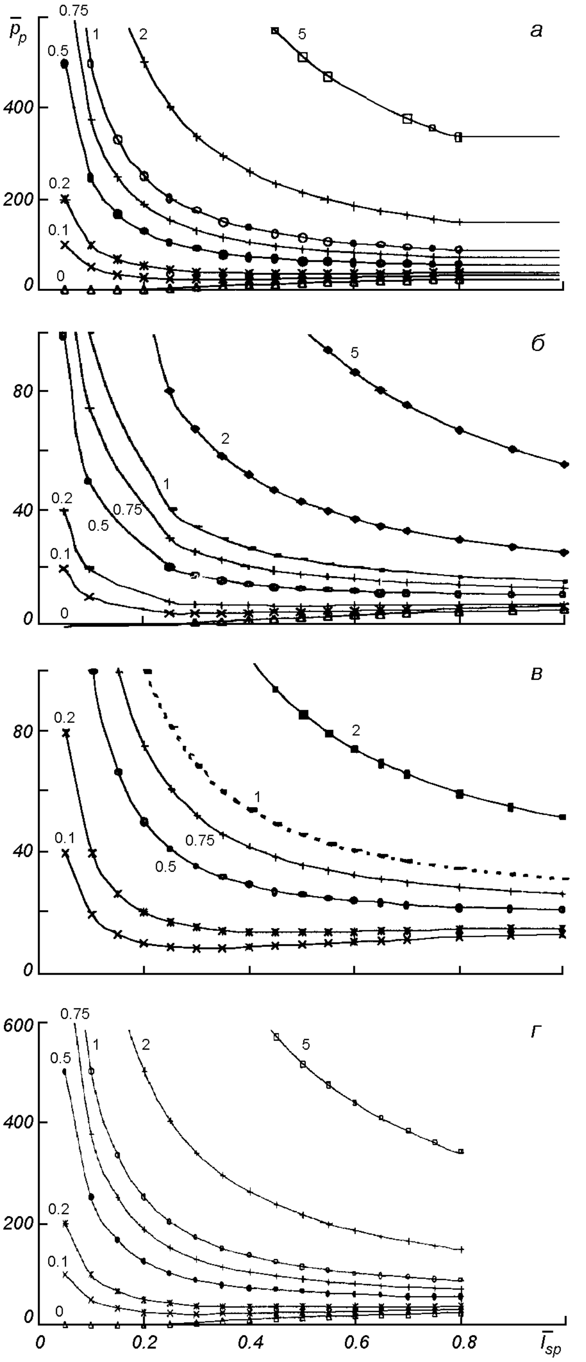

Рис. 2. Зависимость относительного значения $\bar p_p$ стоимости вывода полезной нагрузки на орбиту от относительного удельного импульса $\bar I_{sp}$ при разных значениях параметра κ (цифры у кривых) и фиктивной скорости $\bar w_p$ = 5; 10; 20 и 50 (расчет по формуле (12))

Представленная схема очень упрощенная и не учитывает многих эффектов второго порядка. Тем не менее, полученные простые зависимости позволяют управлять процессом уменьшения стоимости запуска полезной нагрузки. Для упрощения анализа преобразуем формулы (9) и (11) к безразмерному виду. В качестве нормирующей величины выберем конечную скорость аппарата w: $\bar I_{sp} = I_{sp}/w$, $\bar w_p = w_p/w$. Тогда расчетные формулы (9) и (11) приобретают вид

$$\bar p_p = \bar w_p/\bar I_{sp}[1/\exp(1/\bar I_{sp}) + \kappa] - 1, \qquad (12)$$

$$\kappa_{opt} = \frac{(1 - \bar I_{sp}^{opt})\exp(1/\bar I_{sp}^{opt}) + \bar I_{sp}^{opt}}{\bar I_{sp}^{opt}[\exp(1/\bar I_{sp}^{opt}) - 1]^2}. \qquad (13)$$

Графики зависимости относительной стоимости $\bar p_p$ вывода в космос 1 кг полезной нагрузки от относительного удельного импульса $\bar I_s$, параметра κ и относительной фиктивной скорости выведения $\bar w_p$ по расчетам при помощи (12) представлены на рис. 2. Для оптимальных параметров, соответствующим минимуму стоимости вывода полезной нагрузки, расчетная формула получается после подстановки в (12) формулы (13) с последующим ее приведением к такому универсальному виду:

$$\frac{\bar p_p + 1}{\bar w_p} = \frac{\exp(1/\bar I_{sp}^{opt})}{(\bar I_{sp}^{opt})^2[\exp(1/\bar I_{sp}^{opt}) - 1]^2} = \Psi(\bar I_{sp}^{opt}), \qquad (14)$$

т. е. имеем более простую формулу

$$\bar p_p = \bar w_p \Psi - 1. \qquad (15)$$

Формулы (14) и (15) применимы только в диапазоне оптимальных значений κ_{opt}, т. е. до величин $I_{sp} < w$.

Таким образом, оптимальное соотношение κ_{opt}, как и функция $\Psi(\bar I_{sp}^{opt})$, зависят только от безмерного удельного импульса $\bar I_{sp}^{opt}$. Их значения представлены на рис. 3 и в табл. 2.

Интересен частный случай очень дешевого ракетного топлива ($\kappa = 0$). Расчетная формула при этом имеет вид

$$\bar p_p = \frac{\bar w_p}{\bar I_{sp}[\exp(1/\bar I_{sp}) - 1]} - 1. \qquad (16)$$

Из этой формулы можно найти следующее выражение для тех значений относительного удельного импульса ракетного двигателя I_{sp}^0, которые обеспечивают при принятом допущении стоимость вывода 1 кг полезной нагрузки, близкую к стоимости 1 кг

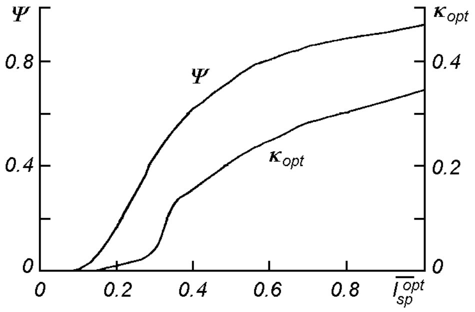

Рис. 3. Зависимости параметра $\kappa_{\rm opt}$ и функции Ψ от $\bar{I}_{\rm sp}^{\rm opt}$

Таблица 2. Значения функции $\Psi(\bar{I}_{\rm sp}^{\rm opt})$ и параметра $\kappa_{\rm opt}$

$I_{\rm sp}$	Ψ	$\kappa_{\rm opt}$
0.05	$8\cdot10^{-7}$	0
0.1	0.0045	0.0004
0.15	0.06	0.001
0.2	0.17	0.009
0.25	0.3	0.019
0.3	0.43	0.04
0.35	0.53	0.124
0.4	0.61	0.154
0.45	0.67	0.181
0.5	0.72	0.205
0.55	0.77	0.23
0.6	0.80	0.246
0.7	0.85	0.28
0.8	0.88	0.3
0.9	0.9	0.32
1	0.93	0.34
1.1	0.93	
1.5	0.96	
2	0.993	
3	0.997	
∞	1	

конструкции ракеты:

$$\bar{w}_{\rm p}/\bar{I}_{\rm sp}^0 = \exp(1/\bar{I}_{\rm sp}^0) - 1. \quad (17)$$

Результаты расчетов при помощи этого соотношения представлены в табл. 3 и на рис. 4.

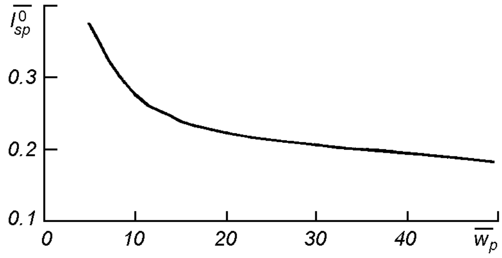

Рис. 4. Зависимость между оптимальным удельным импульсом $I_{\rm sp}^0$ и относительной фиктивной скоростью $\bar{w}_{\rm p}$

Таблица 3. Значения удельного импульса, обеспечивающего минимальное значение стоимости вывода на орбиту полезной нагрузки при «бесплатном» топливе

$\bar{w}_{\rm p}$	5	10	20	50
$I_{\rm sp}^0$	0.375	0.275	0.22	0.179

Таким образом, предложенный дополнительный критерий должен учитываться при сравнении различных типов двигателей и ракет с точки зрения удешевления вывода полезной нагрузки на орбиту.

THE SIMPLEST MODEL OF THE RELATION BETWEEN THE SPECIFIC PAYLOAD COST AND SPECIFIC IMPULSE

V. F. Prisniakov

The elementary relationship between the specific cost of a payload and initial and final mass of a rocket and the formula by Tsiolkovsky are used to derive the relation between the cost of 1 kg of payload and specific impulse of rocket propulsion. Investigations of the function obtained for its allowedus to find the optimal values for the new cost criterion and the specific impulse. It is demonstrated that the highest possible specific impulse does not necessarily leads to the minimum payload cost.