

УДК 629.7.054

## Многомерные задачи упругости подвеса поплавкового гироскопа

В. В. Карачун, В. Н. Мельник, В. Г. Лозовик

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», Київ

*Надійшла до редакції 15.02.00*

Наведено аналіз пружної взаємодії поплавкового двостепеневого гіроскопа з акустичним випромінюванням. Розкрито механізм одночасного впливу кутового руху ракети-носія і звукової хвилі на похибки поплавкового приладу.

Среди множества факторов, ухудшающих технические характеристики ракет-носителей, в частности транспортных РН, (продольные колебания, поступательная и угловая вибрации, кинематическое возмущение, тепловой факел ракетных двигателей и другие, менее значимые) особо следует отметить акустическое излучение, структура и интенсивность которого в общем случае носят случайный характер.

Звуковая волна генерирует в материале конструкций и комплектующих (навигационное оборудование, приборы управления и др.) множество форм колебаний, в том числе и резонансных. В конструкциях с небольшим значением импеданса в случае волнового совпадения это может привести к появлению необратимых деформаций, а также усталостных явлений в материале.

Вместе с тем оказалось, что одновременное воздействие аэродинамического шума и других внешних возмущений в совокупности могут привести к таким особенностям динамики изделий, которые не предусмотрены техническими условиями. Наиболее яркое подтверждение этого факта наблюдается в механических системах, содержащих носители кинетического момента.

Для конкретности рассмотрим поплавковый гироскопический датчик угловых скоростей, нашедший широкое применение в навигационных системах

летательных аппаратов. Конструкция его представляет собой два коаксиальных круговых цилиндра, разделенных тяжелой жидкостью. Внутренний (поплавок) заполнен инертным газом и содержит гироскопический датчик угловых скоростей, полуоси которого крепятся к боковой поверхности.

Пусть прибор установлен на ракете таким образом, что при старте РН (например, с поверхности Земли) вектор  $\omega_3$  угловой скорости поворота ее корпуса параллелен оси чувствительности (входной оси) прибора.

Вначале проанализируем совместное действие на гироскоп акустической вибрации торцов поплавка и углового движения корпуса РН, а затем — действие упругих перемещений боковой поверхности поплавка и качки корпуса ракеты. Мерой влияния этих факторов будем считать погрешность гироскопического датчика угловых скоростей.

В предположении отсутствия трансляции энергии изгибного движения торца на боковую поверхность поплавка, можно принять их соединение шарнирным. Тогда изгибное движение торцевой части под действием звуковой волны можно описывать уравнением тонкой круговой пластины, жестко закрепленной по краю:

$$D\Delta^2 W_T(x, y, t) + \rho h \ddot{W}_T(x, y, t) = q(x, y, t), \quad (1)$$

где

$$\Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \stackrel{\text{def}}{=} A$$

— интегрированный лапласиан;  $D = Eh^3/[12(1 - \sigma)]$ ,  $\rho$  и  $h$  — соответственно цилиндрическая жесткость, плотность материала и толщина пластины;  $\sigma$  — коэффициент Пуассона; пластина колеблется в плоскости  $xOy$ . На боковой поверхности  $\Gamma$  пластины

$$\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = R^2, \\ -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \end{cases} \quad (2)$$

выполняются граничные условия первого рода

$$W_{\Gamma}|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial W_{\Gamma}}{\partial n_1}|_{\Gamma} = 0, \quad (3)$$

что соответствует жесткому закреплению.

Уравнение (1) дает удовлетворительные результаты, если отношение толщины пластины к наименьшей длине генерируемой изгибной волны не превышает 0.1. В противном случае следует учитывать сдвиг и инерцию вращения или решать трехмерную задачу.

Асимптотическое решение задачи (1)—(3) найдем в виде линейной комбинации координатных функций

$$W_{\Gamma} \approx c^i u_i(x, y), \quad i = 1, \dots, N \quad (4)$$

со столбцом

$$C = (c^1 \ c^2 \ \dots \ c^N)^T = G^{-1} F, \quad (5)$$

где

$$G = \frac{4^5}{R^6} \pi \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 19 & 7 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 7 & 19 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

— матрица Грама образов координатных функций, а элементы столбца  $F$  имеют вид:

$$F = \frac{3^2}{R^4} \begin{vmatrix} 2I_0 \\ \frac{6}{R} I_x \\ \frac{6}{R} I_y \\ -2I_0 + \frac{15}{R^2} I_x^2 + \frac{3}{R^2} I_y^2 \\ -2I_0 + \frac{3}{R^2} I_x^2 + \frac{15}{R^2} I_y^2 \\ \frac{12}{R^2} I_{xy} \end{vmatrix},$$

где

$$\iint_{x^2+y^2 \leq R^2} f(x, y) dx dy = I_0,$$

$$\iint_{x^2+y^2 \leq R^2} x f(x, y) dx dy = I_x,$$

$$\iint_{x^2+y^2 \leq R^2} y f(x, y) dx dy = I_y,$$

$$\iint_{x^2+y^2 \leq R^2} x^2 f(x, y) dx dy = I_x^2 \quad \text{и т. д.},$$

$f(x, y) \approx c^i v_i(x, y)$ ,  $v_i = A u_i$  — образы функций  $u_i$ .

Система линейно независимых функций

$$u_i = u_i(x, y), \quad x^2 + y^2 \leq R^2, \quad z = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (6)$$

принадлежит к области определения бигармонического оператора  $A = \Delta^2$  и удовлетворяет условиям (2).

В качестве координатных выберем функции

$$u_1 = \left(1 - \frac{x^2}{R^2} - \frac{y^2}{R^2}\right)^2, \quad u_2 = \frac{x}{R} u_1, \quad u_3 = \frac{y}{R} u_1, \quad (7)$$

$$u_4 = \frac{x^2}{R^2} u_1, \quad u_5 = \frac{y^2}{R^2} u_1, \quad u_6 = \frac{xy}{R^2} u_1.$$

Задавая акустическое воздействие в виде плоской волны давления

$$P = P_0 \exp i(\omega t - \mathbf{k}_0 \mathbf{r}_0),$$

где  $\mathbf{k}_0 = n\omega/c_0$  — волновой вектор;  $\mathbf{n}$  — единичный вектор распространения волны;  $\mathbf{r}_0$  — радиус-вектор точки пространства;  $P_0 = 160$  дБ при радиусе  $R = 0.02$  и жесткости  $D = 5$  Н·м прогиб алюминиевой пластины, например, при частоте  $\omega = 1000$  с<sup>-1</sup> имеет вид (рис. 1) и составляет около 50 нм в центре.

Скорость изгибного движения торцов является относительной к корпусу прибора. Угловое движение ракеты со скоростью  $\omega_3$  — переносным. Возникающие при этом силы инерции Кориолиса  $dF_{\text{и}}^C(t) = -dm \mathbf{W}_C(t)$  образуют пару с моментом (рис. 2)

$$M_{\text{и}}^C(t) = L W_C(t) \int dm = 2m_{\text{T}} L \omega_3(t) \dot{W}(t) \sin[\omega_3 t, \hat{\mathbf{W}}_{\text{T}}(t)], \quad (8)$$

где  $L$  — длина поплавка,  $m_{\text{T}}$  — масса торцевой пластины поплавка.

В соответствии с теоремой Резаля гироскоп начнет прецессировать со скоростью

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = \mathbf{M}_{\text{и}}^C(t), \quad (9)$$

где  $\mathbf{H}$  — кинетический момент гироскопа.

Угловая скорость прецессии определяется соотношением

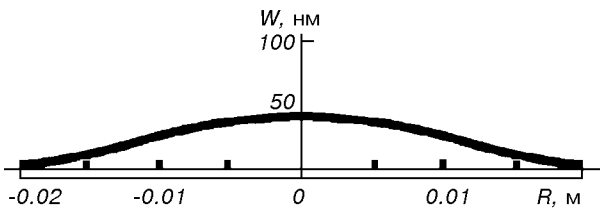


Рис. 1. Прогиб торцевой поверхности поплавка под действием акустической волны

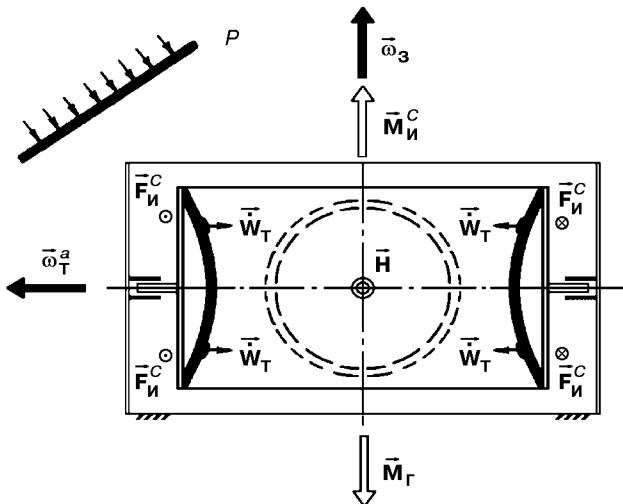


Рис. 2. Влияние прогибов торцов поплавка на прецессию гироскопа

$$\begin{aligned} \omega_T^a(t) &= \frac{M_{И}^c(t)}{H \sin(\mathbf{H}, \hat{\omega}_T^a)} = \\ &= \frac{2m_T L \omega_3(t) \dot{W}(t) \sin[\omega_3(t), \hat{W}_T(t)]}{H \sin(\mathbf{H}, \hat{\omega}_T^a)}. \end{aligned} \quad (10)$$

Как следует из формулы (10), отсутствие качки корпуса ракеты приведет к отсутствию девиации оси гироскопа вместе с поплавком относительно цапф.

Прецессия гироскопа вызовет появление гироскопического момента  $M_{Г}(t)$ , который будет уравновешивать  $M_{И}^c(t)$ , т. е.

$$\mathbf{M}_{Г}(t) = \mathbf{H} \times \omega_T^a = -\mathbf{M}_{И}^c(t).$$

Движение поплавка относительно выходной оси будет происходить до тех пор, пока не будет приостановлено моментом сил упругости пружины.

В свою очередь, элементы боковой цилиндрической поверхности поплавка под действием волны акустического давления  $P$  приобретут касательную  $V(t)$  и радиальную  $W(t)$  составляющие перемеще-

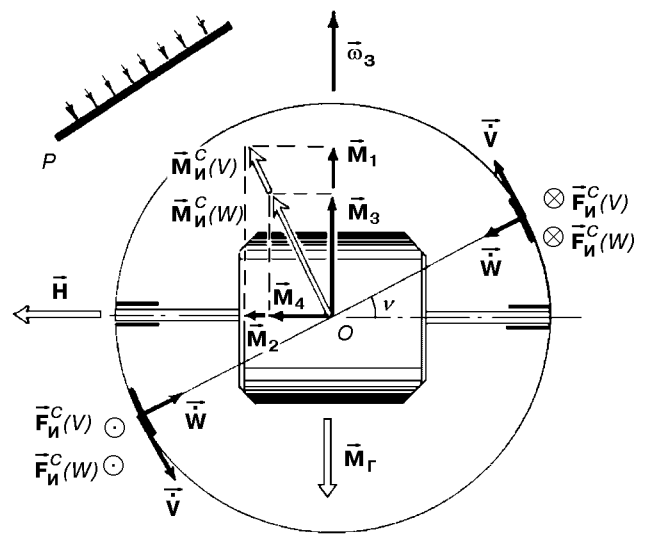


Рис. 3. Влияние перемещений боковой поверхности на девиацию главной оси

ния (рис. 3). Как и в предыдущем случае, тангенциальная составляющая  $V(t)$  приведет к появлению сил инерции Кориолиса и, соответственно, момента

$$\begin{aligned} M_{И}^c(V) &= \int_{m_{П}} 2RW_c dm = \frac{4J_{П}\omega_3(t)\dot{V}(t)\sin[\omega_3(t), \hat{V}(t)]}{R} = \\ &= \frac{4J_{П}\omega_3(t)\dot{V}(t)}{R} \sin\vartheta, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $R$ ,  $m_{П}$ ,  $J_{П}$  — радиус, масса и момент инерции поплавка с ротором соответственно. Его составляющая  $M_1 = 2J_{П}\omega_3(t)\dot{V}(t)/R$  вызывает прецессию оси фигуры гироскопа со скоростью  $\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{M}_1$ , в то время как другая,  $M_2 = 2\pi J_{П}\omega_3(t)\dot{V}(t)/R$ , не представляет опасности, так как уравновешивается вращающим моментом.

Повторяя логику предыдущих рассуждений, оценим влияние радиальных перемещений  $W(t)$ . При качке корпуса РН они приводят к возникновению момента сил инерции Кориолиса

$$M_{И}^c(W) = \int_{m_{Т}} 2RW'_c dm = \frac{4J_{П}\omega_3(t)\dot{W}(t)\sin[\omega_3(t), \hat{W}(t)]}{R}$$

с составляющими

$$M_3 = \frac{2\pi J_{П}\omega_3(t)\dot{W}(t)}{R}, \quad M_4 = \frac{2J_{П}\omega_3(t)\dot{W}(t)}{R},$$

первая из которых также приводит к прецессии оси фигуры, а составляющая  $M_4$  уравновешивается моментом гидродвигателя.

Момент  $M_3$  вызывает прецессию с угловой скоростью

$$\omega_{\Pi}^a = \frac{2J_{\Pi}\omega_3}{HR\sin(H, \omega_{\Pi}^a)} [\dot{V}(t) + \pi\dot{W}(t)]$$

при выполнении условия (рис. 3)

$$M_1 + M_2 = -M_T.$$

Под действием волны акустического давления  $P$  боковая поверхность поплавка кроме тангенциальной  $V$  и радиальной  $W$  в общем случае будет иметь и третью составляющую упругого перемещения поверхности вдоль образующей цилиндра. Вместе с тем ею можно пренебречь как вследствие малости (жесткость конструкции в этом направлении значительно превышает остальные), так и по причине отсутствия моментов сил инерции Кориолиса (их векторы пересекают центр подвеса).

Дифференциальные уравнения упругой цилиндрической поверхности поплавка запишем в виде [3]

$$\begin{aligned} \omega_{\Pi}^2 \rho V + \frac{\partial^2 V}{\partial \beta^2} - \frac{1-\sigma}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{\partial W}{\partial \beta} = 0, \\ \omega_{\Pi}^2 \rho W + \frac{\partial V}{\partial \beta} + \\ + c^2 \left( \frac{1}{R^4} \frac{\partial^4 W}{\partial \beta^4} + \frac{2}{R^2} \frac{\partial^4 W}{\partial z^2 \partial \beta^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial z^4} \right) + W = F(z, \beta, t), \end{aligned} \quad (12)$$

где  $c^2 = h^2/(12R^2)$  — коэффициент,  $h$  и  $R$  — толщина и радиус оболочки,  $0 < z < L$ ,  $0 \leq \beta \leq 2\pi$  — центральный угол,  $L$  — длина,  $F(z, \beta, t) = P_0 \exp i[\omega t - k_0(\alpha z + \beta_1 R_\beta)]$ ;  $\alpha = \cos\theta_1 \sin\theta$ ,  $\beta_1 = \sin\theta_1$ ,  $z$ ,  $R_\beta$  — координаты точки поверхности.

Для граничных условий вида

$$V \Big|_{z=0} = V \Big|_{z=L} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \Big|_{z=0} = \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \Big|_{z=L} = 0$$

решения системы (12) строятся в виде рядов

$$\begin{aligned} V(z, \beta, t) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn}(t) \exp(im\beta) \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ -im \frac{F_{mn}}{\Delta_{mn}} \exp(im\beta) \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \right], \\ W(z, \beta, t) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}(t) \exp(im\beta) \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[ \omega^2 \rho - m^2 - \frac{1-\sigma}{2} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[ \frac{F_{mn}}{\Delta_{mn}} \exp(im\beta) \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} F_{mn}(t) &= l_{mn} P_0 \exp(i\omega t) \frac{2n\pi [1 - (-1)^n]}{(n\pi)^2 - (k_0 L)^2} \times \\ &\times \left[ i \frac{\exp i(-2\pi k_0 \beta_1 R) - 1}{2\pi(k_0 \beta_1 R + m)} \right], \quad k_0 L \neq n\pi, \\ \Delta_{mn} &= m^2 + \left[ \omega^2 \rho - m^2 - \frac{1-\sigma}{2} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \right] \times \\ &\times \left\{ (\omega^2 \rho + 1) + c^2 \left[ \left(\frac{m}{R}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \right]^2 \right\}. \end{aligned}$$

Численный анализ показывает, что тангенциальные составляющие  $V$  на 7-8 порядков меньше радиальных  $W$ . Поэтому ими можно в дальнейшем пренебречь и ограничиться более подробной оценкой перемещений в радиальном направлении.

Очевидно, что продольные  $n$ -формы будут только нечетными, т. е.  $n = 1, 3, 5, \dots$ , а  $m$ -формы для отрицательных и положительных значений будут совпадать (рис. 4, а, б). На рис. 4, в—е представлены некоторые низшие формы перемещений поверхности в плоскости шпангоута. Их значение в среднем сечении ( $z = 3$  см) составляет 4.50—4.60 нм для принятых значений уровня звукового давления. С увеличением номера формы амплитуды уменьшаются.

Ограничиваясь суммированием по  $m$ -формам от  $-10$  до  $10$ , а по  $n$ -формам — от  $1$  до  $10$ , можно провести численную оценку перемещений  $W$  поверхности под действием акустической волны (рис. 5, а—г) для некоторых значений частоты падающей волны  $\omega$ . Продольные  $n$ -формы низших номеров изображены на рис. 6.

В итоге имеем

$$\omega^a = \omega_T^a + \omega_{\Pi}^a \approx \frac{2\omega_3}{HR} \{ m_T R L \dot{W}_T(t) + J_{\Pi} [\dot{V}(t) + \pi\dot{W}(t)] \},$$

где  $\dot{W}_T(t)$ ,  $\dot{V}(t)$  и  $\dot{W}(t)$  — скорости перемещения элементов поверхности поплавка под действием звуковой волны.

Угловое положение корпуса РН зададим с помощью углов Эйлера (рис. 7), выбрав в качестве опорной (стартовой) систему  $O_1\xi\eta\zeta$ . Систему координат  $O_1x_1y_1z_1$  свяжем жестко с корпусом прибора,  $O_1xyz$  — с поплавком. Тогда имеют место очевидные соотношения

$$\begin{aligned} \omega_{x_1} &= \dot{\psi} \sin\theta \sin\varphi + \dot{\theta} \cos\varphi, \\ \omega_{y_1} &= \dot{\psi} \sin\theta \cos\varphi - \dot{\theta} \sin\varphi, \\ \omega_{z_1} &= \dot{\psi} \cos\theta + \dot{\varphi} + \omega_0, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $\omega_0$  — измеряемая угловая скорость,  $\psi(t)$ ,  $\theta(t)$ ,  $\varphi(t)$  — соответственно углы рыскания, тангажа и собственного вращения. Для системы координат,

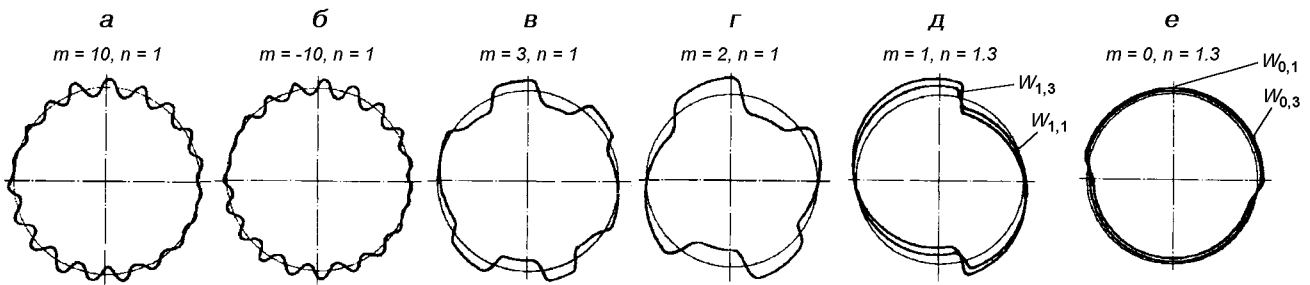


Рис. 4. Поперечные  $mn$ -формы для  $\omega = 1000 \text{ c}^{-1}$

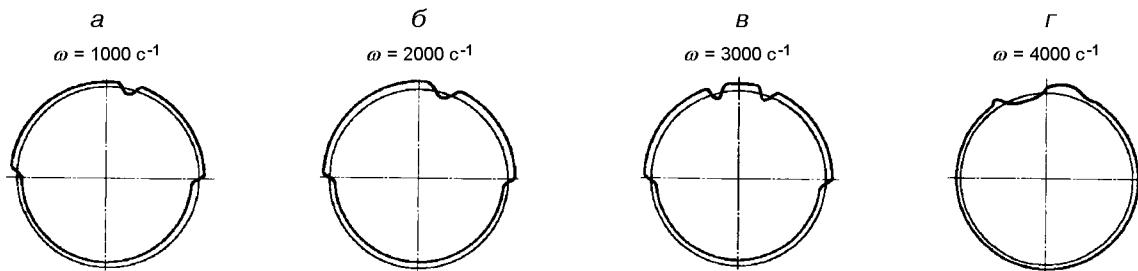


Рис. 5. Радиальные перемещения поверхности в среднем сечении: значения  $W_{\max}$  для а, б, в, г составляют соответственно 3.717, 3.879, 4.118, 4.372 нм

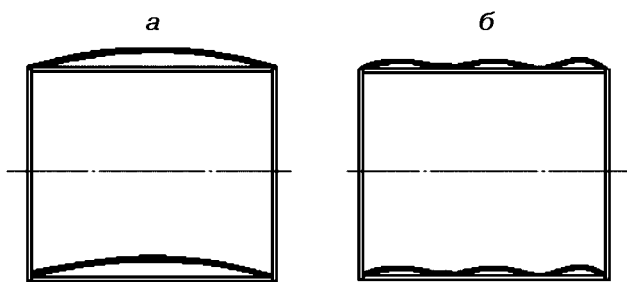


Рис. 6. Продольные  $mn$ -формы колебаний для  $\omega = 1000 \text{ c}^{-1}$ ,  $m = 0, 1, 2$ : а —  $n = 1$ , б —  $n = 3$

связанной с поплавком, имеем

$$\begin{aligned} \omega_x &= \omega_{x_1} \cos \beta - \omega_{z_1} \sin \beta, \\ \omega_y &= \omega_{y_1} + \dot{\beta}, \\ \omega_z &= \omega_{x_1} \sin \beta + \omega_{z_1} \cos \beta. \end{aligned} \quad (15)$$

Теперь имеются все необходимые предпосылки для оценки степени одновременного влияния на гироскоп качки и акустического излучения.

Угловые скорости  $\omega_x$  и  $\omega_z$  приведут к возникновению «акустической» погрешности, определяемой соотношением

$$\begin{aligned} \omega_1^a(t) &\approx \frac{2(\omega_x \sin \beta + \omega_z \cos \beta)}{HR} \times \\ &\times [m_T RL \dot{W}_T(t) + J_{II} [\dot{V}(t) + \pi \dot{W}(t)]]. \end{aligned} \quad (16)$$

Вектор скорости  $\omega_1^a$  направлен вдоль выходной оси

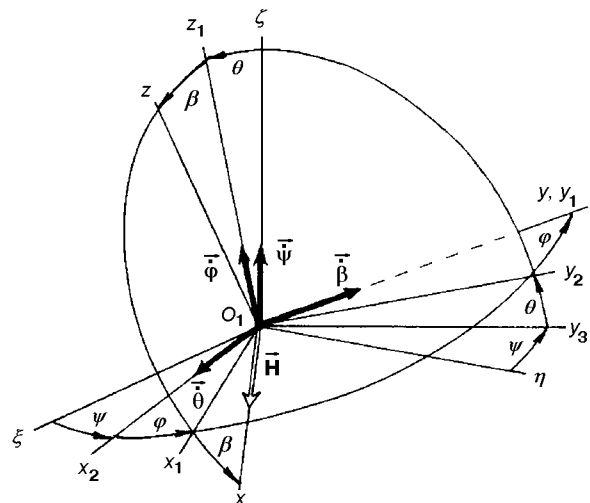


Рис. 7. Углы Эйлера:  $O_1\xi\eta\zeta$  — опорная система координат,  $O_1x_1y_1z_1$  — связанная с корпусом прибора,  $O_1xyz$  — жестко связанная с поплавком

прибора (рис. 8).

Угловая скорость  $\omega_y$  корпуса РН в совокупности с радиальной акустической вибрацией  $\dot{W}(t)$  поплавка приведет к возникновению угловой скорости прецессии

$$\omega_2^a = \frac{4J_{II}\omega_y(t)\dot{W}(t)}{HR},$$

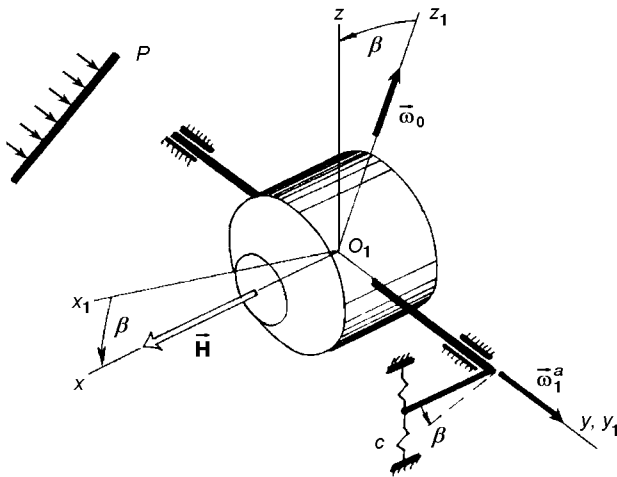


Рис. 8. Влияние кинематического возмущения  $\omega_x$  и  $\omega_y$  на акустическую девиацию

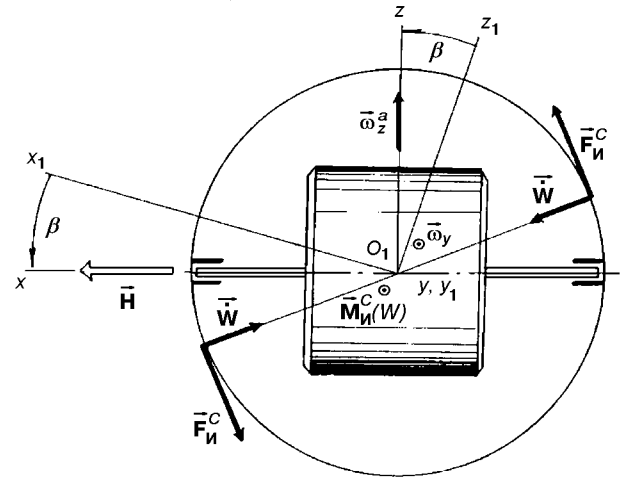


Рис. 9. Влияние кинематического возмущения  $\omega_y$  на акустическую девиацию

вектор которой направлен вдоль входной оси (рис. 9).

Дифференциальное уравнение движения подвижной части прибора с учетом соотношений (16), (17) запишем в виде [2]

$$B\ddot{\beta} + R\{[(\omega_z + \omega_2^a \cos \beta)^2 - \omega_x^2] \sin \beta \cos \beta - \omega_x(\omega_z + \omega_2^a \cos \beta) \cos 2\beta\} + H[\omega_x \sin \beta + (\omega_z + \omega_2^a \cos \beta) \cos 2\beta] + B(\dot{\omega}_y + \dot{\omega}_1^a) + c\beta + b\dot{\beta} = 0,$$

где  $B = J_0 + J_y$ ,  $R = J_0 + J_z - J_x$ ;  $J_x$ ,  $J_y$ ,  $J_z$  — моменты инерции поплавка,  $J$ ,  $J_0$  — полярный и экваториальный моменты инерции ротора.

Ограничиваясь рамками прецессионного движения, определим угол поворота подвижной части следующим образом:

$$\beta = -\frac{H\omega_z \cos \beta}{c} - \frac{H\omega_x \sin \beta}{c} - \frac{B\dot{\omega}_y}{c} - \frac{H\omega_2^a \cos^2 \beta}{c} - \frac{B\dot{\omega}_1^a}{c}. \quad (17)$$

Смысл первых трех слагаемых известен — это полезный сигнал, пропорциональный измеряемой угловой скорости, методическая погрешность от влияния перекрестной угловой скорости  $\omega_x$  и погрешность, обусловленная влиянием углового ускорения  $\dot{\omega}_y$  соответственно. Два последних слагаемых в правой части есть погрешность прибора, обусловленная совместным воздействием на подвес гироскопа кинематического возмущения и звуковых полей.

Сравнительный анализ результатов экспериментальных исследований серийно выпускаемого поплавкового гироскопа типа ДУСУ2-6АС, проведенных на установке «Сирена» ИПП НАН Украины, и теоретических расчетов дают удовлетворительное совпадение [1]. Максимальное значение погрешности ДУСУ (сдвиг нуля) соответствует «ложной» угловой скорости 0.6 град/с при частоте 810 Гц звукового излучения. Характер изменения погрешности — квадратичный, и систематическая составляющая появляется с частоты  $f = 500$  Гц.

Полученные результаты позволяют провести качественный и количественный анализ этого явления, оценить степень влияния того или иного фактора, а также решить задачи оптимизации упруго-вязких свойств подвеса гироскопа.

1. Карачун В. В., Лозовик В. Г., Потапова Е. Р., Мельник В. Н. Многомерные задачи нестационарной упругости подвеса поплавкового гироскопа. — Киев: Корнейчук, 2000.—128 с.
2. Лунц Я. Л. Ошибки гироскопических приборов. — Л.: Судостроение, 1968.—232 с.
3. Kennard E. H. The new approach to shell theory circular cylinders // J. Appl. Mech.—1953.—20, N 1.

#### MULTY-DIMENSIONAL PROBLEMS OF THE ELASTICITY OF FLOATING GYROSCOPE HOLDER

V. V. Karachun, V. N. Mel'nik, and V. G. Lozovik

We analyze the elastic interaction of the floating two-degree gyroscope with acoustic radiation. The mechanism of simultaneous influence of attitude and sound wave on the errors of the floating device is revealed.