

УДК 629.78

А. В. Пироженко

Институт технічної механіки НАН України і НКА України, Дніпропетровськ

Хаотические режимы движения в динамике космических тросовых систем. 1. Анализ проблемы

Надійшла до редакції 08.10.99

Аналізується стан проблеми детермінованого хаосу в динаміці космічних тросових систем. Сформульовано модельну задачу для дослідження сутності стохастичних режимів руху при коливаннях мас по внутрішніх степенях вільності. Розглянуто ряд підходів математичного аналізу явища і зроблено припущення про неможливість визначення сутності явища традиційними для механіків математичними методами.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Большая протяженность и низкая жесткость космических тросовых систем (КТС) является причиной того, что в большинстве случаев динамика КТС существенно нелинейна, и значительна роль колебаний масс по внутренним степеням свободы. Как известно, явление хаотического движения детерминированных систем характерно для большинства нелинейных систем. Выделение областей такого движения необходимо при исследовании задач динамики, поскольку, вообще говоря, обычные численные методы неприменимы в данных областях движения, и обычная интерпретация результатов расчетов не корректна. Таким образом, решение задач динамики КТС в большинстве случаев связано с решением фундаментальной проблемы нелинейной динамики — проблемы стохастизации и синхронизации движений.

Анализ состояния проблемы хаотических движений в детерминированных системах показал следующее. С одной стороны, на протяжении последних десятилетий ведутся интенсивные исследования проблемы, подтверждением чему служит огромное количество опубликованных работ. С другой стороны, эти исследования как бы застыли на этапе формирования проблемы. Нет достаточно четких

определений предметной области, критериев хаотических движений детерминированных систем и самого понятия. Большое внимание исследователей сосредоточено на уяснении сущности хаотических режимов движения. И здесь достигнут определенный прогресс. Однако довольно полные исследования выполнены на столь отвлеченных модельных задачах (в большинстве своем дискретных во времени, например ставшие уже классическим «преобразование пекаря»), а математические исследования в рамках теории динамических систем настолько глубоки, что соотносить полученные результаты с динамикой реальных механических систем представляется крайне затруднительно. Механических образов явления и понимания его механической сущности фактически нет.

Среди критериев хаотичности траектории движения такие критерии, как непрерывность спектра мощности и убывание корреляционной функции, следует признать неприемлемыми для механических систем. И не только в силу несоответствия этих инструментов исследования задачам аналитической динамики, но и в силу наличия механических систем, траектории которых удовлетворяют этим критериям, но не являются хаотическими. Также очевидно, что экспоненциальная неустойчивость траектории от начальных условий не являет-

ся достаточным условием хаотического движения (функция $x = x_0 e^t$, где x_0 — начальное значение x , не хаотична). Фактически единственным способом определения хаотичности траектории есть наблюдение за ней, и единственным приемлемым методом наблюдения за траекторией есть метод отображений Пуанкаре, основанный на численном интегрировании дифференциальных уравнений задачи. При этом желательно, чтобы фазовое пространство задачи имело размерность не более трех-четырех. Траекторию относят к хаотической, если на фазовом портрете наблюдается характерная полоса точек отображения Пуанкаре — «стохастический слой». Траекторию относят к регулярной, если ее характер соответствует представлению об квазипериодических или периодических траекториях.

По сравнению с вопросом «что это?» вопросам «что из этого может следовать?» и «как это можно использовать?» уделялось значительно меньше внимания.

Основываясь на таком видении проблемы, для исследования хаотических режимов движения в динамике КТС естественно рассмотреть простейшую модельную задачу их динамики.

Определение модельной задачи. Рассмотрим движение двух точечных масс, соединенных невесомой линейной пружиной. Такая модель является частью расчетных моделей динамики троса [2, 6] и позволяет учитывать колебания масс по внутренним степеням свободы. Рассмотрим движение системы в плоскости круговой орбиты центра масс. Тогда уравнения движения можно записать в виде [1, 4]

$$\begin{aligned} \dot{G} &= -1.5 \omega_0^2 r_1^2 \sin 2\psi, & \dot{\psi} &= \frac{G}{r_1^2} - \omega_0, \\ \dot{b} &= \frac{\omega_0^2}{k} F_b(G, r), & \dot{\omega} &= k + \frac{\omega_0^2}{k} F_\omega(G, r), \end{aligned} \quad (1)$$

где $r_1 = a + b \cos \omega$ — расстояние между материальными точками, ω_0 — угловая скорость орбитального движения центра масс, G — величина приведенного кинетического момента движения относительно центра масс системы, ψ — угол между местной вертикалью и линией, соединяющей материальные точки, F_b, F_ω — некоторые функции.

Анализ нерезонансных режимов движения системы [1, 4, 5] показывает, что в случае, когда $(\omega_0/k)^2 = \varepsilon \ll 1$, в первом приближении по ε амплитуда колебаний постоянна: $\dot{b} = 0$. Этот факт, а также цели исследований позволяют упростить задачу и считать, что $r = a + b \cos \omega$, где $\dot{\omega} = k$ (a, b, k — постоянные).

Таким образом, в качестве модельной задачи

будем рассматривать движение на круговой орбите маятника с периодически изменяющейся длиной штанги — движение орбитального маятника

$$\begin{aligned} \dot{G} &= -1.5 \omega_0^2 r_1^2 \sin 2\psi, & \dot{\psi} &= \frac{G}{r_1^2} - \omega_0, \\ \dot{\omega} &= k, & r_1 &= a + b \cos \omega. \end{aligned} \quad (2)$$

Проведя замену переменных $L = G/a^2$, получим

$$\dot{L} = -\frac{3}{2} \omega_0^2 r^2 \sin 2\psi, \quad \dot{\psi} = \frac{L}{r^2} - \omega_0, \quad (3)$$

где $r = 1 + z \cos \omega$, $z = b/a$. Отсюда видно, что в отличие от математического маятника угловое движение орбитального маятника не зависит от длины штанги.

Предварительный анализ. Цели исследований. Движение орбитального маятника можно разделить на два режима движений — быстрых ($\psi \gg \omega_0$) и медленных ($\dot{\psi} \sim \omega_0$) угловых движений. При $k \gg \omega_0$ и в том, и другом режиме движения в области значений $z \ll 1$ влияние продольных колебаний на угловое движение пренебрежимо мало. Другими словами, согласно КАМ-теории траектории движения системы разделены инвариантными торами и «вечно» близки к невозмущенным траекториям — траекториям движения гантели с постоянной длиной штанги. Определение значений z и ω_0/k , при которых выполняются условия теоремы Колмогорова, представляет собой отдельную задачу. Приблизительную оценку влияния продольных колебаний на угловые движения орбитального маятника можно получить из уравнения

$$\frac{d^2 \varphi}{d\omega^2} + 3 \frac{\omega_0^2}{k^2} \sin \varphi - 2 \left(\frac{d\varphi}{d\omega} + 2 \frac{\omega_0}{k} \right) \frac{z \sin \omega}{1 + z \cos \omega} = 0,$$

где $\varphi = 2\psi$. Из этого уравнения следует, что в режиме медленного углового движения маятника продольные колебания становятся пренебрежимо малыми, когда $z \ll \omega_0/k \ll 1$. Далее везде рассматриваются случаи, когда продольные колебания оказывают существенное влияние на движение системы, т. е. либо $z \sim 1$, либо $\omega_0/k \sim 1$.

Предположим, что $k \gg \omega_0$ и рассмотрим режим медленного углового движения маятника. В этом случае L и ψ можно рассматривать как медленные переменные. Уравнения первого приближения, полученные усреднением (3) по ω , имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{L}_1 &= -\frac{3}{2} \omega_0^2 s \sin 2\psi_1, & s &= 1 + \frac{z^2}{2}, \\ \dot{\psi}_1 &= \frac{L_1}{p} - \omega_0, & p &= (1 - z^2)^{3/2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнения (4) интегрируются в эллиптических

функциях. Интеграл энергии имеет вид

$$h = \dot{\psi}_1^2 + 3\omega_0^2 \beta \sin^2 \psi_1, \quad \beta = \frac{s}{p}. \quad (5)$$

Для колебательного движения маятника, $h < 3\omega_0^2 \beta$,

$$\sin \psi_1 = k_1 \operatorname{sn}[\omega_0 \sqrt{3\beta}(t - t_0) + F(\varphi_0, k_1^2), k_1^2], \quad (6)$$

где

$$k_1 = \max |\sin \psi_1|, \quad F(\varphi_0, k_1^2) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1 - k_1^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}},$$

$$\sin \varphi_0 = \sin \psi_0 / k_1;$$

t_0, ψ_0 — начальное время и начальное значение ψ .

Период колебаний усредненного маятника равен

$$T = \frac{4}{\omega_0 \sqrt{3\beta}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{4}{\omega_0 \sqrt{3\beta}} K(k_1). \quad (7)$$

Следовательно, с увеличением амплитуды продольных колебаний увеличивается частота угловых колебаний, стремясь к бесконечности при $z \rightarrow 1$. На рис. 1 показана зависимость от z отношения частоты f_a угловых колебаний усредненного маятника к частоте f угловых колебаний маятника с постоянной длиной штанги.

Уравнения первого приближения (4) хорошо описывают колебания маятника при достаточно большой частоте продольных колебаний. Так, при $k = 0.1 \text{ c}^{-1}$, $z = 0.8$, $\omega_0 = 0.001 \text{ c}^{-1}$ (далее везде $\omega_0 = 0.001 \text{ c}^{-1}$) фазовые портреты угловых движений усредненного маятника (4) и системы (3), полученные сечением фазового пространства плоскостью $r = 1 + z$ практически совпадают. (Фазовое пространство системы (3) можно рассматривать как четырехмерное пространство переменных L, ψ, r, \dot{r} . Фазовый портрет системы (3) строится отображением Пуанкаре — сечением фазового пространства плоскостью $r = \text{const}, \dot{r} = \text{const}$, где условие $\dot{r} = \text{const}$

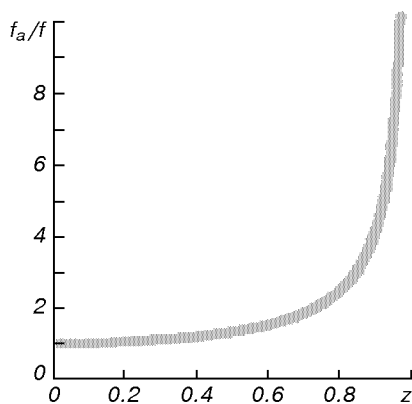


Рис. 1. Отношение частот угловых колебаний маятников

с точностью до знака определяется условием $r = \text{const}$. По оси абсцисс откладывается угол ψ , по оси ординат — величина $L_r = 1000 \cdot (L - p\omega_0)$.

Отличия фазовых портретов наблюдаются лишь в области, близкой к сепаратрисе, отделяющей вращательные и колебательные движения в усредненной системе (4). В исходной системе (3) сепаратриса как бы распадается на полосу нерегулярных траекторий. Более детальное исследование этих траекторий показывает медленное изменение энергии (амплитуды) маятниковых колебаний с переходами во вращательные и колебательные движения. Отметим, что численное исследование траекторий, близких к сепаратрисе, требует тщательного обос-

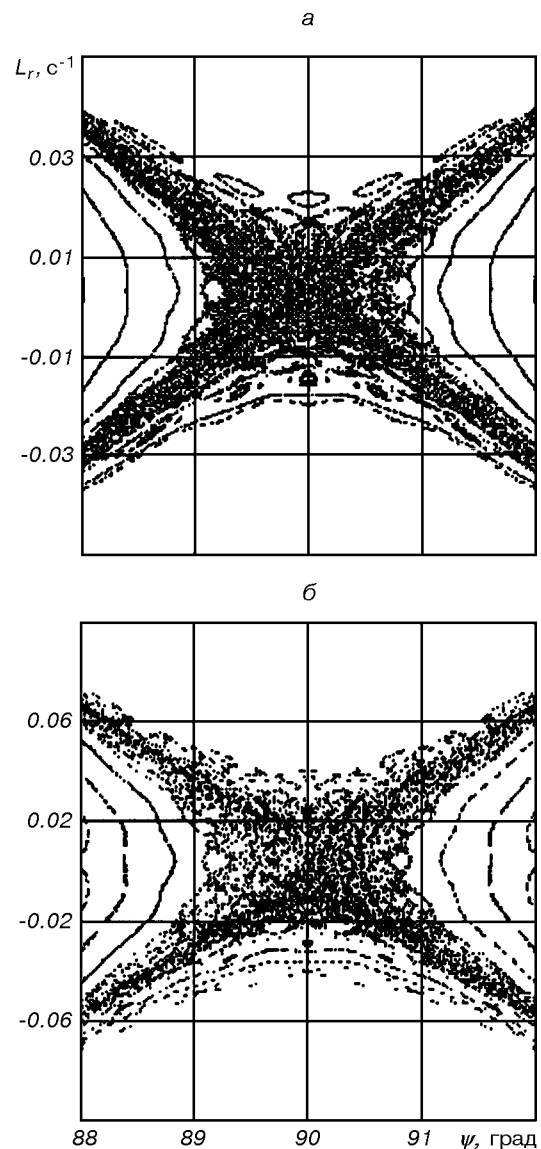


Рис. 2. Фазовый портрет: а — $r = 1 + z, z = 0.8, k = 0.06 \text{ c}^{-1}$, б — $r = 1 + z, z = 0.2, k = 0.0191 \text{ c}^{-1}$

нования расчетного метода. Проведенные предварительные исследования не позволили решить вопрос о принадлежности данных траекторий к хаотическим. Отметим лишь, что ширина полосы этих траекторий очень мала, а их нерегулярный характер вполне согласуется с механическим представлением о поведении системы.

Полоса хаотической траектории вблизи сепаратрисы отчетливо проявляется для $z = 0.8$ при значениях $k < 0.06 \text{ с}^{-1}$. Так, на рис. 2, а видна полоса точек пересечения фазового потока траектории с плоскостью $r = 1 + z$. Характер распределения этих точек позволяет отнести данные траектории к хаотическим. С уменьшением частоты продольных колебаний при фиксированной их амплитуде ширина полосы хаотических движений увеличивается. Для других значений амплитуды продольных колебаний хаотические движения будут проявляться при других частотах продольных колебаний. Приблизительный пересчет этих величин может быть выполнен на основании равенства отношений частоты маятниковых колебаний усредненных уравнений (4) к частоте продольных колебаний. На рис. 2, б приведен фазовый портрет сечения Пуанкаре для $z = 0.2$ и полученном значении $k \approx 0.0191 \text{ с}^{-1}$ при пересчете от $z = 0.8, k = 0.06 \text{ с}^{-1}$.

Таким образом, при определенных параметрах (амплитуде и частоте продольных колебаний) в движении системы имеются траектории, которые можно отнести к хаотическим. На рис. 3 показано изменение угла ψ во времени для хаотической траектории. Колебательное движение маятника вдруг без видимых причин переходит во враща-

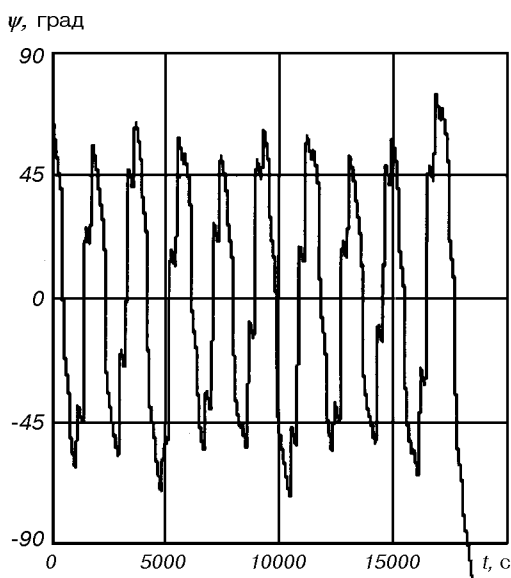


Рис. 3. Изменение угла ψ во времени; $z = 0.8, k = 0.021 \text{ с}^{-1}$

тельное. В выяснении этих причин и определении происхождения таких траекторий и состоит цель дальнейших исследований.

ПОПЫТКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

При исследовании проблемы предпринимались различные попытки ее математического анализа. Ниже приводится краткое описание основных из них.

На основании предварительного анализа можно предположить, что источником стохастических движений является сепаратриса, разделяющая колебательные и вращательные движения маятника. Основываясь на этом предположении, можно дать удовлетворительное объяснение и нерегулярности траекторий, и их случайному характеру, поскольку в невозмущенном движении сепаратриса соответствует неустойчивому положению равновесия и как «ребро монеты» разделяет два качественно отличных режима движений. Приближенный анализ динамики систем вблизи сепаратрисы и расщепление последней является сложным вопросом даже в более простых случаях [3]. При большой амплитуде продольных колебаний требуется существенная доработка схем анализа. Вместе с тем результаты такого анализа дают лишь приблизительную оценку ширины полосы нерегулярных траекторий, но не дают объяснений феномена их хаотичности. Попытка такого объяснения на основе изменения то-

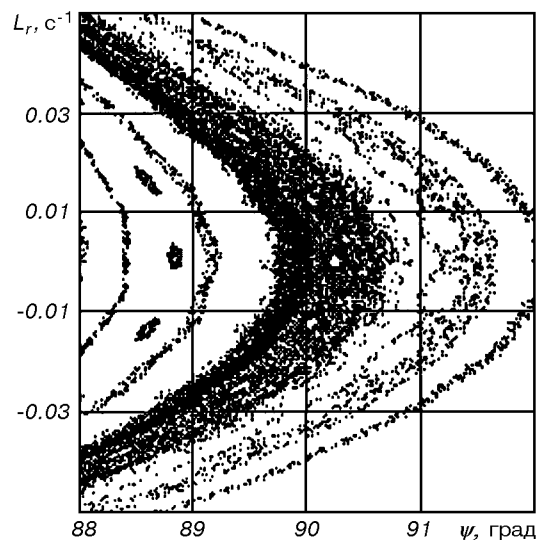


Рис. 4. Фазовый портрет системы (8) $r = 1 + z, z = 0.8, k = 0.051 \text{ с}^{-1}$

пологии сепаратрисы сталкивается с непреодолимыми математическими проблемами.

С другой стороны, численный анализ системы

$$\dot{L} = \begin{cases} -\frac{3}{2}\omega_0^2 r^2 \sin 2\psi, & \text{если } |\psi| \leq 88^\circ, \\ -\frac{3}{2}\omega_0^2 r^2 \operatorname{sign}\psi \sin 88^\circ, & \text{если } |\psi| > 88^\circ, \end{cases} \quad (8)$$

$$\dot{\psi} = \frac{L}{r^2} - \omega_0, \quad r = 1 + z \cos \omega, \quad \dot{\omega} = k,$$

близкой к исходной, но в которой при постоянной длине штанги нет качественно различных движений и нет сепаратрисы, показывает, что стохастические траектории сохраняются (рис. 4).

При попытке построения приближенного решения движения системы (3) вблизи основных резонансов методом последовательных приближений появилось предположение, что причиной возникновения хаотических траекторий являются наведенные резонансы. Под термином «наведенный резонанс» подразумевается следующее. Пусть ψ представляется в виде $\psi = \psi_s + \psi_k$, где ψ_s и ψ_k — соответственно низкочастотная и высокочастотная составляющие колебательный. Тогда при ψ_s , близкой к нулю, ψ_k будет «резонировать» с r^2 , причем подкачка энергии в маятниковое движение будет, по-видимому, носить нерегулярный характер. Здесь существенно, что амплитуда высокочастотных колебаний в некоторые моменты времени значительно превосходит абсолютную величину медленных колебаний. Было построено несколько примеров обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, демонстрирующих это предположение.

Ниже приведен ряд таких примеров из однообразной их серии, для которых исследовались траектории с нулевыми начальными условиями $t_0 = 0$, $x_0 = 0$. Исследование проводилось построением фазовых портретов методом «сечения Пуанкаре»: точка на фазовой плоскости ставилась через интервал $\Delta t = 2\pi$.

Если для уравнения

$$\dot{x} = \cos(t) \cos(20 \sin 0.37t + 15 \cos(t)) \quad (9)$$

с постоянными амплитудами и для уравнения

$$\dot{x} = \cos(t) \cos(20 \sin 0.37t + (0.1x + 15) \cos(t)) \quad (10)$$

удается обнаружить периодический характер траектории, то для уравнения

$$\dot{x} = \cos(t) \cos(20 \sin 0.037t + (1 + 0.1t) \cos(t)), \quad (11)$$

с возрастающей амплитудой быстрых колебаний, траектория очень похожа на хаотическую. Фазовые

портреты уравнений (9) и (10) содержат лишь конечное число точек. Для уравнения (11) характерна целая полоса фазовых точек.

Детальное исследование выдвинутого предположения сталкивается, как представляется, с непреодолимой проблемой исследования свойств интегралов типа $\int \cos t \cos(c_1 \sin \omega_1 t + c_2 \cos \omega_2 t) dt$.

С другой стороны, предположим, что наведенные резонансы являются основной причиной хаотических движений системы (3). Тогда следовало бы ожидать проявления зависимости нерегулярности траекторий от абсолютного значения L . Однако это не так. Более того, следовало бы ожидать, что в системе

$$\dot{L} = -\frac{3}{2}\omega_0^2 r^2 \sin 2\psi, \quad \dot{\psi} = \frac{L}{r^2} \quad (12)$$

должны измениться полосы хаотических траекторий, поскольку в первом приближении колебательное движение ψ (его медленное движение) не изменяется, а L и, следовательно, амплитуда быстрых колебаний ψ уменьшается для $\psi < 0$ и увеличивается для $\psi > 0$. Однако сравнение фазовых портретов систем (3) и (12) как для колебательных, так и для вращательных движений маятника не дает веских оснований для подтверждения предположения.

Анализ уравнений типа (9)—(11) еще раз показывает, что отсутствие видимого порядка не означает стохастичности движения. Начиная изучать динамику достаточно сложных систем, механик-исследователь вначале сталкивается с кажущимся хаосом в их движении. И лишь в результате определенных усилий возможно решение, как представляется, основной задачи теоретических исследований — определение закономерностей в динамике системы. Следовательно, для того чтобы отнести траекторию к хаотической, требуется определенное обоснование этого, а не только отсутствие видимых закономерностей и перечисление неудачных попыток их определить.

Достаточно громоздкое построение уравнений второго приближения методом усреднения дает систему сравнения вида

$$\dot{L}^* = -\frac{3}{2}\omega_0^2 s \sin 2\psi^* + \frac{\omega_0^3}{k} \frac{L^*}{p} I_2(\psi_0, t_0) \cos 2\psi^*, \quad (13)$$

$$\dot{\psi}^* = \frac{L^*}{p} - \omega_0 - \frac{\omega_0^3}{k} \beta I_1(\psi_0, t_0) \sin 2\psi^*.$$

Система (13) верно отражает асимметрию фазового пространства в зависимости от начальных условий. На рис. 5 приведены фазовые портреты системы (3) при сечении плоскостями $r = 1$, $\dot{r} > 0$ и

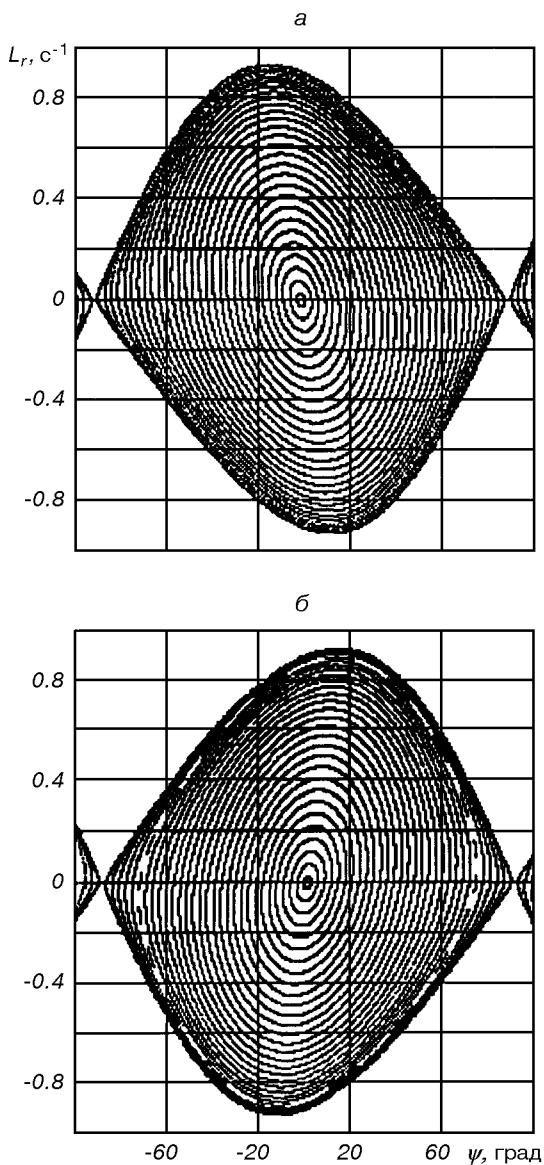


Рис. 5. Фазовый портрет сечением плоскостью $r = 1$, $\dot{r} > 0$ (а) и $r = 1$, $\dot{r} < 0$ (б)

$r = 1$, $\dot{r} < 0$ соответственно. Эту асимметрию фазового пространства нетрудно понять из механических соображений. Она становится очевидной, если записать уравнение для переменной $h = \dot{\psi}^2 + 3\omega_0^2 \sin^2 \psi$, соответствующей энергии маятниковых колебаний,

$$h = -4 \frac{\dot{r}}{r} (\dot{\psi} + \omega_0) \dot{\psi}. \quad (14)$$

Вместе с тем метод усреднения по своей сущности не может описать перераспределения энергии между колебаниями, если основная закономерность этого перераспределения не известна. То есть, не-

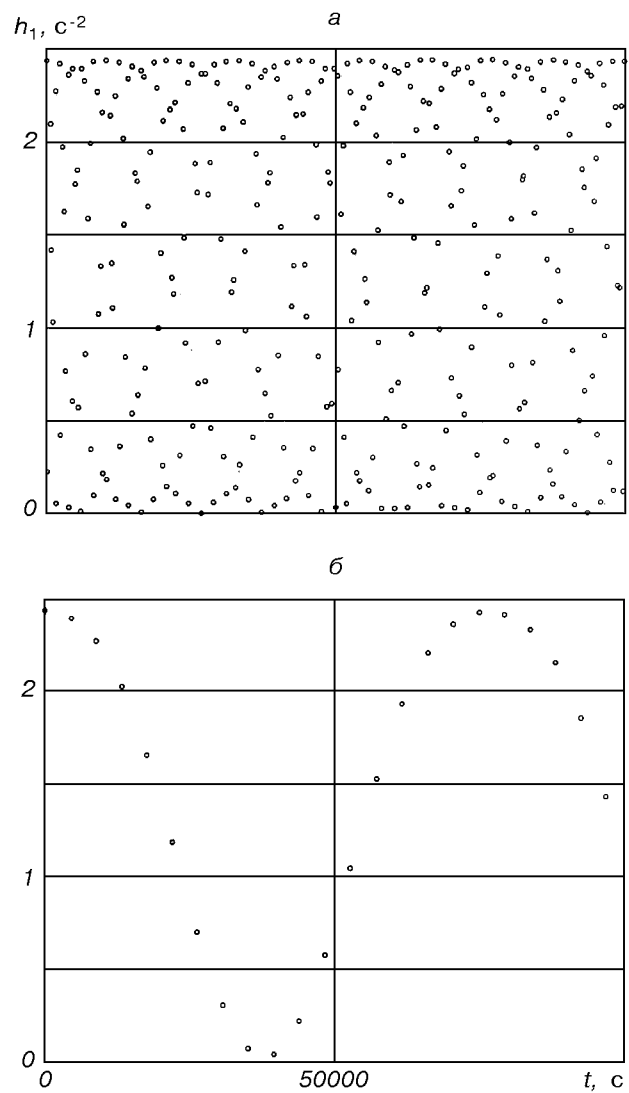


Рис. 6. Последовательность значений h_1 через интервалы времени T_ω (а) и $14T_\omega$ (б)

посредственно он неприемлем для описания хаотических режимов движения.

Анализ методов исследования хаотических траекторий позволяет предположить, что любые попытки построения приближенного решения для хаотических режимов движения будут упираться в неразрешимые математические проблемы. Более предпочтительным выглядит анализ перехода к стохастическому движению, основанный на оценках дискретной во времени последовательности состояний системы. К таковым относится и метод Пуанкаре сечения фазового пространства. В таких подходах проблема построения общего решения дифференциального уравнения заменяется исследованием по-

следовательности определенных интегралов типа

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{x} dt,$$

где $t_i = t_0 + i \cdot (nT_\omega)$, $T_\omega = 2\pi/\omega$ — период продольных колебаний системы, x — некоторая переменная, описывающая движение системы, $i = 1, 2, \dots, n$ — некоторое целое положительное число. В методе Пуанкаре $n = 1$. Более гладкие последовательности можно получить для $n \geq 1$, подбирая его разные значения для разных начальных условий.

На рис. 6 для $k = 0.02 \text{ с}^{-1}$, $z = 0.8$ и начальных условий $L_0 = \beta \cdot \omega_0$, $\psi_0 = 30^\circ$, $t_0 = 0$ изображены последовательности значений функции $h_1 = L^2/(1+z)^2 + 3\omega_0^2 \sin^2 \psi$ системы (3) через интервалы времени T_ω (рис. 6, а) и $14T_\omega$ (рис. 6, б). Гладкость последней последовательности, очевидно, соответствует соизмеримости продольных и маятниковых колебаний, в данном случае 3 : 14. С другой стороны, возможность построения такой гладкой последовательности и говорит о регулярном характере траектории.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенный анализ показывает, что явление хаотических движений в детерминированных системах не может быть достаточно полно проанализировано традиционными для механиков математическими методами. Вообще говоря, попытка анализа хаотического движения путем построения приближенного решения противоречит сущности самого явления отраженного в его названии. Построенные таким способом ранее образы возникновения детерминированного хаоса [3, 7, 8] в большей мере отражают особенность метода исследований или конкретной задачи, и зачастую лишь заслоняют сущность явления. Поэтому дальнейшие исследования проводятся путем качественного, не математического, анализа явления и основываются на измерении характери-

стик отдельных траекторий и их семейств. То есть осуществляются «экспериментальные» исследования, где объектом исследований служит система дифференциальных уравнений выбранной модельной задачи, для которой выполняется численное решение.

Работа выполнена при поддержке INTAS, грант № 99-01096.

1. Алпатов А. П., Белоножко П. А., Пироженко А. В., Шабохин В. А. Об эволюции ротационного движения связки двух тел на орбите // Космич. исследования.— 1990.—28, вып. 5.—С. 692—701.
2. Белецкий В. В., Левин Е. М. Динамика космических тросовых систем. — М.: Наука, 1990.—336 с.
3. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. — М.: Мир, 1984.—528 с.
4. Пироженко А. В. К расчету первого приближения систем с существенно нелинейными колебательными звеньями // Прикладная мат. и мех.—1993.—57, вып. 2.—С. 50—56.
5. Alpatov A., Dranovskii V., Khoroshilov V., et al. Research of dynamics of space cable systems stabilized by rotation // 48th International Astronautical Congress — Turin, Italy, October 6—10, 1997.
6. Misra A. K., Modi V. J., Tyc G., et al. Dynamics of low-tension spinning tethers // Fourth International Conf. on Tethers in Space. — Washington, 10—14 April, 1995.
7. Szemplinska-Stupnicka W. A discussion on necessary and sufficient conditions for steady state chaos // J. Sound and Vibration.—1992.—152, N 2.—P. 369—372.
8. Szemplinska-Stupnicka W. A discussion of an analytical method of controlling chaos in Duffing's oscillator // J. Sound and Vibration.—1994.—178, N 2.—P. 276—284.

CHAOTIC MOTIONS IN THE DYNAMICS OF SPACE TETHERED SYSTEMS. 1. ANALYSIS OF THE PROBLEM

A. V. Pirozhenko

The determined-chaos phenomenon in the dynamics of space tethered systems is analyzed. A model problem the essence of stochastic regimes of motion in the oscillations of masses in the internal degrees of freedom is formulated. A number of calculus approaches to the phenomenon is considered, and the supposition is made that it is impossible to define the essence of the phenomenon by the mathematical methods traditional for mechanics.