

УДК 629.78

А. В. Пироженко

Інститут технічної механіки НАН України і НКА України, Дніпропетровськ

Хаотические режимы движения в динамике космических тросовых систем. 2. Механический образ явления

Надійшла до редакції 08.10.99

Розглядається явище детермінованого хаосу в динаміці космічних тросових систем. Дослідження проводиться за допомогою числового інтегрування рівнянь модельної задачі — рівнянь руху орбітального маятника з періодично змінною довжиною штанги. Оцінені зміни енергії коливань маятника та проведено якісний аналіз окремих трасекторій та їхніх сімейств. Побудовано механічний образ хаотичних режимів руху, за допомогою якого здійснено аналіз сутності явища.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Явление детерминированного хаоса в динамике систем интенсивно исследуется в течение последних десятилетий. Известно [1], что это явление присуще большинству динамических систем и имеет место уже в системах, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями первого порядка с тремя переменными (1.5 степени свободы). Вместе с тем для большинства специалистов, занимающихся расчетом конкретных механических систем, понятие «детерминированный хаос» вызывает в лучшем случае недоумение. Действительно, если хаотическое движение есть только сложное, нерегулярное (?) движение, т. е. движение, в котором не видна его закономерность, то причем здесь хаос и стохастичность? Если условия теорем существования и единственности решений дифференциальных уравнений выполняются, то откуда может взяться случайность? Образы типа «преобразования пекаря» и объяснения типа «бифуркации удвоения периодов» часто далеки от динамики конкретных систем и обычно не воспринимаются исследователями-механиками, привыкшими и стремящимися мыслить механическими образами изучаемых движений. Так, в понятной модели математического маятника и в привычных образах его движений трудно увидеть «преобразования пекаря» и понять,

какие периоды удваиваются бифуркационно. Отсутствие воспринимаемых образов явления и понятий, объясняющих его сущность, с одной стороны, и огромное количество литературы, содержащей нетрадиционные для механиков образы и понятия, освоение которой составляет иногда чрезвычайно сложную задачу, с другой стороны, побуждают многих механиков сторониться данной проблемы.

В работе [2] осуществлена постановка модельной задачи для исследования сущности хаотических режимов движения в динамике космических тросовых систем. Это модель математического маятника с периодически изменяющейся длиной штанги, расположенного на круговой орбите (орбитальный маятник). Уравнения его движения имеют вид

$$\dot{L} = -\frac{3}{2} \omega_0^2 r^2 \sin 2\psi, \quad \dot{\psi} = \frac{L}{r^2} - \omega_0, \quad (1)$$

где $r = 1 + z \cos \omega$, $z = b/a$, b , a — соответственно средняя длина штанги и амплитуда ее колебаний, ω_0 — угловая скорость орбитального движения маятника, ψ — угол между местной вертикалью и штангой, $\dot{\omega} = k$, a , b , k — постоянные.

Проведенный в [2] анализ и попытки построения приближенного решения уравнений (1) позволили сделать вывод-предположение о невозможности объяснения сущности явления традиционными для механиков математическими методами анализа. В

этой статье приведены результаты попытки качественного анализа и построения механического образа возникновения и сущности хаотических режимов движения. Метод исследования движений системы основывается на измерении характеристик отдельных траекторий и их семейств. Т. е. предполагается проведение экспериментальных исследований, где вместо экспериментальной установки используется компьютер, осуществляющий численное интегрирование системы (1), визуализацию траекторий и их характеристик. Основным направлением исследований являются закономерности воздействия продольных колебаний на маятниковые движения или, конкретно, на изменения энергии маятниковых движений. Основная цель исследований — определение сущности хаотических режимов движения.

АНАЛИЗ ОТДЕЛЬНОЙ ТРАЕКТОРИИ

Зафиксируем параметры системы: $k = 0.02 \text{ с}^{-1}$, $z = 0.8$. Как и в [2], $\omega_0 = 0.001 \text{ с}^{-1}$. Рассмотрим отдельную регулярную траекторию с начальными условиями $\psi_0 = 12^\circ$, $L_0 = \omega_0 p$, $p = (1 - z^2)^{3/2}$.

На рис. 1 изменение ψ показано в безразмерном «времени» t_r , равном количеству периодов продольных колебаний: $t_r = t/T_\omega$, где $T_\omega = 2\pi/k$ — период продольных колебаний. В качестве величины, характеризующей энергию маятниковых движений, будем рассматривать величину $h^* = L^2/r^2 + 3\omega_0^2 r^2 \sin^2 \psi$. Здесь первое слагаемое равно удвоенной приведенной кинетической энергии относительного движения, перпендикулярного к линии штанги, а второе слагаемое равно взятой со знаком минус удвоенной приведенной потенциальной энергии воздействия гравитационного поля на относительное движение системы.

График изменения h^* для рассматриваемой траектории приведен на рис. 2. Вообще говоря, зависимость h^* от времени несколько не проще зависимости ψ от времени, и изменение h^* существенно зависит от длины штанги.

Построение оценок изменения энергии маятниковых движений. Анализ закономерностей движения, основанный на численном решении уравнений динамики, предполагает построение оценок, здраво отражающих изменения в движении. Расчеты показывают, что непосредственно график изменения h^* не позволяет судить об эволюции изменений энергии маятниковых колебаний. Дело в том, что закономерности изменений энергии движения на длительных интервалах времени, такие как интервалы ее возрастания и убывания, максимальные и минимальные значения, скрыты локальными изменениями

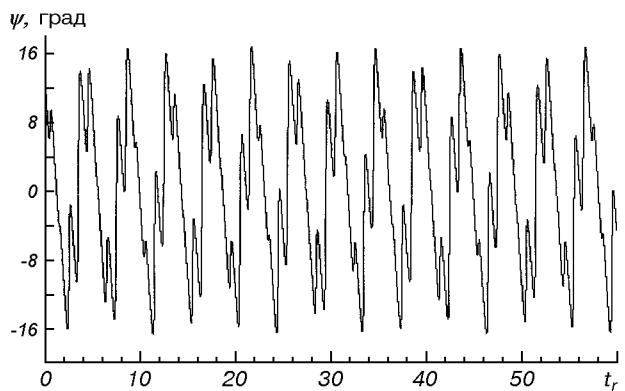


Рис. 1. Регулярная траектория $\psi_0 = 12^\circ$, $L_0 = \omega_0 p$

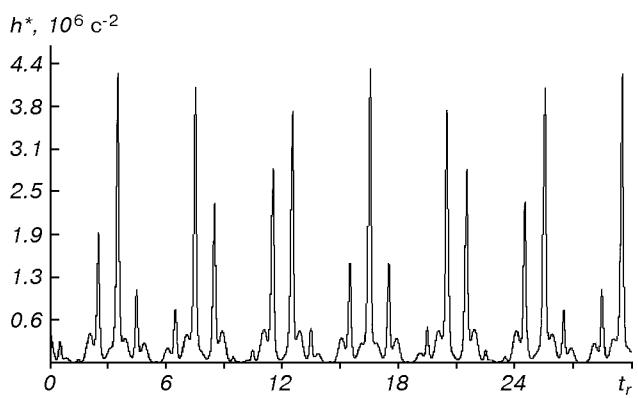
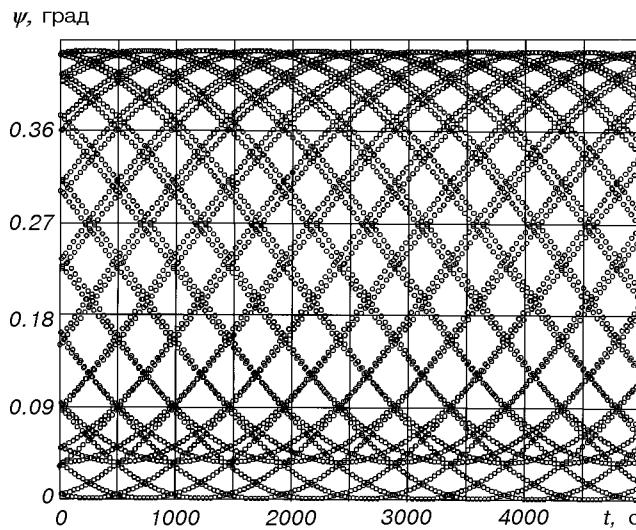


Рис. 2. Изменение h^*

на каждом цикле продольных и маятниковых колебаний, которые, вообще говоря, значительно превосходят интересующие нас систематические изменения энергии. В рассматриваемом случае представляется возможным и целесообразным провести анализ закономерностей движения на основе построения последовательности некоторых дискретных во времени, интегральных оценок.

Следуя методу Пуанкаре, рассмотрим последовательность значений h^* , вычисляемую на каждом периоде продольных колебаний для фиксированных значений r и \dot{r} . Исследования показывают, что наиболее гладкая последовательность значений h^* получается при фиксированной длине штанги $1 + a$, h_{1+a} (рис. 3). Этот факт может быть объяснен на основании уравнения (14) [2], а также на основании анализа траектории движения маятника в плоскости Oxy , где $x = rsin\psi$, $y = rcos\psi$. При длине штанги меньше некоторой величины характер движения маятника существенно усложняется, и возможны возвратные угловые движения.

В качестве меры изменения энергии колебаний

Рис. 3. Последовательность h_{1+a}

маятника рассматривалась и последовательность средних значений h^* на каждом периоде продольных колебаний:

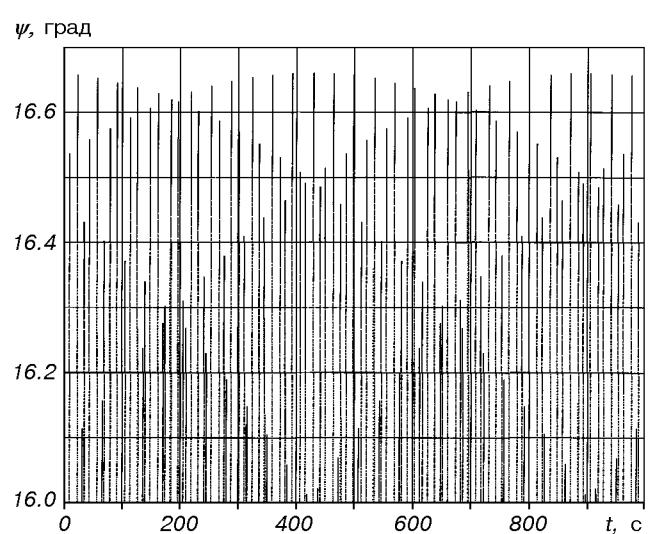
$$h_{av} = \frac{1}{T_\omega} \int_{(n-1)T_\omega}^{nT_\omega} h^* dt.$$

Но можно предположить, что для «срыва» регулярной траектории в хаотическую определяющую роль должны играть пиковые значения энергии маятниковых колебаний. С этой точки зрения использование последовательности h_{av} не соответствует цели исследований.

Возможно построение оценочных последовательностей изменения энергии маятниковых колебаний и из условий фиксирования значений ψ или L . Однако, как показывают исследования, построение таких оценочных последовательностей сопряжено с определенными вычислительными трудностями, и построенные последовательности содержат «лишние» значения.

Рассматривая понятие энергии маятниковых колебаний как качественную характеристику, можно предложить построение ее оценочной последовательности на основе измерений максимальных значений угла отклонения маятника от местной вертикали. На рис. 4 для рассматриваемой траектории показано изменение максимальных значений ψ .

Нетрудно видеть, что количество возможных оценочных последовательностей энергии маятниковых колебаний далеко не исчерпывается перечисленными методами. При наличии общей закономерности изменений эти последовательности имеют и различия. Вообще говоря, у нас нет строгих

Рис. 4. Изменение максимальных значений угла ψ

оснований предпочтеть один способ построения оценочной последовательности другому, как более верно отражающий изменение энергии маятниковых колебаний траектории. Основываясь на общих рассуждениях, в качестве основной оценочной последовательности, как наиболее простой в построении и наиболее соответствующей методу Пуанкаре, будем рассматривать последовательность h_{1+a} . Так же, как наиболее соответствующую представлению об экспериментальных исследованиях, будем рассматривать последовательность максимальных значений угла ψ .

Предложенные оценочные последовательности непосредственно не дают наглядной картины эволюционных изменений энергии маятниковых колебаний. Такую картину, как представляется, дает огибающая максимальных значений этих последовательностей.

Анализ почти периодического характера траектории. Во всех построенных оценочных последовательностях наблюдается общая закономерность их изменений. Эта закономерность связана с почти периодическим характером траектории. Из графиков изменения ψ и последовательности h_{1+a} можно видеть, что их значения почти периодичны с периодом $35T_\omega$. Это соответствует соизмеримости маятниковых и продольных колебаний в соотношении 8 : 35. При более детальном анализе названных графиков заметна повторяемость изменений ψ и h_{1+a} через время, равное $13T_\omega$, что соответствует соизмеримости маятниковых и продольных колебаний в соотношении 3 : 13. Названные соизмеримо-

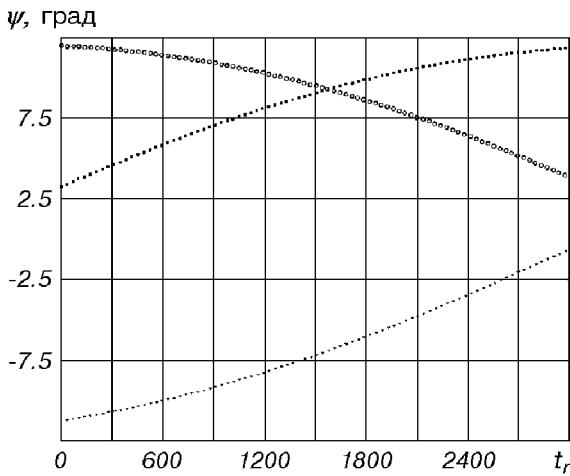


Рис. 5. Последовательность значений ψ через $35T_\omega$

сти в рассматриваемой траектории будут отчетливо видны, если построить последовательность значений угла ψ или h_{1+a} через интервалы времени, кратные $13T_\omega$ и $35T_\omega$.

Так, на рис. 5 показана последовательность значений угла ψ через интервалы времени, кратные $35T_\omega$. Кружками обозначены значения в моменты времени $i \cdot 35T_\omega$, квадратами — в моменты времени $T_\omega + i \cdot 35T_\omega$, треугольниками — в моменты времени $2T_\omega + i \cdot 35T_\omega$.

Таким образом, мы сталкиваемся с тем фактом, что в отдельной траектории проявляются различные соизмеримости маятниковых и продольных колебаний. В связи с этим возникают вопросы: если в траектории проявляются разные соизмеримости, то к какой соизмеримости более правильно отнести траекторию? Можно ли траекторию отнести к единственному резонансному соотношению частот? Выше мы определили проявляющиеся соизмеримости в траектории на основании некоторой повторяемости изменений ψ и h^* через определенные интервалы времени, кратные T_ω . А затем подтвердили это, построив гладкие последовательности значений ψ и h^* через интервалы времени, кратные характерному периоду. Действительно, пусть рассматривается почти периодическая траектория с характерным периодом T_1 . Тогда изменение значения ψ за T_1 будет незначительным, а последовательность значений ψ_n , вычисляемая в моменты времени nT_1 , будет гладкой. В силу почти периодического характера траектории продольные колебания будут медленно смещаться относительно маятниковых колебаний за характерный период траектории. Поэтому энергия, передаваемая в маятниковые колебания,

должна гладко (плавно) изменяться от периода к периоду. Таким образом, гладкость, плавность изменения значений ψ и энергии маятниковых колебаний через n периодов продольных колебаний является одним из критериев отнесения траектории к nT_ω почти периодичным. Очевидно, что этот критерий не дает ответа на поставленные вопросы.

Продолжим анализ почти периодической траектории. Плавное изменение последовательности значений ψ и h^* , обусловлено, с одной стороны, смещением маятниковых колебаний относительно продольных за характерный период траектории, а с другой стороны, изменением энергии маятниковых колебаний. Учитывая нелинейный характер маятниковых колебаний: с увеличением (уменьшением) их энергии (амплитуды) увеличивается (уменьшается) их период, можно ожидать, что для каждой траектории найдется такое число n , что диапазон изменений значений энергии маятниковых колебаний, вычисляемый через интервалы времени nT_ω , будет меньше полного диапазона значений, вычисляемых через интервалы времени T_ω .

Таким образом, ограниченность диапазона значений энергии маятниковых колебаний через интервалы времени nT_ω , в сравнении с полным диапазоном ее значений через T_ω , дает второй критерий почти периодичности траектории. Среди чисел, удовлетворяющих обоим критериям, следует выбрать наименьшее. Так, анализ рассматриваемой траектории ($\psi_0 = 12^\circ$, $L_0 = \omega_0 p$) показывает, что она является почти периодической с периодом $477T_\omega$.

Таким образом, на основе анализа отдельной регулярной траектории показано, что ее можно отнести к определенному резонансу маятниковых и продольных колебаний, и рассматривать как почти периодическую траекторию. В качестве меры изменений энергии маятниковых колебаний можно принять ряд максимальных значений последовательности h_{1+a} либо огибающую последовательности максимальных значений угла отклонения маятника от местной вертикали. Эти меры изменений энергии маятниковых колебаний согласуются с почти периодическим характером траектории.

АНАЛИЗ СЕМЕЙСТВ ТРАЕКТОРИЙ

В области начальных значений $t_0 = 0$ проведем прямую $r_0 = 1 + a$, $\dot{r}_0 = 0$, $L_0 = \omega_0 p$. Рассмотрим семейство траекторий (семейство 1), исходящих из этой прямой, т. е. семейство, порождаемое изменением начального угла ψ_0 отклонения маятника от местной вертикали.

На рис. 6 показан фазовый портрет этого семейства, полученный сечением фазового пространства плоскостью $r = 1 + a$ (далее, если не оговорено особо, все фазовые портреты строятся аналогично, и для краткости будем их называть просто фазовыми портретами). Здесь и далее $L_r = (L - p\omega_0) \cdot 1000$. Фазовый портрет построен при изменении ψ_0 от 0° до 70° с шагом 1° . Для каждой траектории строилось 1000 точек. Показаны траектории только для значений ψ от -70° до 70° без учета возврата хаотических траекторий в рассматриваемую область. Как видно, данное семейство траекторий не покрывает все пространство траекторий. Поэтому наряду с этим семейством будем рассматривать аналогичные семейства траекторий, изменения фик-

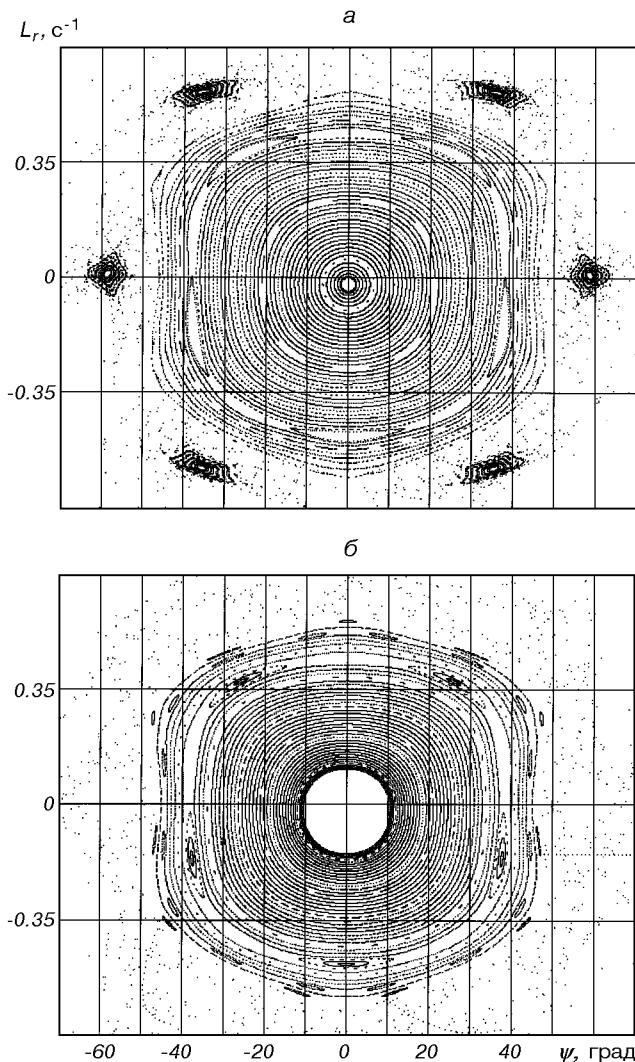


Рис. 6. Фазовый портрет: *а* — семейства 1, *б* — семейства $L_0 = \omega_0(p - 0.15)$

сированное начальное значение L_0 (семейства, порожденные параллельными прямыми). На рис. 6, *б* приведен фазовый портрет для семейства траекторий с начальным значением $L_0 = \omega_0(p - 0.15)$.

Рассмотрим более подробно фазовые портреты вблизи выше рассмотренной траектории, определенной начальными условиями $L_0 = \omega_0 p$, $\psi_0 = 12^\circ$, $r_0 = 1 + a$.

На рис. 7, *а* показан фазовый портрет семейства 1 при изменении ψ_0 от 11.86° с шагом 0.02° . Видно, что траектория с $\psi_0 = 12^\circ$ действительно не принадлежит резонансу $8 : 35$, а относится к резонансу более высокого порядка. Порядок резонанса определяется характерным периодом траекторий, принадлежащих ему $T_t = nT_\omega$: чем больше число n , тем

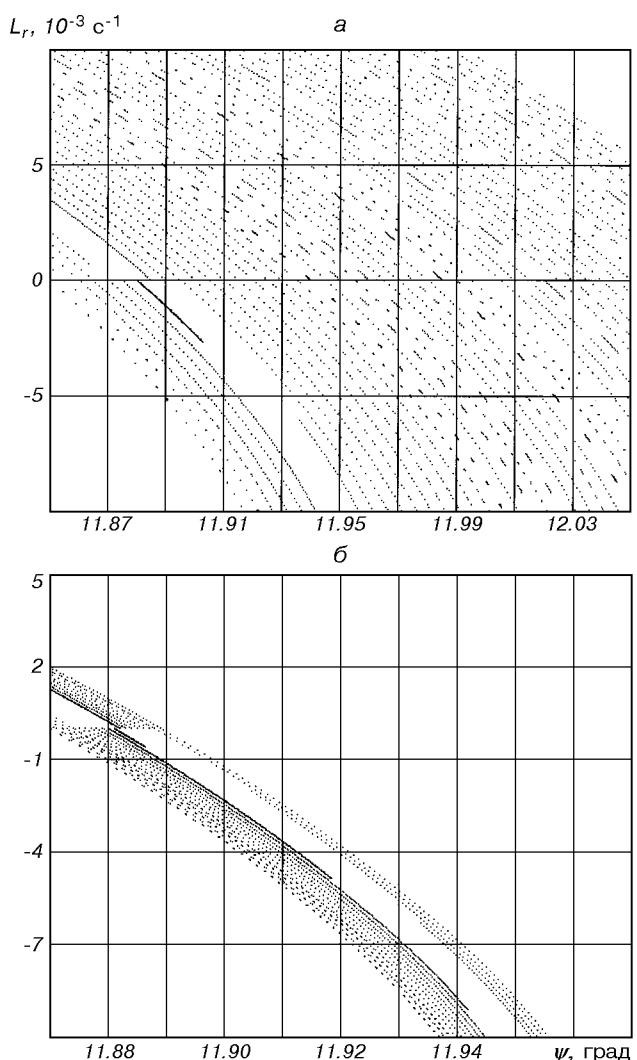


Рис. 7. Фазовый портрет: *а* — семейства 1 возле траектории $\psi_0 = 12^\circ$, *б* — в области резонанса $8 : 35$

выше порядок резонанса. Видно также, что все фазовое пространство в рассматриваемом диапазоне разбито на резонансы высокого порядка. Особо выделяется резонанс $8 : 35$, как резонанс более низкого порядка в данной области. Рассмотрим его более подробно.

На рис. 7, б показан фазовый портрет семейства 1, где ψ_0 изменяется от 11.87° до 11.89° с шагом 0.001° . Видно, что данный резонанс имеет характер почти простой соизмеримости несвязанных движений. Во-первых, мы не наблюдаем характерной для нелинейного резонанса петли, говорящей о переходе траектории на разные энергетические уровни, обусловленном сдвигом фазы резонансной настройки частот. Во-вторых, мы наблюдаем при приближении траекторий к резонансу монотонное повышение плотности точек траектории на фазовом портрете. Это связано с тем, что при приближении к определенной соизмеримости достаточно низкого порядка независимых между собой колебаний увеличивается порядок их соизмеримостей. При приближении к резонансу виден определенный рисунок, образованный точками соседних траекторий. Подобные рисунки видны и на всех фазовых портретах при плотном построении траекторий — плавные линии как бы охватывают резонансы. Это связано с увеличением периода маятниковых колебаний для рассматриваемых семейств траекторий с увеличением начального значения ψ_0 и плавным изменением соизмеримости маятниковых и продольных колебаний. Действительно, на рис. 8, а приведен фазовый портрет семейства $L_0 = \omega_0(p - 0.0019)$, где ψ_0 изменяется от 0 до 15° с шагом 0.1° . На каждой траектории ставится 150 точек. Здесь четко видны составляющие названных выше рисунков.

Для подтверждения выше сказанного рассмотрим фазовый портрет осредненной системы уравнений (4) [2]:

$$\dot{L}_1 = -\frac{3}{2} \omega_0^2 s \sin 2\psi_1, \quad s = 1 + \frac{z^2}{2},$$

$$\dot{\psi}_1 = \frac{L_1}{p} - \omega_0$$

(рис. 8, б). Этот портрет построен для $L_{1r} = (L_1 - p\omega_0) \cdot 1000$. Видны рисунки, аналогичные выше названным. На рис. 8, в также показан фазовый портрет усредненной системы при $z = 0.82$, приближенно рассчитанном из условия, что период маятниковых колебаний усредненной системы T относится к периоду продольных колебаний T_ω для угла 6° как $3 : 13$. Видно, что при небольшом начальном угле маятниковых колебаний резонансы имеют ха-

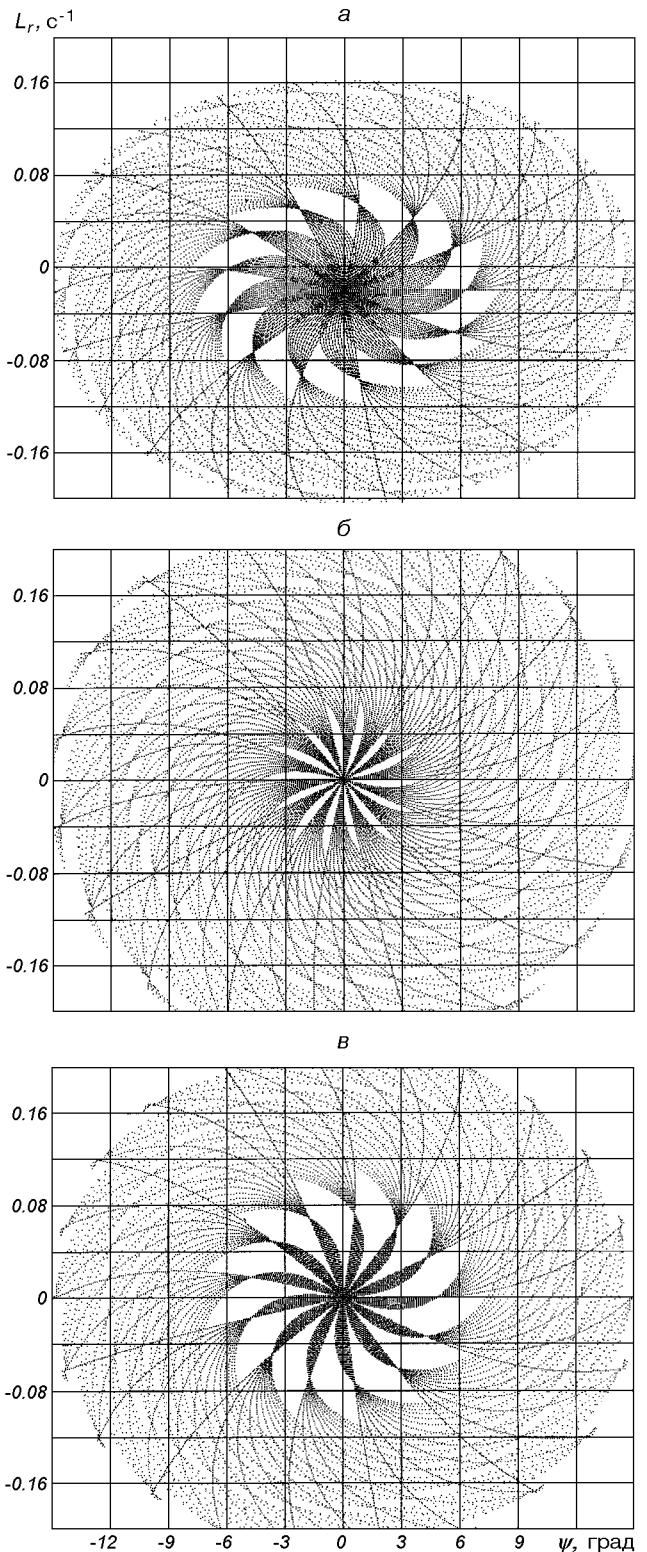


Рис. 8. Фазовые портреты: а — семейства $L_0 = \omega_0(p - 0.019)$, 150 точек на траектории; б — усредненной системы, $z = 0.82$

рактер почти простой соизмеримости несвязанных между собой движений.

Вместе с тем рассматриваемый резонанс $8 : 35$ — резонанс нелинейной системы. Более детальный анализ семейства 1 траекторий вблизи этого резонанса позволил выявить характерную петлю нелинейного резонанса на фазовом портрете. Рассмотрим изменение энергии маятниковых колебаний вблизи этого резонанса.

На рис. 9 показаны последовательности максимальных значений последовательности h_{1+a} семейства 1 для $\psi_0 = 11.85^\circ + i \cdot 0.005^\circ$. Учитывая определенную соизмеримость траекторий, каждая точка последовательности строилась путем выбора максимального значения из значений h_{1+a} за время, равное $35T_\omega$. На начальном интервале движения для траекторий лежащих ниже резонанса характерно увеличение энергии маятниковых колебаний, а для траекторий, лежащих выше — ее уменьшение. При построении оценок энергии маятниковых колебаний, основанных на вычислении максимальных значений угла отклонения маятника от местной вертикали наблюдается та же закономерность изменения энергии маятниковых колебаний при переходе через резонанс. Эта же закономерность проявляется и для других резонансов достаточно низкого порядка.

Таким образом, анализ траекторий для небольших углов отклонения маятника от местной вертикали $\psi < 20^\circ$ позволяют сделать следующие выводы-предположения:

1. Все рассмотренное пространство траекторий разделено на отдельные группы резонансов;
2. Нелинейный характер резонансов в данной области слабо выражен, т. е. резонансные группы траекторий очень узки;
3. Во всей области имеет место плавное изменение порядка соизмеримости маятниковых и продольных колебаний;
4. При прохождении через отдельный резонанс семейства траекторий, порожденного отдельной линией в пространстве начальных условий, наблюдаются изменения знака приращения энергии маятниковых колебаний, так что на начальном интервале времени для траекторий, имеющих изначально меньшее значение энергии, это приращение положительно, а для траекторий с большим значением, чем значение центральной резонансной траектории, — отрицательно.

Первый вывод-предположение ставит вопрос о границах групп резонансов: существуют ли траектории, разделяющие резонансы, и поэтому не принадлежащие ни к одному резонансу? Численное исследование рассматриваемой системы не может

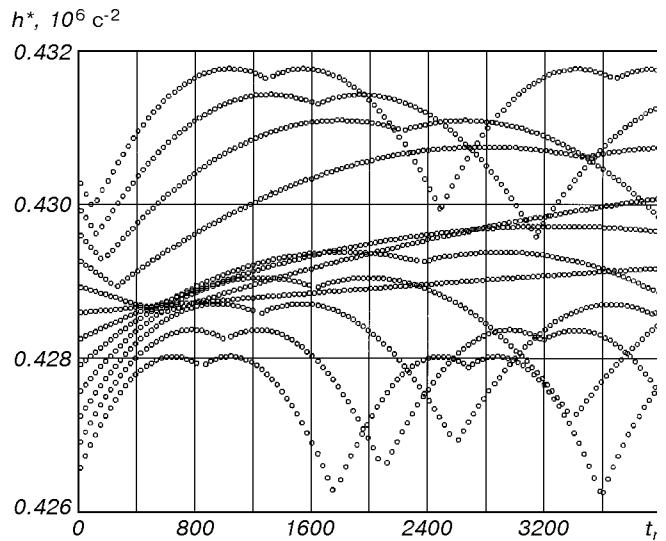


Рис. 9. Огибающие последовательностей h_{1+a} для $\psi_0 = 11.85^\circ + i \cdot 0.005^\circ$

дать ответа. Можно лишь предположить, что в рассмотренной области этот вопрос разрешается увеличением порядка соизмеримости между продольными и маятниковыми колебаниями до бесконечности характерного периода траектории.

Третий вывод-предположение говорит и о том, что происходит и плавное изменение характера траекторий. В частности, в траекториях резонансов высоких порядков проявляются соизмеримости соседних резонансов более низкого порядка.

Четвертый вывод-предположение относится, в силу принятых мер изменения энергии маятниковых колебаний, только к резонансам достаточно низкого порядка. Для резонансов более высокого порядка он не наблюдаем. Вместе с тем, очевидно, что определив нужным образом нестрогое понятие огибающей максимальных значений, получим аналогичные выводы и для резонансов высокого порядка. Это предположение связывает нелинейный резонанс с образом воронки. Представим себе плоскость семейства траекторий, порожденного определенной прямой в пространстве начальных условий, где по оси OY откладывается время, а по оси OX — значение энергии маятниковых колебаний. Тогда изменение энергии траекторий в резонансах низкого порядка можно представить как движения шарика в соответствующих воронках рис. 10, которые расположены вдоль прямой времени симметрично одна за другой. Картина подобна движению по бесконечной доске Гальтона, где вместо гвоздей расположены воронки, и для исследованных регулярных траекторий воронки не перекрываются,

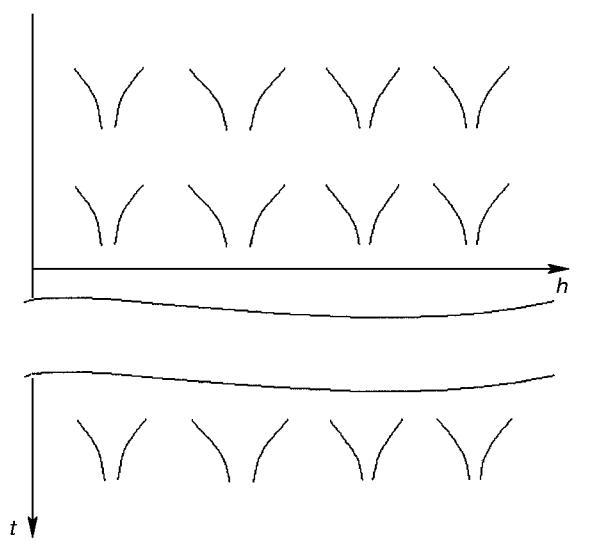


Рис. 10. Образ движения в резонансах низкого порядка: движение шарика в воронках

т. е. движение шарика происходит все время в образе одной и той же воронки.

Нелинейные резонансы определяют структуру фазового пространства системы возле области стохастического слоя. Резонансные соотношения периодов колебаний, в силу увеличения периода маятниковых колебаний, монотонно уменьшаются вдоль прямой, порождающей семейство 1. Для колебательных движений маятника первый наблюдаемый резонанс достаточно низкого порядка есть резонанс $3 : 13$ при $\psi_0 \approx 6^\circ$, последний — $1 : 6$ при $\psi_0 \approx 60^\circ$.

Анализ резонансов для различных параметров системы позволяет сделать вывод, что их ширина (максимальное приращение угла ψ , или длина отрезка порождающей прямой, проходящей через центр резонанса, принадлежащего этому резонансу) зависит как от порядка резонанса, так и от расположения резонанса вдоль прямой, порождающей семейство 1. Порядок резонанса определяет величину перераспределаемой энергии между продольными и маятниковыми колебаниями: с понижением порядка резонанса увеличивается приращение энергии маятниковых колебаний. Расположение резонанса относительно начальной прямой семейства 1 определяет отклик системы на приращение энергии маятниковых колебаний. Можно утверждать, что при приближении к $\psi_0 = 90^\circ$ ширина резонанса для одного и того же приращения энергии маятниковых колебаний резко увеличивается.

Для рассматриваемых параметров системы резонанс самого низкого порядка есть резонанс $1 : 5$. На рис. 11, а для семейства, порожденного прямой $L_0 =$

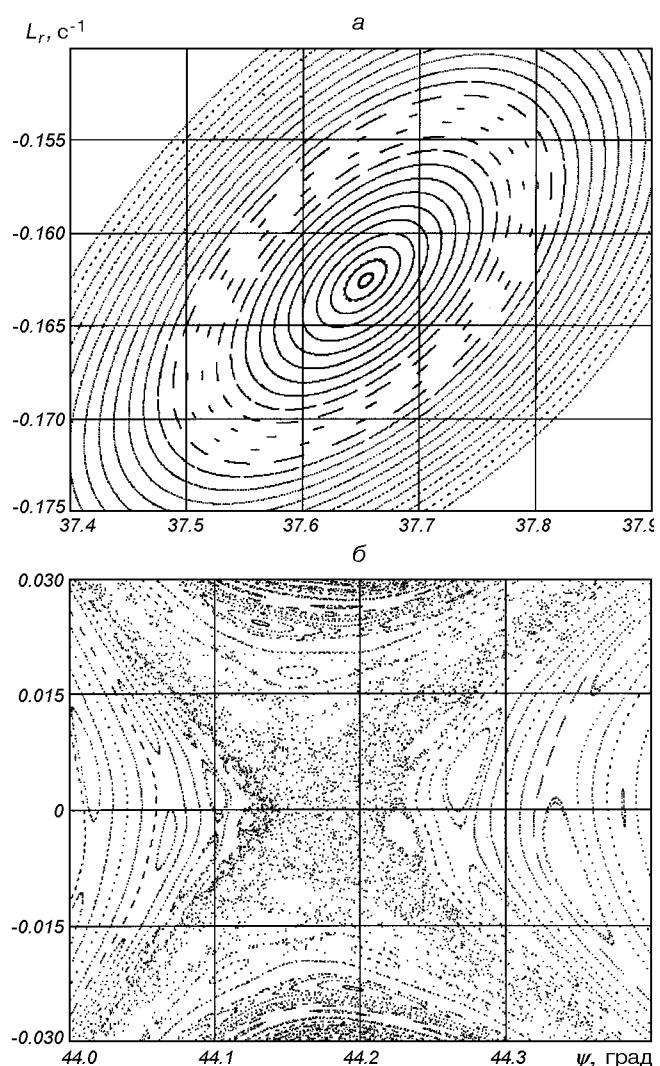


Рис. 11. Фазовый портрет: а — резонанса $1 : 5$; б — на границе резонанса $3 : 16$

$= \omega_0(p - 0.162)$, проходящей почти через центр резонанса, показан фазовый портрет резонансных траекторий. Траектории строились для $\psi_0 = 37.4^\circ + i \cdot 0.01^\circ$. Видно, что фазовое пространство резонансных траекторий подобно фазовому пространству системы для малых углов ψ . Все фазовое пространство разделено на отдельные группы вторичных резонансов — резонансов между изменением сдвига фазы основного резонанса и фазой продольных колебаний. Ширина вторичных резонансов, подобно ширине первичных резонансов, зависит от порядка соизмеримостей и их удаления от центра первичного резонанса. Ширина вторичных резонансов зависит также от первичного резонанса — его резонансного соотношения периодов колебаний и

расположения вдоль прямой, порождающей семейство 1. Анализ показывает, что при уменьшении резонансного соотношения периодов первичного резонанса и при смещении центра резонанса к сепаратрисе невозмущенного движения, ширина вторичных резонансов увеличивается. На рис. 11, б показан фазовый портрет системы на границе резонанса 3 : 16. Отчетливо виден стохастический слой, расположенный на границе резонанса, а также первичные и вторичные резонансы, вплотную расположенные к этому слою.

Исследования изменения энергии маятниковых колебаний резонансных траекторий позволяют связать резонанс достаточно низкого порядка с образом пространственной воронки, на поверхности которой нанесены, подобно резьбе на гайках, бороздки (канавки, складки), соответствующие вторичным резонансам. Соответственно изменится и образ движения в нелинейных резонансах приведенный на рис. 10. Представим себе плоскость, образованную порождающими семейства траекторий прямыми, OXZ , где по оси OX откладывается энергия маятниковых колебаний, а по оси OZ — угол ψ . Тогда изменение параметров движения в резонансах низкого порядка во времени можно представить как движение шарика в соответствующих канавках и воронках, расположенных вдоль прямой времени оси OY симметрично одна за другой. На самом деле картина движения в нелинейных резонансах более сложная, поскольку на вторичных резонансах могут быть, в свою очередь, вторичные резонансы и так далее.

ОБРАЗ ХАОСТИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ

Увеличение плотности расположения резонансов низкого порядка и ширины вторичных резонансов при приближении к стохастическому слою позволяет сделать вывод-предположение, что причиной возникновения хаотического движения является перекрытие резонансов. Хаотическая траектория, в отличие от регулярной, не принадлежит к определенной соизмеримости маятниковых и продольных колебаний. Она проходит через группу резонансов, в своем движении «перескакивая» на соседние соизмеримости этой группы. Построенный выше образ нелинейного резонанса позволяет построить, как представляется, наглядный образ хаотической траектории. Движению шарика в перекрывающихся воронках (перекрывающиеся части воронок нужно убрать) при соответствующем его начальном положении будут доступны все перекрывающиеся воронки. При начальном положении шарика в ниж-

ней части воронки он может остаться в этой воронке и не перейти в другие. Соответствие построенного образа реальному движению системы подтверждают сохраняющиеся «островки» резонансов в стохастическом слое колебательных и вращательных движений маятника (рис. 6), и исследования стохастического слоя только колебательных движений маятника возле границы резонанса 3 : 16 (рис. 11, б).

Откуда берется случайность? Построенный образ хаотического движения показывает большую сложность этого движения и его неустойчивость от начальных условий. Траектория пересекает складки вторичных резонансов, движется вдоль разделяющих каёмок. Но большая сложность траектории и ее случайный характер это не одно и тоже. Действительно, рассматриваемая система есть система обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, и для нее выполняются теоремы существования и единственности решения. Под случайнym процессом понимается процесс, когда одно событие может порождать ряд событий (по крайней мере два). Поскольку не рассматриваются никакие внешние случайные силы и начальные условия определены точно, то возникает вопрос: откуда берется случайность, свойственная хаотической траектории?

Рассмотрим движение обычного математического маятника. В этом случае уравнения движения интегрируются аналитически в явном виде. Рассмотрим траекторию, соответствующую сепаратрисе, разделяющей колебательные и вращательные движения. Каждая фазовая точка этой траектории порождает эту траекторию и в этом смысле принадлежит одному и тому же событию. Рассмотрим процесс численного интегрирования уравнений движения математического маятника. Будем считать, что начальные условия движения точно принадлежат сепаратрисе. Нетрудно себе представить, что в результате численного интегрирования при таких начальных условиях можно получить либо колебательное движение маятника, либо вращательное, либо некоторую последовательность чередований этих движений. Рассматривая различные режимы движения как различные события, получим, что одно событие порождает целый ряд событий, и в этом смысле наблюдаемый процесс является случайным. Причем точность метода численного интегрирования никак не изменит этого вывода, поскольку сколь угодно малое отклонение от сепаратрисы приводит к качественно отличной траектории (иному событию). Таким образом, определенные свойства дифференциальных уравне-

ний и невозможность абсолютно точного (аналитического) их решения порождают в детерминированной системе случайный процесс. Поскольку большинство систем уравнений динамики неинтегрируемо, то во многих случаях детерминированная динамика системы плюс метод ее исследования могут порождать случайный процесс.

В рассматриваемом случае орбитального маятника перекрытие резонансов приводит к тому, что траектория движения многократно пересекает границы резонансов и вторичных резонансов: переходит из воронки в воронку, из канавки в канавку, пересекая каемки и грани и двигаясь вдоль них. Понятно, что в этом случае численное интегрирование уравнений движения будет порождать случайный процесс.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Явление детерминированного хаоса — не порождение математической абстракции, а явление, присущее динамике механических систем. Нам известны достаточно громоздкие механические системы для создания случайных процессов: лототрон, ruletka. Можно представить себе и другие системы. Проведенный анализ показал, что даже в простейших механических системах существуют области движений, где две как угодно близкие изначально траектории, проходя через «разделители движений», расходятся как угодно далеко в данной области. Но это — случайность, обусловленная случайностью начальных данных. Дело же обстоит значительно сложней. Представим себе математический маятник в положении неустойчивого вертикального равновесия. Т. е. предположим, что нет никаких неучтенных сил, и начальные данные мы можем задавать абсолютно точно. Но тогда этот детерминированный процесс не наблюдаем: любое наблюдение за процессом разрушит условие равновесия. Достаточно будет приблизиться исследователю, или упасть лучу света на маятник, как процесс нарушится. Представим теперь, что мы имеем дело с механической системой, проходящей в своем движении целое множество положений неустойчивых равновесий (например, целое множество математических маятников в положении неустойчивого равновесия). Тогда движение системы будет наблюдаться только как случайный процесс.

Здесь имеет место состояние системы, при котором нельзя ограничить, выделить конечную область (систему) влияния, пренебрегая другими частями мира как мало влияющими на движение системы.

Самые малые воздействия могут оказывать существенное влияние на движение системы. При этом детерминизм в понимании, что каждому следствию есть определенные причины, поскольку причин может быть бесконечно много, фактически смыкается с принципом случайности — нельзя определить всех причин данного следствия.

Явление детерминированного хаоса в динамике простейших механических систем заставляет повторно взглянуть на историю, достижения и проблемы классической механики. Так, построенный образ хаотического движения и нелинейных резонансов говорит не только о невозможности построения аналитического решения исходных дифференциальных уравнений, но и о невозможности построения удовлетворительного приближенного решения имеющимися математическими средствами. Сложная структура фазового пространства и стохастические слои ставят вопросы о возможностях численного интегрирования.

Существенные изменения в движение системы вносят малые диссипативные силы, которые всегда есть в реальных механических системах. Воздействие малых диссипативных сил приводит к новым явлениям, таким как атTRACTоры и синхронизация движения. Анализ влияния диссипативных сил на динамику системы и анализ явления детерминированного хаоса с точки зрения проблем механики являются целями дальнейших исследований.

Работа выполнена при поддержке INTAS, грант № 99-01096.

1. Заславский Г. М., Сагдеев Р. З. Введение в нелинейную физику: От маятника до турбулентности и хаоса. — М.: Наука, 1986.—368 с.
2. Пироженко А. В. Хаотические движения в динамике космических тросовых систем. 1. Анализ проблемы // Космічна наука і технологія.—2001.—7, № 2/3.—С. 83—89.

CHAOTIC MOTIONS IN THE DYNAMICS OF SPACE TETHERED SYSTEMS. 2. MECHANICAL IMAGE OF THE PHENOMENON

A. V. Pirozhenko

The determined-chaos phenomenon in the dynamics of space tethered systems is studied by the numerical integration of the model problem equations of motion of an orbital pendulum with a periodically varying boom length. The energy variations in the pendulum oscillations are estimated and of individual trajectories and their sets are qualitatively analysed. A mechanical image of random regimes of motion is constructed, and it is used to analyse the essence of the phenomenon.