ISSN 1561-8889. Космічна наука і технологія. 2000. Т 6. № 2/3. С. 53—68.

УДК 550

Возбуждение меридионального течения дифференциальным вращением в жидком ядре Земли

А. А. Логинов[1], Ю. И. Самойленко[2], В. А. Ткаченко[1]

[1]Інститут космічних досліджень НКАУ і НАНУ, Київ,

[2]Інститут математики НАНУ, Київ

Надійшла до редакції 18.04.00

Досліджено механізм генерування меридіональної складової течії диференціальним обертанням в рідкому ядрі Землі, зумовлений різницею кутових швидкостей внутрішнього твердого ядра та мантії. В рамках моделей циліндричного та сферичного рідких шарів, розташованих між двома обертовими осесиметричними поверхнями, отримані умови виникнення нестійкості азимутальної течії, що породжує розвиток меридіонального компонента. Запропоновано способи розв'язання нелінійних рівнянь, що описують установлені течії при великих числах Рейнольдса.

ВВЕДЕНИЕ

На современном этапе, когда стала общепринятой концепция гидромагнитного динамо [14, 17], объясняющая природу магнетизма Земли и подобных ей планет с позиций электродинамики сплошных сред [7], остаются все еще не ясными в полной мере вопросы об энергетическом приводе динамопроцесса и механизмах возбуждения МГД-течений в жидких ядрах планет.

Наибольшее распространение получили следующие гипотезы:

— тепловая конвекция в жидком ядре [18, 19];

— химическая дифференциация в нем различных веществ и флотация легких фракций, выплавляемых из твердого внутреннего ядра, при одновременной кристаллизации более тяжелых [2];

— прецессия оси вращения геоида с учетом его эллипсоидальности [5, 21];

— электрохимические процессы на границе ядро — мантия [24].

По разным причинам, таким как неудовлетворительный энергомассобаланс, трудности объяснения эффекта переполюсовки магнитного поля, установленного на основе палеомагнитных исследований [13], неполное соответствие структуры поля скоростей требованиям самовозбуждения магнитного поля — все эти гипотезы в той или иной степени противоречат данным наблюдений, а поэтому не могут считаться вполне приемлемыми. Например, упомянутый здесь прецессионный механизм вряд ли может претендовать на определяющую роль в качестве энергетического привода по той причине, что сплюснутость геоида незначительна, а угловая скорость прецессии чрезвычайно мала [23]. Более продвинутой оказалась гипотеза тепловой и термохимической конвекции, на базе которой авторам численных экспериментов на супер-ЭВМ [20] уда-

© А. А. ЛОГИНОВ, Ю. И. САМОЙЛЕНКО, В. А. ТКАЧЕНКО, 2000

лось продемонстрировать эффект переполюсовки, однако для этого им пришлось использовать не вполне реалистические исходные данные [22].

Принимая во внимание крайнюю неэффективность преобразования термохимической энергии в механическую в недрах планет, обратимся к рассмотрению другой возможности поддержания динамо-процесса — за счет кинетической энергии собственного вращения Земли. В этой связи заслуживает внимания хорошо известный факт приливного торможения внешней твердой оболочки планеты при гравитационном взаимодействии с другими небесными телами. Как показано в недавно опубликованной работе В. В. Кречетова [6], предположение о роли этого эффекта как энергетического привода динамо-механизма приводит к практически полному совпадению данных наблюдений и теоретических расчетов магнитных полей для всех планет Солнечной системы с использованием всего лишь одного нормировочного коэффициента, задаваемого для параметров Земли. Используя тот факт, что замедление вращения Земли, вызываемое приливными силами, равно 0.018 мс/год [9], и предполагая (следуя [6]), что в процессе торможения энергия расходуется в значительной мере на генерацию магнитного поля, нетрудно прийти к выводу о возможности существования магнитного поля лишь за счет этого источника в течение времени порядка 10^9 лет, сравнимого с возрастом планеты.

Воздействие гравитационного поля других небесных тел на вращающуюся планету тормозит внешнюю твердую оболочку (мантию), уменьшая ее угловую скорость относительно внутреннего твердого ядра, вращающегося по инерции внутри жидкого электропроводящего ядра. Течение в жидком ядре приобретает дифференциальный характер с убыванием угловой скорости слоев жидкости к периферии, вследствие чего создаются условия для возникновения составляющих поля скоростей в меридиональном сечении, а линии тока жидкости приобретают спиральный характер. Для самоподдержания спонтанно возникающего и усиливаемого динамо-процессом магнитного поля в силу теоремы Каулинга [12, 16] необходимо еще нарушение осевой симметрии МГД-течения в целом. Таким образом, в квазистационарном режиме при медленно изменяющейся разности азимутальных угловых скоростей на границах жидкого ядра картина течения приобретает сложный трехмерный характер.

Целью настоящей работы является исследование гидродинамических процессов в жидком ядре планеты при наличии в нем дифференциального вращения, обусловленного торможением внешней оболочки (коры и мантии), вызванным приливными силами. Особое внимание обращено на вскрытие возможных механизмов возбуждения меридионального течения за счет отбора части кинетической энергии от азимутального компонента, а также на разработку эффективных методов исследования осесимметрических стационарных МГД-течений.

1. УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОГО ОСЕСИММЕТРИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ

Для исследования устойчивости плоскопараллельного течения с цилиндрической структурой воспользуемся энергетическим принципом, не прибегая пока к интегрированию уравнений гидродинамики.

Обозначив плотность момента импульса течения с профилем окружной скорости $V_\varphi(\rho)$ через

$$\mu(\rho) = \rho V_\varphi(\rho), \tag{1}$$

рассмотрим перестановку двух тонких кольцевых жидких слоев одинаковой массы. Траектория перестановки в данном виртуальном эксперименте несущественна. Вычислим соответствующую вариацию суммарной энергии обоих колец $2\Delta\varepsilon(\rho)$ при адиабатическом процессе перестановки, т. е. с сохранением моментов импульсов каждого из колец. Пусть такая перестановка производится в Δx-окрестности произвольно выбранной точки $\rho = x_0$. Учитывая, что для сохранения массы толщины колец при перестановке должны изменяться обратно пропорционально радиусам, удобно представить их следующим образом:

$$(\delta\rho)^+ = (\delta\rho)^0 \frac{x_0}{x_0 + \Delta x} \approx \left(1 - \frac{\Delta x}{x_0}\right)(\delta\rho)^0$$

для кольца с начальным радиусом $\rho^{(+)} = x_0 + \Delta x$ и

$$(\delta\rho)^- = (\delta\rho)^0 \frac{x_0}{x_0 - \Delta x} \approx \left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right)(\delta\rho)^0$$

для кольца с начальным радиусом $\rho^{(-)} = x_0 - \Delta x$.

Плотность энергии (на единицу массы) выражаем через плотность момента импульса (массовую, а не объемную) вращательного движения по формуле $\varepsilon(\rho) = \mu^2(\rho)/(2\rho^2)$.

Вначале рассмотрим внешнее (в первоначальном положении) кольцо (e). В соответствии с приведенной формулой его энергия на единицу массы до и после перестановки ($1 \to 2$) имеет следующие значения:

$$\varepsilon_1^{(e)}(\rho) = \frac{\mu^2(x_0 + \Delta x)}{2(x_0 + \Delta x)^2},$$

$$\varepsilon_2^{(e)}(\rho) = \frac{\mu^2(x_0 + \Delta x)}{2(x_0 - \Delta x)^2},$$

Аналогично для первоначально внутреннего кольца (i)

$$\varepsilon_1^{(i)}(\rho) = \frac{\mu^2(x_0 - \Delta x)}{2(x_0 - \Delta x)^2},$$

$$\varepsilon_2^{(i)}(\rho) = \frac{\mu^2(x_0 - \Delta x)}{2(x_0 + \Delta x)^2},$$

Следовательно, вариация суммарной энергии обоих колец равна

$$2\Delta\varepsilon(x_0) = \left[\frac{\mu^2(x_0 + \Delta x)}{2(x_0 - \Delta x)^2} - \frac{\mu^2(x_0 + \Delta x)}{2(x_0 + \Delta x)^2}\right] +$$

$$+ \left[\frac{\mu^2(x_0 - \Delta x)}{2(x_0 + \Delta x)^2} - \frac{\mu^2(x_0 - \Delta x)}{2(x_0 - \Delta x)^2}\right] =$$

$$= \frac{\mu^2(x_0 + \Delta x) - \mu^2(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} \cdot \frac{4x_0(\Delta x)^2}{[x_0^2 - (\Delta x)^2]^2}.$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получаем:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta\varepsilon(x_0)}{(\Delta x)^2}\bigg|_{x_0=\rho} = \frac{4}{\rho^3}\frac{d}{d\rho}\mu^2(\rho).$$

Таким образом, вариация плотности энергии, приходящейся на единицу массы, определяется формулой

$$\delta\varepsilon(\rho) = \frac{2(\delta\rho)^2}{\rho^3}\frac{d}{d\rho}\mu^2(\rho). \qquad (2)$$

Если в результате перестановки колец оказывается, что $\delta\varepsilon(\rho) > 0$, то, согласно энергетическому принципу, течение с профилем окружной скорости $V_\varphi(\rho) = \mu(\rho)/\rho$ является устойчивым.

Будем рассматривать локальные свободные колебания жидкости в окрестности слоя радиуса ρ с достаточно малой амплитудой $\delta\rho$. Такие колебания описываются уравнением линейного осциллятора

$$\frac{d^2}{dt^2}(\delta\rho) + k(\delta\rho) = 0,$$

где k — эффективная жесткость упругих сил, действующих на кольцо, которая связана с вариацией потенциальной энергии $\delta\varepsilon$ соотношением

$$\delta\varepsilon = \frac{1}{2}k(\delta\rho)^2.$$

Так как $k = \nu^2$ (ν — частота) для осциллятора единичной массы, то с учетом (2)

$$\nu^2 = \frac{4}{\rho^3}\frac{d}{d\rho}\mu^2(\rho). \qquad (3)$$

Если в некотором интервале $\rho_{\min} \le \rho \le \rho_{\max}$ оказывается, что $\frac{d}{d\rho}\mu^2(\rho) < 0$, то из (3) следует $\nu^2(\rho) < 0$, что означает неустойчивость с инкрементом $\gamma = i\nu$, так что $\gamma^2 = -\nu^2$.

Итак, критерием возникновения локальной неустойчивости с экспоненциальным ростом малых возмущений по закону $e^{\gamma t}$ является условие $\frac{d}{d\rho}\mu^2(\rho) < 0$. В случае $\mu(\rho) = \text{const}$, когда $V_\varphi(\rho) \propto \propto 1/\rho$, реализуется пограничный режим, который назовем критическим. При более быстром или более медленном убывании величины окружной скорости $V_\varphi(\rho)$ по радиусу течение будем называть надкритическим или докритическим соответственно. В докритическом режиме после установления стационарного течения в некотором цилиндрическом слое на основании принципа равномерного распределения энергии по степеням свободы частоты локальных колебаний станут одинаковыми:

$$\nu^2 = \text{const} > 0.$$

Интегрируя (3), находим

$$\mu^2(\rho) = C^2 + \left(\frac{\nu}{4}\right)^2\rho^4,$$

тогда с учетом (1) получаем докритический профиль скоростей

$$V_\varphi(\rho) = \frac{\mu(\rho)}{\rho} = \frac{1}{\rho}\sqrt{C^2 + (\nu/4)^2\rho^4},$$

который назовем равночастотным. При $\nu^2 < 0$, когда $\gamma^2 = -\nu^2 = \text{const}$, надкритический профиль скоростей

$$V_\varphi(\rho) = \frac{1}{\rho}\sqrt{C^2 - (\gamma/4)^2\rho^4} \qquad (4)$$

по аналогии будем называть равноинкрементным.

При исследовании режимов с малой надкритичностью представляют интерес профили с $0 < \gamma \ll 1$. Интересуясь описанием течения во вращающейся системе отсчета, представим окружную скорость $V_\varphi(\rho)$ в виде суммы переносной скорости $V_\Omega(\rho) = = \Omega\rho$ однородного вращения с угловой скоростью Ω, которую примем равной 1, и относительной скорости $V_\gamma(\rho)$. При этом

$$V_\gamma(\rho) = V_\varphi(\rho) - \rho = \frac{1}{\rho}\sqrt{C^2 - (\gamma/4)^2\rho^4} - \rho.$$

Константу интегрирования определяем из условия

$$V_\gamma(\rho)\big|_{\rho=1} = 0.$$

Тогда

$$C^2 = 1 + (\gamma/4)^2.$$

Теперь $V_\gamma(\rho)$ с точностью до α^4 ($\alpha = \gamma/4$) можно записать в виде

$$V_\gamma(\rho) = V_0(\rho) + \alpha^2 V_\alpha(\rho), \tag{5}$$

где

$$V_0(\rho) = \frac{1}{\rho} - \rho$$

есть нейтральный профиль скоростей, а

$$V_\alpha(\rho) = \frac{1-\rho^4}{2\rho}, \tag{6}$$

характеризует равноинкрементное надкритическое приращение поля скорости. Параметр $\alpha = \gamma/4$, называемый далее параметром надкритичности неустойчивого равноинкрементного азимутального течения, определяет интенсивность развития неустойчивости. В результате суммарный вектор скорости во вращающейся цилиндрической системе координат при развитии неустойчивости представим в виде

$$\mathbf{V}_\Sigma = (V_0 + \alpha^2 V_\alpha)\,\mathbf{e}_\varphi + \mathbf{V}, \tag{7}$$

где $\mathbf{V} = V_\rho \mathbf{e}_\rho + V_\varphi \mathbf{e}_\varphi + V_z \mathbf{e}_z$ — искомое малое возмущение.

2. ДИНАМИКА ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ В РЕЖИМЕ, БЛИЗКОМ К КРИТИЧЕСКОМУ

В этом разделе рассматривается течение вязкой несжимаемой жидкости, которое в неподвижной системе отсчета описывается уравнением Навье — Стокса [8]

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_m}\,\mathrm{grad}(p + U) + \frac{\tilde{\eta}}{\rho_m}\Delta\mathbf{v},$$

$$\mathrm{div}\mathbf{v} = 0,$$

где $\mathbf{v}$, p, U, ρ_m, $\tilde{\eta}$ — скорость, давление, гравитационный потенциал, плотность и динамическая вязкость жидкости соответственно. Это уравнение в системе отсчета, вращающейся с угловой скоростью $\mathbf{\Omega}$ вместе с Землей, для суммарной скорости (7) принимает вид

$$\frac{\partial \mathbf{V}_\Sigma}{\partial t} - [\mathbf{V}_\Sigma \times \mathrm{rot}\mathbf{V}_\Sigma] + 2[\mathbf{\Omega}\times\mathbf{V}_\Sigma] =$$

$$= -\mathrm{grad}\left\{\frac{p+U}{\rho_m} + \frac{V_\Sigma^2}{2} - \frac{1}{2}[\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}]^2\right\} + \frac{\tilde{\eta}}{\rho_m}\Delta\mathbf{V}_\Sigma, \tag{8}$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки наблюдения. Применение операции ротора к (8) дает

$$\frac{\partial \mathbf{\Gamma}_\Sigma}{\partial t} - \mathrm{rot}[\mathbf{V}_\Sigma\times\mathbf{\Gamma}_\Sigma] + 2\mathrm{rot}[\mathbf{\Omega}\times\mathbf{V}_\Sigma] = \frac{\tilde{\eta}}{\rho_m}\Delta\mathbf{\Gamma}_\Sigma.$$

Здесь $\mathbf{\Gamma}_\Sigma = \mathrm{rot}\mathbf{V}_\Sigma$.

При выборе направления вектора $\mathbf{\Omega}$ в качестве оси z получаем

$$\frac{\partial \mathbf{\Gamma}_\Sigma}{\partial t} = \mathrm{rot}[\mathbf{V}_\Sigma\times\mathbf{\Gamma}_\Sigma] + 2\Omega\frac{\partial \mathbf{V}_\Sigma}{\partial z} + \frac{\tilde{\eta}}{\rho_m}\Delta\mathbf{\Gamma}_\Sigma. \tag{9}$$

Для упрощения дальнейших выкладок приведем уравнение (9) к безразмерному виду, ориентируясь на характерные физические параметры Земли [4, 10]:

— внешний радиус жидкого ядра

$$R_C \approx 0.55\cdot 6.38\cdot 10^6\ \text{м} = 3.51\cdot 10^6\ \text{м},$$

— внутренний радиус жидкого ядра

$$R_I \approx 0.19\cdot 6.38\cdot 10^6\ \text{м} = 1.21\cdot 10^6\ \text{м},$$

— средняя по объему массовая плотность жидкого ядра

$$\rho_m \approx 10^4\ \text{кг}\cdot\text{м}^{-3},$$

— кинематическая вязкость

$$\nu \approx 10^{-6}\ \text{м}^2\text{с}^{-1},$$

— динамическая вязкость

$$\tilde{\eta} = \nu\rho_m = 10^{-2}\ \text{кг}\cdot\text{м}^{-1}\text{с}^{-1}.$$

В качестве характерной длины и характерного времени выбираем следующие величины:

$$L = R_C = 3.51\cdot 10^6\ \text{м},$$

$$T = \frac{1}{2\pi}\cdot 24\cdot 3600\ \text{с} = 1.375\cdot 10^4\ \text{с}.$$

Тогда безразмерная кинематическая вязкость η определится по формуле

$$\eta = \frac{\tilde{\eta}T}{\rho_m L^2} = 1.12\cdot 10^{-15},$$

а уравнение (9) примет вид

$$\frac{\partial \mathbf{\Gamma}_\Sigma}{\partial t} = \mathrm{rot}[\mathbf{V}_\Sigma\times\mathbf{\Gamma}_\Sigma] + 2\frac{\partial \mathbf{V}_\Sigma}{\partial z} + \eta\Delta\mathbf{\Gamma}_\Sigma. \tag{10}$$

Таким образом, для жидкого ядра Земли безразмерная вязкость является существенно малым параметром.

В результате подстановки (7) в (10) получаем

уравнение для возмущения скорости $\mathbf{V}$ жидкости относительно заданного профиля окружной скорости $V_\alpha(\rho)$.

$$\frac{\partial \mathbf{\Gamma}}{\partial t} = \mathrm{rot}[\mathbf{V}\times\mathbf{\Gamma}] - \frac{2}{\rho^2}\Gamma_\rho \mathbf{e}_\varphi - \frac{1-\rho^2}{\rho^2}\frac{\partial \mathbf{\Gamma}}{\partial \varphi} + \eta\Delta\mathbf{\Gamma} -$$

$$-\alpha^2\left\{\frac{1}{\rho}V_\alpha(\rho)\frac{\partial \mathbf{\Gamma}}{\partial \varphi} - \rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{1}{\rho}V_\alpha(\rho)\right]\Gamma_\rho\mathbf{e}_\varphi + \right.$$

$$\left. + V_\rho\frac{\partial\Gamma_\alpha}{\partial\rho}\mathbf{e}_z - \Gamma_\alpha\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial z} - \eta\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho\frac{\partial\Gamma_\alpha}{\partial\rho}\right]\mathbf{e}_z\right\}, \quad (11)$$

где $\mathbf{\Gamma} = \mathrm{rot}\mathbf{V}$,

$$\Gamma_\alpha = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho V_\alpha). \quad (12)$$

Поскольку в интересующих нас приложениях $\eta \sim 10^{-15} \ll 1$, то при рассмотрении модельных примеров влиянием вязкости вполне можно пренебречь. Конкретно для равноинкрементного профиля (6) и осесимметрических возмущений $\mathbf{V}$ уравнение (11) при $\eta = 0$ имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{\Gamma}}{\partial t} = \mathrm{rot}[\mathbf{V}\times\mathbf{\Gamma}] - \frac{2}{\rho^2}\Gamma_\rho\mathbf{e}_\varphi -$$

$$-\alpha^2\left[2\rho^2\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial z} - 4\rho V_\rho\mathbf{e}_z + \left(\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}\right)\Gamma_\rho\mathbf{e}_\varphi\right]. \quad (13)$$

Линеаризация (13) при малых возмущениях дает с учетом $\mathrm{div}\mathbf{V} = 0$ и временной зависимости $\sim e^{\gamma t}$ следующую систему уравнений:

$$\gamma\Gamma_\rho = -2\alpha^2\rho^2\frac{\partial V_\rho}{\partial z},$$

$$\gamma\Gamma_\varphi = -\frac{2}{\rho^2}\Gamma_\rho - \alpha^2\left[2\rho^2\frac{\partial V_\varphi}{\partial z} + \left(\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}\right)\Gamma_\rho\right],$$

$$\gamma\Gamma_z = -\alpha^2\left[2\rho^2\frac{\partial V_z}{\partial z} - 4\rho V_\rho\right],$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho V_\rho) + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0.$$

Так как

$$\Gamma_\rho = -\frac{\partial V_\varphi}{\partial z}, \quad \Gamma_\varphi = \frac{\partial V_\rho}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial\rho}, \quad \Gamma_z = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho V_\varphi),$$

то

$$\gamma\frac{\partial V_\varphi}{\partial z} = 2\alpha^2\rho^2\frac{\partial V_\rho}{\partial z}, \quad \gamma\left(\frac{\partial V_\rho}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial\rho}\right) =$$

$$= \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial V_\varphi}{\partial z} - 2\alpha^2\rho^2\frac{\partial V_\varphi}{\partial z} + \alpha^2\left(\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}\right)\frac{\partial V_\varphi}{\partial z}, \quad (14)$$

$$\gamma\left(\frac{\partial V_\varphi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}V_\varphi\right) = \alpha^2\left(2\rho^2\frac{\partial V_\rho}{\partial\rho} + 6\rho V_\rho\right).$$

Поскольку при $|\alpha| \ll 1$ инкремент также мал, можно положить $\gamma \sim \alpha$. Тогда из первого уравнения системы (14) следует $V_\varphi \sim \alpha V_\rho$, что позволяет упростить второе уравнение, и система принимает вид

$$\gamma\frac{\partial V_\varphi}{\partial z} = 2\alpha^2\rho^2\frac{\partial V_\rho}{\partial z},$$

$$\gamma\left(\frac{\partial V_\rho}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial\rho}\right) = \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial V_\varphi}{\partial z},$$

$$\gamma\left(\frac{\partial V_\varphi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}V_\varphi\right) = 2\alpha^2\rho^2\left(\frac{\partial V_\rho}{\partial\rho} + \frac{3}{\rho}V_\rho\right), \quad (15)$$

$$\frac{\partial V_\rho}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}V_\rho + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0.$$

Исключив $\partial V_\varphi/\partial z$ из первых двух уравнений, получаем

$$\frac{\partial V_z}{\partial\rho} = \left[1 - \left(\frac{2\alpha}{\gamma}\right)^2\right]\frac{\partial V_\rho}{\partial z}. \quad (16)$$

При соблюдении этого равенства третье уравнение системы (15) также удовлетворяется. Используя (16) совместно с четвертым уравнением системы (15), приходим к волновому уравнению для V_ρ

$$\frac{\partial^2 V_\rho}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V_\rho}{\partial\rho} - \frac{\partial V_\rho}{\rho^2} + \left[1 - \left(\frac{2\alpha}{\gamma}\right)^2\right]\frac{\partial^2 V_\rho}{\partial z^2} = 0,$$

которое допускает разделение переменных подстановкой

$$V_\rho = X(\rho)Y(z),$$

распадаясь на уравнение Бесселя для радиальных функций $X(\rho)$:

$$X'' + \frac{1}{\rho}X' + \left(c^2 - \frac{1}{\rho^2}\right)X = 0 \quad (17)$$

и уравнение для аксиальных функций $Y(z)$:

$$Y'' + \frac{c^2}{(2\alpha/\gamma)^2 - 1}Y = 0, \quad (18)$$

где c — константа разделения.

Механизм генерации меридионального компонента осесимметрического течения наиболее наглядно демонстрируется на модельном примере движения жидкости между двумя цилиндрами, вращающимися с разными угловыми скоростями. Для цилиндрического слоя ($1 - a \le \rho \le 1 + a$, $0 \le z \le b$) константа c находится из условия обращения в нуль V_ρ на граничных боковых поверхностях при $\rho = 1 - a$, $\rho = 1 + a$. Так как (18) решается в тригонометрических функциях, то из (15) и (16) следует, что

$$V_\rho \propto \cos\frac{k\pi z}{b}, \quad V_\varphi \propto \cos\frac{k\pi z}{b}, \quad V_z \propto \sin\frac{k\pi z}{b},$$

где $k = 1, 2, \ldots$ — аксиальное волновое число.

Тогда из (18)

$$\left(\frac{k\pi}{b}\right)^2 = \frac{\lambda_n^2}{(2\alpha/\gamma_{nk})^2 - 1}, \tag{19}$$

где λ_n^2 ($n = 1, 2, \ldots$) — собственные числа краевой задачи для уравнения (17) с граничным условием непроницаемости для жидкости боковых границ цилиндрического слоя $\rho_i = 1 - a$ и $\rho_e = 1 + a$.

Решениями уравнения (17) являются цилиндрические функции $Z_1(\lambda\rho)$. Таким образом λ_n — корни характеристического уравнения системы

$$Z_1[(1 - a)\lambda_n] = 0,$$

$$Z_1[(1 + a)\lambda_n] = 0$$

$$(n = 1, 2, \ldots),$$

которые и выражают указанные граничные условия непротекания. Подставив найденные корни λ_n в (19), получим искомую зависимость инкремента $\gamma = \gamma_{nk}$ от радиального и аксиального волновых чисел возмущения поля скоростей и параметра a надкритичности:

$$\gamma_{nk}^2 = \alpha^2 \frac{k^2\pi^2}{b^2} \frac{1}{\lambda_n^2 + \dfrac{k^2\pi^2}{b^2}}. \tag{20}$$

Учет зависимости от φ в виде $e^{im\varphi}$ в линейном приближении приводит к уменьшению инкремента ($\gamma_{nmk}^2 < \gamma_{nk}^2$) и с точки зрения рассматриваемой проблемы не представляет интереса.

Возвращаясь к системе (15) с использованием известного тождества для цилиндрических функций

$$Z'_1 + \frac{1}{x} Z_1 = Z_0,$$

где $x = \lambda\rho$, строим модальный столбец решения этой системы, удовлетворяющего заданным граничным условиям:

$$V_{nk}^{(\rho)} = e^{\gamma_{nk}t} Z_1(\lambda_n \rho)\cos\left(\frac{k\pi z}{b}\right),$$

$$V_{nk}^{(\varphi)} = e^{\gamma_{nk}t} \frac{2\alpha}{\gamma_{nk}/\alpha} \rho^2 Z_1(\lambda_n \rho)\cos\left(\frac{k\pi z}{b}\right), \tag{21}$$

$$V_{nk}^{(z)} = -e^{\gamma_{nk}t} \lambda_n \frac{b}{k\pi} Z_0(\lambda_n \rho)\sin\left(\frac{k\pi z}{b}\right),$$

Так как согласно (20) $\gamma_{nk} \sim \alpha$, то компоненты поля скоростей $V^{(\rho)}$ и $V^{(z)}$ оказываются на порядок больше, чем ортогональный им азимутальный компонент $V^{(\varphi)}$, что свидетельствует о резонансном характере параметрического возбуждения меридиональной составляющей течения.

На основе полученных результатов можно оценить величины скоростей и инкременты неустойчивого меридионального течения применительно к геофизическим параметрам. При $b = 2a$ имеем

$$a = \frac{1}{2}(R_C - R_I) = 1.15 \cdot 10^6 \text{ м},$$

$$b = R_C - R_I = 2.3 \cdot 10^6 \text{ м}.$$

Так как $(R_C - R_I)/(R_C + R_I) \approx 0.5$, то для второго корня λ_2 характеристического уравнения получаем приближенное значение $\lambda_2 a \approx \pi$. Тогда для низшей аксиальной моды неустойчивости $n = 2$, $k = 1$ и $\alpha = 10^{-3}$ имеем, согласно (20), следующую оценку инкремента в размерном виде $\tilde{\gamma} = T^{-1}\gamma$:

$$\tilde{\gamma}_{21} \approx \frac{10^{-3}T^{-1}}{\sqrt{1 + b^2/a^2}} \approx 3.25 \cdot 10^{-8} \text{ с}^{-1}.$$

Таким образом, постоянная времени τ_{21} нарастания данной моды неустойчивости составляет примерно

$$\tau_{21} \approx 3 \cdot 10^7 \text{ с} \approx 356 \text{ сут} \approx 1 \text{ год}.$$

Разумеется, данная оценка непосредственно зависит от конкретного значения параметра надкритичности α, которое для реального объекта определяется многими внешними факторами.

3. УСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЯ В СФЕРИЧЕСКОМ СЛОЕ

Заметим, что при выводе уравнений (15) для малых возмущений поля скоростей относительно плоскопараллельного дифференциального вращения с профилем (5), близким к критическому, конкретный выбор ортов $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_z$ в координатных плоскостях φ = const не имел принципиального значения. Данную пару ортов можно заменить ортами $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, сферической системы координат при сохранении орта $\mathbf{e}_\varphi$, поскольку обе системы отсчета имеют вращательную симметрию.

Наиболее просто это осуществить, используя для описания возмущения поля скоростей азимутальную составляющую F векторного потенциала и

окружную скорость течения V_φ. Тогда, в зависимости от выбранной системы координат, через F можно выразить как V_ρ, V_z, так и V_r, V_θ.

В частности, в цилиндрической системе

$$V_\rho = -\frac{\partial}{\partial z} F(\rho, z),$$

$$V_\varphi = V_\varphi(\rho, z), \tag{22}$$

$$V_z = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}[\rho F(\rho, z)].$$

Если не конкретизировать выбор $V_\alpha = V_\alpha(\rho)$ и $\Gamma_\alpha = \Gamma_\alpha(\rho)$, как это было сделано для случая цилиндра, то из (11) при неизменных остальных предположениях вместо (15) следует несколько более общая система уравнений:

$$\gamma\frac{\partial V_\varphi}{\partial z} = -\alpha^2\Gamma_\alpha\frac{\partial V_\rho}{\partial z},$$

$$\gamma\left(\frac{\partial V_\rho}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial \rho}\right) = \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial V_\varphi}{\partial z}, \tag{23}$$

$$\gamma\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho V_\varphi) = \alpha^2\left(\Gamma_\alpha\frac{\partial V_z}{\partial z} - V_\rho\frac{\partial \Gamma_\alpha}{\partial \rho}\right).$$

Исключив V_φ из первого и третьего уравнений системы (23) с помощью второго, с учетом (22) получим следующее уравнение для азимутальной составляющей F векторного потенциала:

$$\Delta_1 F + \frac{2\alpha^2}{\gamma^2\rho^2}\Gamma_\alpha(\rho)\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0, \tag{24}$$

где

$$\Delta_1 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial \rho}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{\rho^2}. \tag{25}$$

Оператор Δ_1 соответствует оператору Лапласа для первой азимутальной гармоники. Пользуясь выражениями в сферических координатах операторов Δ_1 и $\partial^2/\partial z^2$, перепишем (24) в виде

$$\Delta_1 f + \frac{2\alpha^2}{\gamma^2 r^2\sin^2\theta}\Gamma_\alpha(r\sin\theta)\hat{L}f = 0, \tag{26}$$

где $f = f(r, \theta) = F(r\sin\theta, r\cos\theta)$,

$$\Delta_1 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) - \frac{f}{r^2\sin^2\theta}, \tag{27}$$

$$\hat{L}f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\cos^2\theta - \frac{2}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial r\partial\theta}\sin\theta\cos\theta + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}\sin^2\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}\sin^2\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial f}{\partial\theta}\sin\theta\cos\theta. \tag{28}$$

При исследовании устойчивости течения в цилиндрическом слое был использован равноинкрементный профиль (6) для $V_\alpha(\rho)$, которому, согласно (12), соответствует $\Gamma_\alpha = -2\rho^2$. Тогда коэффициент второго слагаемого уравнения (24) оказывался постоянным, что допускало разделение переменных и дало возможность получить явные выражения модальных столбцов (21) через цилиндрические функции. В отличие от цилиндра, для сферы указанный выбор профиля V_α нецелесообразен как с физической, так и с математической точек зрения, поскольку в первом случае ось вращения не относится к жидкому слою, а во втором — частично ему принадлежит. Таким образом, в последнем варианте критическое поле скоростей имеет особенность на оси вращения.

Чтобы выйти из этого затруднения, используя приближение слабовязкой жидкости в режиме, близком к критическому, когда $\alpha^2 \ll 1$, поле скоростей будем задавать в виде линейной комбинации гармонических функций ρ и $1/\rho$ всюду, кроме пограничных слоев и приполюсных областей, наиболее подверженных влиянию вязких сил. Надкритический режим зададим, полагая $V_\alpha = -\rho$. Тогда $\Gamma_\alpha = -2$, а уравнение (26) принимает вид

$$\Delta_1 f - \frac{4\alpha^2}{\gamma^2 r^2\sin^2\theta}\hat{L}f = 0. \tag{29}$$

Разделение переменных в этом уравнении для сферического слоя не представляется возможным. Поэтому при построении его решений в качестве базиса разложения приходится использовать собственные функции оператора (27) в виде сферических гармоник

$$f_{nl}(r, \theta) \sim \frac{Z_{n+1/2}(k_{nl} r)}{\sqrt{r}} P_{nl}(\cos\theta),$$

где $Z_{n+1/2}(k_{nl} r)$ — цилиндрические функции полуцелого индекса, $P_{nl}(\cos\theta)$ — присоединенные полиномы Лежандра первого порядка, k_{nl} — собственные числа краевой задачи, определяемые из условий непротекания на внутренней S_i и внешней S_e границах сферического слоя.

В краевой задаче для уравнения (29) каждому собственному значению $\gamma = \gamma_n$ соответствует опре-

деленное решение этого уравнения в виде линейной комбинации

$$f_\sigma = f_\sigma(r, \theta) = \sum_{nl} C_{nl}^{\sigma} u_{nl}(r, \theta), \quad \sigma = 1, 2, \ldots \quad (30)$$

собственных функций $u_{nl} = u_{nl}(r, \theta)$ оператора (27), ортонормированных в метрике

$$\langle f, g\rangle = \int_a^1 \int_0^\pi f(r, \theta) g(r, \theta) r^2 \sin\theta dr d\theta \quad (31)$$

и обращающихся в нуль при $r = r_i = a$, а также при $r = r_e = 1$. Коэффициенты C_{nl}^{σ} разложения (30) характеризуют пространственную структуру моды σ, изменяющейся во времени по закону $e^{\gamma_\sigma t}$.

С учетом вышесказанного

$$u_{nl} = \frac{R_n(k_{nl} r)}{\|R_{nl}\|} \frac{P_{nl}(\cos\theta)}{\|P_{nl}\|} \quad (a \le r \le 1, \quad 0 < \theta < \pi) \quad (32)$$

где

$$R_n(k_{nl} r) = R_n^{(+)}(k_{nl}) R_n^{(-)}(k_{nl} r) - R_n^{(-)}(k_{nl}) R_n^{(+)}(k_{nl} r), \quad (33)$$

$$\|R_{nl}\| = \sqrt{\int_a^1 R_n^2(k_{nl} r) r^2 dr},$$

$$\|P_{nl}\| = \sqrt{\frac{2n(n+1)}{2n+1}},$$

$$R_n^{(+)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{\frac{2n+1}{2}}(x),$$

$$R_n^{(-)}(x) = (-1)^n \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{-\frac{2n+1}{2}}(x).$$

Здесь использованы бесселевы функции полуцелого индекса, которые, как известно, выражаются через линейные комбинации тригонометрических функций $\sin x$ и $\cos x$ с полиномиальными коэффициентами. Поэтому можно записать:

$$R_n^{(+)}(x) = A_n(x)\cos x + B_n(x)\sin x,$$

$$R_n^{(-)}(x) = -A_n(x)\sin x + B_n(x)\cos x,$$

где $A_n(x)$ и $B_n(x)$ подчинены рекуррентным соотношениям:

$$A_{n+1}(x) = \frac{n}{x} A_n(x) - A'_n(x) - B_n(x),$$

$$B_{n+1}(x) = \frac{n}{x} B_n(x) - B'_n(x) + A_n(x)$$

с начальными данными

$$A_1(x) = -1/x, \qquad B_1(x) = 1/x^2.$$

Условие равенства нулю функции (33) на внешней границе $r = r_e = 1$ удовлетворяется автоматически, а на внутренней $r = r_i = a$ — приводит к трансцендентному характеристическому уравнению:

$$\operatorname{tg}[k(1-a)] = \frac{B_n(k)A_n(ka) - A_n(k)B_n(ka)}{A_n(k)A_n(ka) + B_n(k)B_n(ka)}. \quad (34)$$

Каждому значению меридионального индекса $n = 1, 2, \ldots$ соответствует бесконечная серия волновых чисел k_{nl}, являющихся корнями уравнения (34) и отмеченных значениями радиального индекса $l = 1, 2, \ldots$

Построенные таким образом функции $u_{nl} = u_{nl}(r, \theta)$ удовлетворяют уравнению $\Delta_1 u_{nl} + k_{nl}^2 u_{nl} = 0$, ортонормированы в метрике (31) и подчинены заданным требованиям на границах сферического слоя:

$$\langle u_{n'l'}, \Delta_1 u_{nl}\rangle = -k_{n'l'} k_{nl} \delta_{n'l', nl}, \quad \langle u_{n'l'}, u_{nl}\rangle = \delta_{n'l', nl},$$

$$u_{nl}|_{(S_i)} = 0, \qquad u_{nl}|_{(S_e)} = 0. \quad (35)$$

Для нахождения спектральных чисел γ_σ и коэффициентов C_{nl}^{σ} разложения (30) представим оператор уравнения (29) в матричной форме. Матричные элементы его первого слагаемого, т. е. оператора Δ_1, выражены формулой (35). Матричные элементы второго слагаемого обозначим $\lambda_\sigma^{-2} M_{n'l', nl}$, где $\lambda_\sigma = \gamma_\sigma/\alpha$ — нормированный по α инкремент моды с номером σ,

$$M_{n'l', nl} = \langle u_{n'l'}, \frac{-4}{r^2 \sin^2\theta} \hat{L} u_{nl}\rangle. \quad (36)$$

Тогда, применяя обозначения

$$\nu = \{n, l\}, \qquad \nu' = \{n', l'\},$$

$$m_{\nu'\nu} = \frac{M_{\nu'\nu}}{k_{\nu'} k_\nu}, \qquad f_\nu^{\sigma} = k_\nu C_\nu^{\sigma}, \quad (37)$$

вместо (29) можно написать уравнение

$$\sum_\nu (m_{\nu'\nu} - \lambda_\sigma^2 \delta_{\nu'\nu}) f_\nu^{\sigma} = 0 \qquad (\nu, \nu' = 1, 2, \ldots). \quad (38)$$

Для построения матрицы $\hat{\mathbf{M}} = \{M_{\nu'\nu}\}$ используем (28), (31)—(33), откуда следует:

$$M_{n'l', nl} = -4 \int_a^1 \int_0^\pi \frac{u_{n'l'}(r, \theta)}{\sin\theta} \hat{L} u_{nl}(r, \theta) dr d\theta =$$

$$= L^{(1)}_{n'l', nl} N^{(1)}_{n'n} + L^{(2)}_{n'l', nl} N^{(2)}_{nn'} + L^{(2)}_{nl, n'l'} N^{(2)}_{n'n},$$

где

$$L^{(1)}_{n'l', nl} = \int_a^1 \frac{d}{dr} \frac{R_{n'}(k_{n'l'} r)}{\|R_{n'l'}\|} \frac{d}{dr} \frac{R_n(k_{nl} r)}{\|R_{nl}\|} dr,$$

$$L^{(2)}_{n'l',nl} = -\int_a^1 \frac{R_{n'}(k_{n'l'}r)}{\|R_{n'l'}\|}\frac{d}{dr}\frac{R_n(k_{nl}r)}{\|R_{nl}\|}\frac{dr}{r},$$

$$N^{(i)}_{n'n} = \frac{4}{\|P_{n'1}\|\|P_{n1}\|}\int_0^\pi \frac{P_{n'1}(\cos\theta)}{\sin\theta} g^{(i)}_n(\theta)d\theta$$

$$(i = 1, 2)$$

$$g^{(1)}_n(\theta) = \cos^2\theta P_{n1}(\cos\theta),$$

$$g^{(2)}_n(\theta) = \sin^2\theta \frac{d^2}{d\theta^2} P_{n1}(\cos\theta) +$$

$$+ 2\sin\theta\cos\theta \frac{d}{d\theta} P_{n1}(\cos\theta).$$

Заменой $\cos\theta = x$ вычисление $N^{(i)}_{n'n}$ сводится к интегрированию полиномов от x, а вычисление $L^{(i)}_{n'l',nl}$, ввиду полиномиально-тригонометрической формы $R_n(k_{nl}r)$, допускает использование табличных интегралов.

Задаваясь размером $N\times N$ матрицы $\hat{\mathbf{m}} = \{m_{\nu'\nu}\}$, упорядочим последовательность $\nu = \{n, l\}$ по мере возрастания $k_\nu = k_{nl}$. Фиксируя N, построим модальный столбец с некоторым номером $\sigma = \sigma_0(N)$, для которого $\lambda^2_\sigma|_{\sigma=\sigma_0}$ имеет максимальное значение $\lambda^2_{\max}(N)$. Это дает возможность определить наиболее быстро возрастающее во времени частное решение (30) уравнения (29). С целью экономии объема вычислений вначале заметим, что из-за четной симметрии второго слагаемого в операторе уравнения (29) относительно экваториальной плоскости $\theta = \pi/2$ взаимодействия между нечетными и четными по n гармониками нет. Поэтому в соответствующих подпространствах матрицы $\hat{\mathbf{m}}_{\text{неч}}$ и $\hat{\mathbf{m}}_{\text{чет}}$ действуют независимо друг от друга. Соответственно при заданном N число учитываемых гармоник может быть удвоено без существенного увеличения количества необходимых выкладок.

Расчеты выполнялись для $1 \le N \le 6$ в обоих вариантах — нечетном и четном. В табл. 1 для $a = 0.36$, соответствующего реальным параметрам Земли, приведены значения волновых чисел k_{nl} элементарных гармоник, участвующих в формировании составных мод $\sigma_0(N)$. Зависимость $\lambda_\sigma|_{\sigma=\sigma_0(N)} = \lambda_{\max}(N)$ от числа N элементарных гармоник, используемых при построении наиболее неустойчивых нечетных либо четных составных мод, представлена табл. 2.

Таблица 1. Значения волновых чисел k_{nl} для элементарных гармоник

l	n							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	5.37	6.16	7.16	8.25	9.38	10.52	11.62	12.60
2	10.08	10.60	11.32	12.22	13.24	14.34	15.45	16.71
3	14.91	15.27	15.80	16.48	17.30	18.24	19.22	20.35

Таблица 2. Зависимость $\lambda_{\max}(N)$ от числа N элементарных гармоник

N	1	2	3	4	5	6
нечетные n	2.06	3.92	4.66	4.67	5.25	5.56
четные n	3.29	4.34	4.92	4.97	6.12	6.39

Результаты компьютерных расчетов линий уровня функций тока $A(r, \theta) = f(r, \theta)r\sin\theta$, отображающих картину течения в меридиональной плоскости $\varphi = \text{const}$, даны на рис. 1 для нечетных и рис. 2 для четных n. Внутреннее твердое ядро показано штриховкой, ось вращения направлена по вертикали.

На основании полученных данных можно сделать следующие выводы:

волновые числа k_{nl} (как для нечетных, так и для четных n) монотонно увеличиваются по мере увеличения как n, так и l;

для выстраивания k_{nl} в порядке монотонного возрастания требуется перемежаемость наращивания меридионального и радиального чисел n и l; этим объясняется некоторое нарушение плавности монотонного увеличения $\lambda_{\max}(N)$ в табл. 2;

нормированный на α максимальный инкремент $\lambda_{\max}(N)$ увеличивается с постепенным замедлением увеличения по мере подключения новых гармоник (т. е. с увеличением N); при одинаковых N инкремент составных мод для четного типа всегда больше, чем для нечетного;

судя по рисунку, по мере увеличения N для обоих типов составных мод наблюдается постепенное стягивание меридионального течения к оси вращения, причем для мод четного типа этот эффект заметно больше, поскольку для мод нечетного типа твердое ядро является препятствием такому стягиванию; кроме того, отмечается расслаивание течения по вертикали на отдельные вихри;

характерный временной масштаб τ нарастания возмущений составных мод, оцениваемый для параметров жидкого ядра Земли, как и в случае цилиндрического слоя, при $\alpha = 10^{-3}$ имеет порядок 1 год.

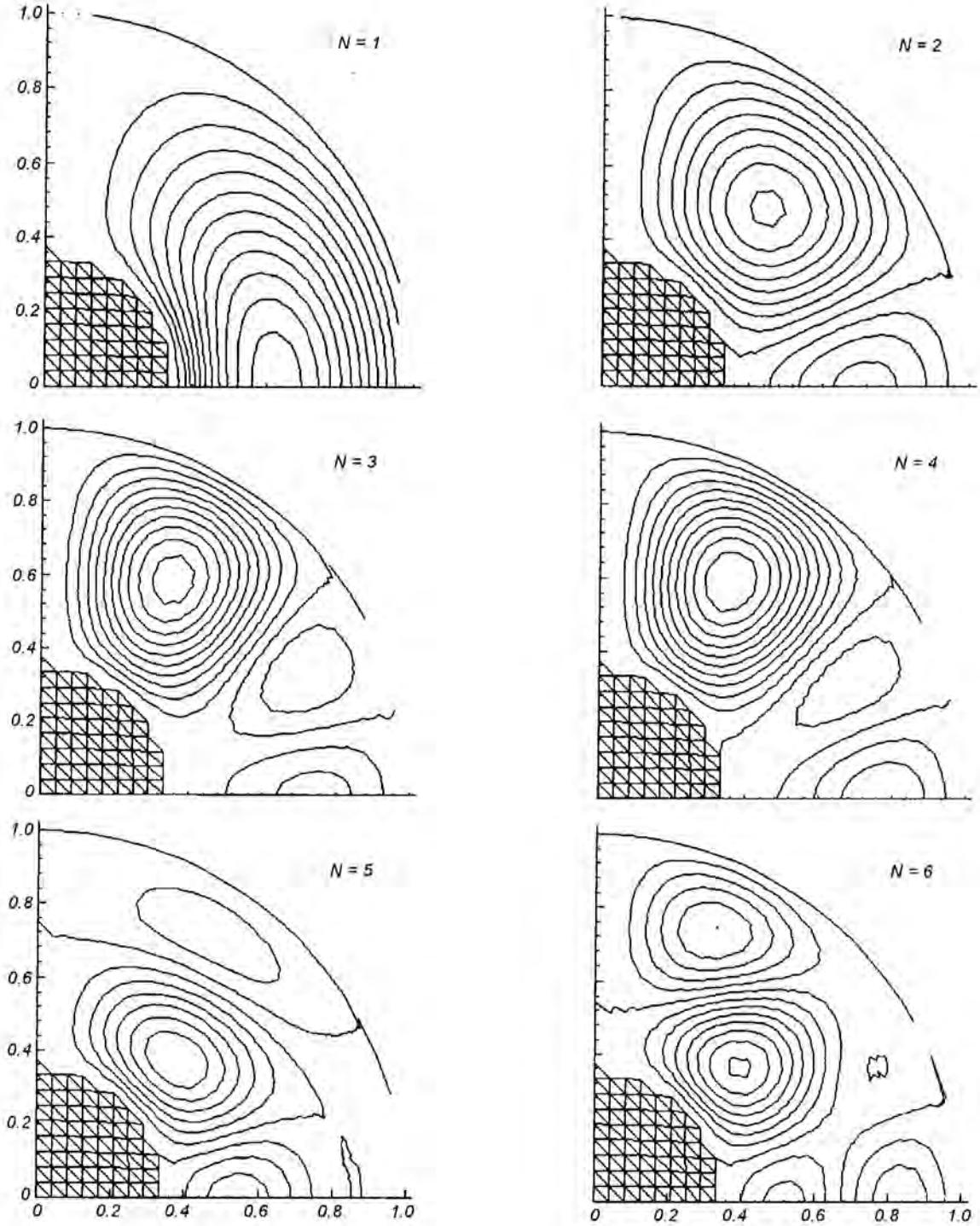

Рис. 1. Изменение с увеличением N картины течения, развивающегося в меридиональной плоскости для нечетных n

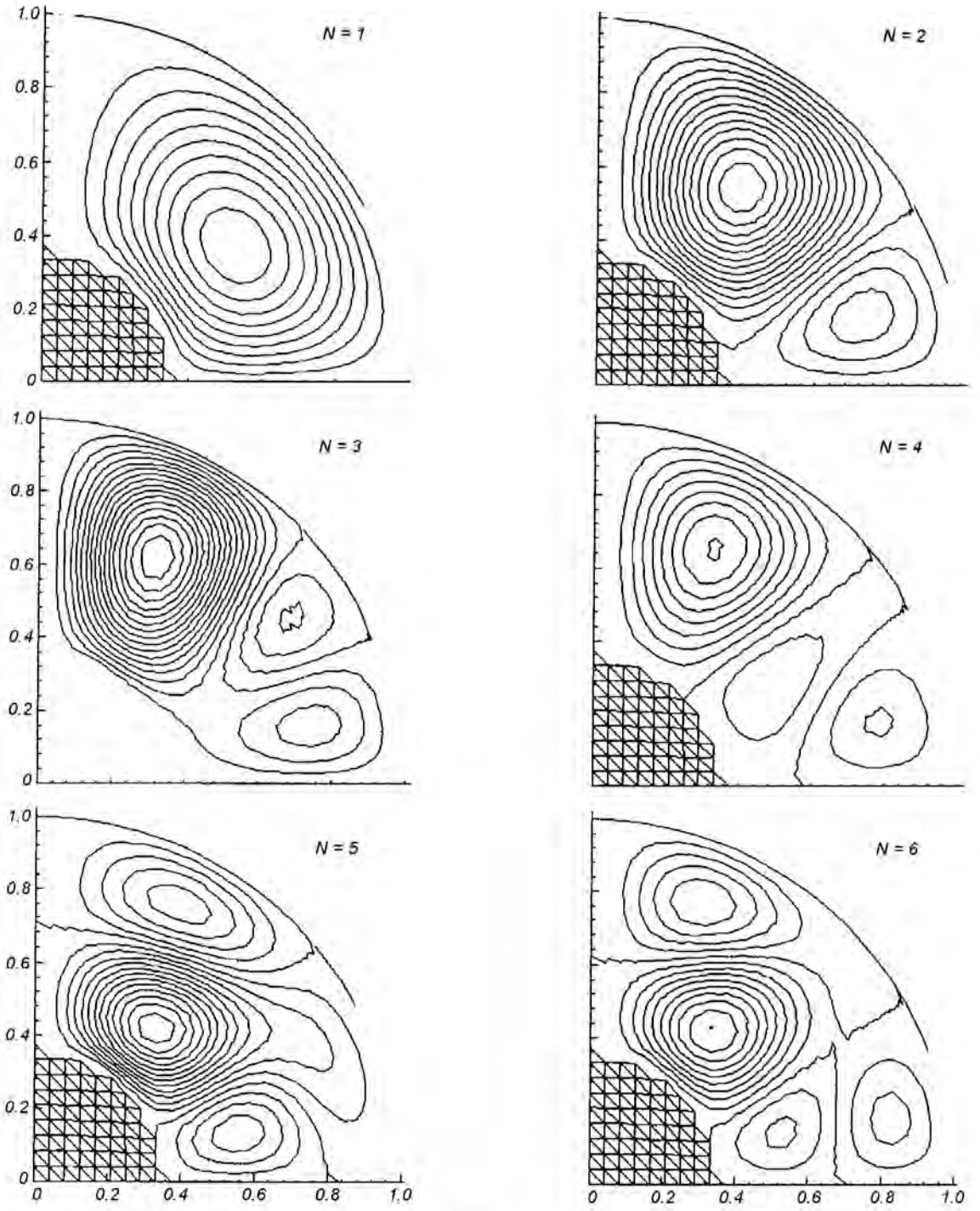

Рис. 2. Изменение с увеличением N картины течения, развивающегося в меридиональной плоскости для четных n

4. ВЫВОД ОПРЕДЕЛЯЮЩЕГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СТАЦИОНАРНОГО ОСЕСИММЕТРИЧЕСКОГО МГД-ТЕЧЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Как известно [10], в силу теоремы Каулинга стационарный динамо-процесс невозможен в осесимметрическом МГД-течении из-за джоулевых потерь. Тем не менее, как следует из работ Брагинского [2, 3], если магнитная вязкость достаточно мала, генерация магнитного поля в реальной жидкости принципиально возможна даже при сколь угодно слабом нарушении осевой симметрии. Поскольку в данной ситуации силы вязкости значительно уступают динамическим, представляет самостоятельный интерес рассмотрение предельного случая полной осевой симметрии МГД-течения несжимаемой жидкости с пренебрежимо малыми потерями.

Исходными служат уравнение баланса сил и уравнение индукции магнитного поля

$$[\mathbf{V}\times\mathbf{\Gamma}] - [\mathbf{H}\times\mathbf{J}] + \varepsilon\eta\Delta\mathbf{V} = \operatorname{grad} W, \qquad (39)$$

$$\operatorname{rot}[\mathbf{V}\times\mathbf{H}] + \varepsilon\eta_m\Delta\mathbf{H} = 0 \qquad (0 \le \varepsilon \ll 1), \qquad (40)$$

записанные для стационарного течения в неподвижной системе координат. Здесь $\operatorname{grad} W$ — обобщенная потенциальная сила, $\mathbf{\Gamma} = \operatorname{rot}\mathbf{V}$, $\mathbf{J} = \operatorname{rot}\mathbf{H}$, причем $\operatorname{div}\mathbf{V} = 0$, $\operatorname{div}\mathbf{H} = 0$.

В этих уравнениях, наряду с вышеприведенными безразмерными механическими величинами и кинематической вязкостью $\varepsilon\eta$, введено безразмерное магнитное поле

$$\mathbf{H} = \mathbf{V}_A L^{-1} T,$$

выраженное через альвеновскую скорость

$$\mathbf{V}_A = \frac{\mathbf{B}}{\sqrt{\mu_0 \rho_m}}$$

$$(\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\ \text{Гн}\cdot\text{м}^{-1}),$$

пропорциональную индукции $\mathbf{B}$ и отнесенную к характерной скорости течения

$$V = LT^{-1} = 2.55\cdot 10^2\ \text{м}\cdot\text{с}^{-1}.$$

В соответствии с общепринятой [4, 10] оценкой для жидкого ядра Земли магнитного числа Рейнольдса $R_m \approx 150$, используемая в (40) безразмерная магнитная вязкость определяется как

$$\varepsilon\eta_m = R_m^{-1} = 0.67\cdot 10^{-2}.$$

Согласно [4] известны оценки индукции магнитного поля $\mathbf{B}$ в жидком ядре, а также коэффициента магнитной диффузии $\lambda = 1.6\ \text{м}^2\text{с}^{-1}$, связанной с R_m, характерной длиной L и скоростью U сдвигового течения соотношением $LU = \lambda R_m$, откуда получаем:

$$U = \lambda R_m / L = 0.7\cdot 10^{-4}\ \text{м}\cdot\text{с}^{-1}.$$

Сравнивая эту величину с $V_A = 5\cdot 10^{-4}\ \text{м}\cdot\text{с}^{-1}$, определяемой по характерной для земного магнетизма величине $B = 0.5\cdot 10^{-4}$ Тл и $\rho_m = 10^4\ \text{кг}\cdot\text{м}^{-3}$, приходим к выводу о преобладании в сдвиговом МГД-течении в жидком ядре Земли энергии магнитного поля над кинетической примерно в 50 раз. Это может служить дополнительным аргументом в пользу гипотезы Кречетова [6].

Так как $\Delta\mathbf{H} = -\operatorname{rot}\mathbf{J}$, то из (40) следует

$$[\mathbf{V}\times\mathbf{H}] - \varepsilon\eta_m\mathbf{J} = \operatorname{grad}\psi, \qquad (41)$$

где ψ — скалярный потенциал электрического поля. Применив к (39) операцию rot, получим:

$$\operatorname{rot}[\mathbf{V}\times\mathbf{\Gamma}] - \operatorname{rot}[\mathbf{H}\times\mathbf{J}] + \varepsilon\eta\Delta\mathbf{\Gamma} = 0. \qquad (42)$$

Благодаря осевой симметрии, все составляющие векторов $\mathbf{V}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{\Gamma}$, $\mathbf{J}$ можно выразить через четыре скалярные функции A, V, B, H от координат меридионального сечения $\varphi = \text{const}$.

В частности, для цилиндрической системы имеем следующие формулы:

$$\begin{gathered}
V_\rho = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial A}{\partial z}, \qquad V_\varphi = \frac{1}{\rho}V, \\
V_z = \frac{1}{\rho}\frac{\partial A}{\partial \rho}, \\
H_\rho = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial B}{\partial z}, \qquad H_\varphi = \frac{1}{\rho}H, \\
H_z = \frac{1}{\rho}\frac{\partial B}{\partial \rho}, \\
\Gamma_\rho = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial z}, \qquad \Gamma_\varphi = -\frac{1}{\rho}\hat{\Lambda}A, \\
\Gamma_z = \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \rho}, \\
J_\rho = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial H}{\partial z}, \qquad J_\varphi = -\frac{1}{\rho}\hat{\Lambda}B, \\
J_z = \frac{1}{\rho}\frac{\partial H}{\partial \rho},
\end{gathered} \qquad (43)$$

где

$$\hat{\Lambda} = \rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Для сферической системы $\hat{\Lambda}$-оператор Стокса:

$$\hat{\Lambda} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right).$$

С учетом того, что $\mathrm{grad}_\varphi = 0$, для φ-составляющих уравнений (39)—(42) можно записать

$$\begin{gathered}[\mathbf{V}\times\mathbf{H}]_\varphi - \varepsilon\eta_m J_\varphi = 0,\\ [\mathbf{V}\times\mathbf{\Gamma}]_\varphi - [\mathbf{H}\times\mathbf{J}]_\varphi + \varepsilon\eta\Delta_1 V_\varphi = 0,\\ \mathrm{rot}_\varphi\,[\mathbf{V}\times\mathbf{H}] + \varepsilon\eta_m\Delta_1 H_\varphi = 0,\\ \mathrm{rot}_\varphi\,[\mathbf{V}\times\mathbf{\Gamma}] - \mathrm{rot}_\varphi\,[\mathbf{H}\times\mathbf{J}] + \varepsilon\eta\Delta_1\Gamma_\varphi = 0.\end{gathered} \tag{44}$$

Здесь оператор Δ_1 определяется согласно (25).

Для дальнейшего изложения введем билинейную кососимметрическую дифференциальную операцию над заданной парой функций $f = f(\rho, z)$, $g = g(\rho, z)$, обозначаемую скобкой

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial\rho} - \frac{\partial f}{\partial\rho}\frac{\partial g}{\partial z}. \tag{45}$$

Тогда результат подстановки (43) в (44) можно записать следующим образом:

$$\begin{gathered}\{A, B\} + \varepsilon\eta_m\rho\hat{\Lambda}B = 0,\\ \{A, V\} - \{B, H\} + \varepsilon\eta\rho^2\Delta_1\left(\frac{V}{\rho}\right) = 0,\\ \left\{A, \frac{H}{\rho^2}\right\} - \left\{B, \frac{V}{\rho^2}\right\} + \varepsilon\eta_m\Delta_1\left\{\frac{H}{\rho}\right\} = 0,\\ \left\{A, \frac{\hat{\Lambda}A}{\rho^2}\right\} - \left\{B, \frac{\hat{\Lambda}B}{\rho^2}\right\} + \varepsilon\eta\Delta_1\left\{\frac{\hat{\Lambda}A}{\rho}\right\} = \\ = \frac{1}{\rho^3}\frac{\partial}{\partial z}(V^2 - H^2).\end{gathered} \tag{46}$$

Система (46) содержит малый параметр при старших производных, т. е. является сингулярно возмущенной. Поэтому из области определения искомых функций целесообразно выделить тонкий пограничный слой с тем, чтобы в оставшемся объеме можно было упростить решение задачи, полагая $\varepsilon = 0$.

Уравнения (46), в которых $\varepsilon = 0$, определяют стационарное осесимметрическое МГД-течение идеальной жидкости. Благодаря свойствам скобки (45), первые три уравнения системы (46) удовлетворяются одновременно, если

$$\begin{gathered}B = B(A), \qquad V = V(A),\\ H = B'(A)V(A),\end{gathered} \tag{47}$$

где $B(A)$ и $V(A)$ — некоторые гладкие функции от A, $B' = \dfrac{d}{dA}B(A)$. Подставляя в четвертое уравнение функции B, V, H, согласно (47), можно записать это уравнение в виде следующего коммутационного соотношения:

$$\left\{A, \frac{1}{\rho^2}[1 - B'^2(A)][\hat{\Lambda}A + V(A)V'(A)] - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{\rho^2}B'(A)B''(A)[\mathrm{grad}^2 A + V^2(A)]\right\} = 0.$$

Оно удовлетворяется тогда, когда выражение, стоящее на втором месте в коммутаторе, является некоторой произвольной функцией $S = S(A)$. С учетом этого обстоятельства получаем квазилинейное дифференциальное уравнение второго порядка для определения функции $A = A(\rho, z)$:

$$\hat{\Lambda}A + Q(A)\,\mathrm{grad}^2 A = \rho^2\Psi(A) + \Phi(A). \tag{48}$$

Это уравнение содержит три произвольные функции, зависящие от ранее введенных $B(A)$ и $V(A)$, а также от упомянутой функции $S(A)$ согласно формулам

$$\begin{gathered}Q(A) = -\frac{B'(A)B''(A)}{1 - B'^2(A)},\\ \Psi(A) = \frac{S(A)}{1 - B'^2(A)},\\ \Phi(A) = -V(A)[V'(A) + V(A)Q(A)].\end{gathered} \tag{49}$$

Уравнение (48) позволяет рассчитывать стационарные МГД-течения в осесимметрических областях с произвольной кусочно-гладкой границей, в том числе для сферического слоя. При решении существенно нелинейных задач полезно преобразовать (48) в интегродифференциальную форму

$$A(\xi) = \int_D G(\xi, \xi')\{Q[A(\xi')]\mathrm{grad}^2 A(\xi') -$$
$$- \rho^2(\xi')\Psi[A(\xi')] - \Phi[A(\xi')]\}d\xi',$$

где ξ, $\xi' \in D$, $G(\xi, \xi')$ — функция Грина для области D меридионального сечения, на границе (D) которой задано условие непротекания $A|_{(D)} = 0$. Такой подход позволяет, в частности, исследовать ветвление решений и определять их устойчивость при изменении параметров функций Q, Ψ, Φ.

При слабой надкритичности ($\alpha^2 \ll 1$) в установившемся режиме величину A можно считать достаточно малой. Тогда в линейном приближении запишем

$$B(A) = B_0 + B_1 A$$

$$(B_1^2 < 1, \quad Q(A) = 0),$$

$$V(A) = V_0 + V_1 A,$$

$$\Psi(A) = \Psi_0 + \Psi_1 A,$$

$$\Phi(A) = \Phi_0 + \Phi_1 A = -V(A)V'(A).$$

Отсюда

$$\Phi_0 = -V_0 V_1, \qquad \Phi_1 = -V_1^2.$$

При этом уравнение (48) принимает вид

$$\rho \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A}{\partial \rho}\right) + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + (V_1{}^2 - \Psi_1 \rho^2)A = \\ = -(V_0 V_1 - \Psi_0 \rho^2). \qquad (50)$$

Рассмотрим в качестве примера стационарное решение для цилиндрического слоя $(1 - a \le \rho \le \le 1 + a,\ 0 \le z \le b)$, устойчивость которого исследована в п. 2. Ввиду того, что коэффициенты в (50) не зависят от z, представим A рядом Фурье по z:

$$A = A(\rho, z) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(\rho) \sin \frac{(2k-1)\pi z}{b}. \qquad (51)$$

В результате подстановки (51) в (50) получаем уравнение для $A_k = A_k(\rho)$:

$$\frac{d}{d\rho}\left[p(\rho)\frac{dA_k}{d\rho}\right] - q_k(\rho) = -f_k(\rho), \qquad (52)$$

где

$$q_k(\rho) = \left[\frac{(2k-1)^2\pi^2}{b^2} - V_1^2\right]\frac{1}{\rho} + \Psi_1 \rho,$$

$$f_k(\rho) = -\frac{4}{(2k-1)\pi}\left(V_0 V_1 \frac{1}{\rho} - \Psi_0 \rho\right),$$

$$p(\rho) = \frac{1}{\rho}.$$

Решение неоднородного уравнеия (52) представим в виде

$$A_k(\rho) = \int_{1-a}^{1+a} G_k(\rho, \rho') f_k(\rho') d\rho'. \qquad (53)$$

Здесь

$$G_k(\rho, \rho') = \rho\rho' \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\widetilde{Z}_1(\mu_n \rho)\widetilde{Z}_1(\mu_n \rho')}{\mu_n^2 + \dfrac{(2k-1)^2\pi^2}{b^2} - V_1^2},$$

$\widetilde{Z}_1(\mu_n \rho)$ — собственные функции краевой задачи для уравнения

$$\frac{d^2}{d\rho^2}\widetilde{Z}_1(\mu_n \rho) + \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\widetilde{Z}_1(\mu_n \rho) + \\ + \left(\mu_n^2 - \frac{1}{\rho^2} - \Psi_1 \rho^2\right)\widetilde{Z}_1(\mu_n \rho) = 0,$$

удовлетворяющие условиям непротекания

$$\widetilde{Z}_1[(1-a)\mu_n] = 0,$$

$$\widetilde{Z}_1[(1+a)\mu_n] = 0$$

и условию нормировки

$$\int_{1-a}^{1+a} \widetilde{Z}_1^2(\mu_n \rho)\rho d\rho = 1,$$

а μ_n — собственные числа этой задачи. Очевидно, при $\Psi_1 = 0$ функции $\widetilde{Z}_1(\mu_n \rho)$ переходят в цилиндрические функции $Z_1(\mu_n \rho)$, а при $\Psi_1 \ne 0$ могут быть выражены через них путем итерационной процедуры.

Константы V_0, V_1, Ψ_0, Ψ_1 определяются из следующих соображений. Согласно (43)

$$V_\varphi(1-a) = \frac{V_0}{1-a},$$

$$V_\varphi(1+a) = \frac{V_0}{1+a},$$

так как $A(\rho, z)|_{\rho = 1 \pm a} \equiv 0$. Не ограничивая общности, выбором единицы измерения угловой скорости невозмущенного стационарного вращения можно распорядиться таким образом, чтобы $V_0 = 1$, и получить критический профиль скорости $V_\varphi(\rho) = \dfrac{1}{\rho}$. Тогда выражение для возмущенной скорости внутри слоя запишем в виде

$$V_\varphi(\rho, z) = \frac{1 + V_1 A(\rho, z)}{\rho}. \qquad (54)$$

Надкритический режим дифференциального вращения при малой надкритичности и малой вязкости характеризуется тем, что окружная скорость внутреннего цилиндра больше значения $\dfrac{1}{1-a}$, а внешнего цилиндра — меньше значения $\dfrac{1}{1+a}$ на величины порядка α^2. Внутренний объем жидкости отделен от вращающихся стенок тонким пограничным слоем. Поскольку азимутального ускорения в стационарном течении нет, средние по z моменты сил касательного трения на внешней и внутренней границах должны компенсировать друг друга. Они

пропорциональны средним по z производным от V_φ по ρ (с учетом ориентации внешней нормали) и квадратам радиусов граничных поверхностей. Надо также иметь в виду, что при малой надкритичности силы касательного трения в пограничном слое пропорциональны α^2. Тогда согласно (54) получаем дополнительные к условиям непротекания граничные условия для A

$$(1+a)V_1\frac{1}{b}\int_0^b \frac{\partial}{\partial\rho}\Big|_{\rho=1+a} A(\rho, z)dz =$$

$$= (1-a)V_1\frac{1}{b}\int_0^b \frac{\partial}{\partial\rho}\Big|_{\rho=1-a} A(\rho, z)dz = \alpha^2 M, \quad (55)$$

где M — заданная константа, определяющая величину момента сил трения.

Общее решение уравнения (50) получается подстановкой (53) в (51) с учетом (52). Константы V_1 и Ψ_0 находятся из граничных условий (55), а константа Ψ_1 доопределяется из какого-либо дополнительного требования, например, согласно принципу Пригожина, — минимума производства энтропии. Если в результате Ψ_1 окажется достаточно малой величиной, то, выполняя интегрирование в (50), приближенно получим

$$A \approx A_0(\rho, z) =$$

$$= \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[(V_1 - \rho'^2\Psi_0)Z_0(\mu_n\rho')\right]_{\rho'=1-a}^{\rho'=1+a}}{(2k-1)\mu_n\left[\mu_n^2 + (2k-1)^2\frac{\pi^2}{b^2} - V_1^2\right]}\times$$

$$\times\rho Z_1(\mu_n\rho)\sin(2k-1)\frac{\pi z}{b}.$$

Замечая, что при $\varepsilon = 0$ система (46) инвариантна относительно одновременной перестановки $A \Leftrightarrow B$, $V \Leftrightarrow H$ нетрудно записать уравнение для нахождения $B = B(\rho, z)$, по форме совпадающее с (48) при

$$Q(B) = -\frac{A'(B)A''(B)}{1 - A'^2(B)}.$$

Если ограничиться линейной зависимостью $A = A(B)$, то при условии $A'^2(B) \neq 1$ следует, что $Q(B) = 0$. Тогда получаем уравнение вида

$$\hat{\Lambda}B = \rho^2\Psi(B) + \Phi(B),$$

хорошо известное в теории равновесия плазмы как уравнение Шафранова [11].

На возможность записи двумерных уравнений гидродинамики идеальной жидкости в форме коммутационных соотношений было указано Арнольдом в [1]. Плоскопараллельное ($\partial/\partial z = 0$) МГД-течение в цилиндрических координатах при отсутствии составляющих скорости и магнитного поля вдоль оси z рассмотрено с применением техники коммутаторов в работе [15].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сам по себе феномен дифференциального вращения в жидком ядре отмечается и в других теориях гидромагнитного динамо (см., например, [4]). Там это явление упоминается как следствие переноса в жидком ядре момента импульса азимутального вращения восходящими и нисходящими конвективными потоками. По нашему же мнению, дифференциальное вращение, будучи следствием приливного торможения внешней оболочки, само является главным энергетическим приводом (при вспомогательной роли прочих факторов) как для возбуждения конвективных процессов в жидком ядре, так и для динамо-процесса в целом. Данную работу следует рассматривать как первый этап комплекса исследований, направленных на построение адекватной модели геомагнитного динамо, основанной на гипотезе о преобладающей роли дифференциального вращения в жидком ядре планеты.

1. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1989.—472 с.
2. Брагинский С. И. Структура слоя F и причины конвекции в ядре Земли // Докл. АН СССР.—1963.—149.—С. 8—10.
3. Брагинский С. И. Почти аксиально-симметричная модель гидромагнитного динамо Земли. I // Геомагнетизм и аэрономия.—1975.—15.—С. 149—156.
4. Буссе Ф. Магнитная гидродинамика земного динамо // Вихри и волны. — М.: Мир, 1984.—С. 199—233.
5. Долгинов Ш. Ш. Исследование магнитных полей планет // Электромагнитные и плазменные процессы от Солнца до ядра Земли. — М.: Наука, 1989.—С. 247—261.
6. Кречетов В. В. Приливные силы и генерация магнитных полей планет // Космич. исследования.—1999.—37, № 4.—С. 392—396.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. — М.: Физматгиз, 1959.—532 с.
8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. — М.: Наука, 1986.—733 с.
9. Манк У., Макдональд Г. Вращение Земли. — М.: Мир, 1964.
10. Моффат Г. Возбуждение магнитного поля в проводящей среде. — М.: Мир, 1980.—339 с.
11. Шафранов В. Д. Равновесие плазмы в магнитном поле // Вопросы теории плазмы. — М.: Госатомиздат, 1963.—Вып. 2.—С.92—131.
12. Backus G., Chandrasekhar S. On Cowling's theorem on the impossibility of self-maintained axisymmetric homogeneous dynamos // Proc. Natl. Acad. Sci.—1956.—42.—P. 105—109.

13. Bullard E. C. Reversals of the Earth's magnetic field // Phil. Trans. Roy. Soc.—1968.—A 263.—P. 481—524.
14. Bullard E. C., Gellman H. Homogeneous dynamos and terrestrial magnetism // Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A.—1954.—247.—P. 213—278.
15. Cheremnykh O. K., Edenstrasser J. W., Gorin V. V. Relaxation of a non- ideal incompressible plasma with mass flow // J. Plasma Phys.—1999.—62, part 2.—P. 195—202.
16. Cowling T. G. The magnetic field of sunspots // Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.—1934.—94.—P. 39—48.
17. Cowling T. G. Sunspots and the solar cycle // Nature.—1975.—255.—P. 189—190.
18. Elsasser W. M. Thermal stratification and core convection // Abstr. EOS Trans. Am. Geophys. Union.—1972.—53.—605 p.
19. Frazer M. C. Temperature gradients and convective velocity in the Earth's magnetic field // Geophys. J. Roy. Astron. Soc.—1973.—34.—P. 193—201.
20. Glatzmaier G. A., Roberts P. H. A three-dimensional self-consistent computer simulation of a geomagnetic field reversal // Nature.—1995.—377.—P. 203—209.
21. Malkus W. V. Procession on the Earth as the cause of geomagnetism // Science.—1968.—160.—P. 259—264.
22. Roberts P. H. Dynamics of the core, geodynamo // Rev. Geophys..—1995.—33 Suppl.—(U. S. National Report to IUGG, 1991—1994).
23. Rochester M. G., Jacobs W. A., Smylie D. E., Chong K. F. Can procession power the geomagnetic dynamo? // Geophys. J. Roy. Astron. Soc.—1975—43.—P. 661—678.
24. Stevenson D. J. The core — mantle electrochemical cell as an explanation for part of the geomagnetic field — EOS, 1991, 72, Supp.—133 p.

EXCITATION OF MERIDIONAL FLOW BY DIFFERENTIAL ROTATION IN EARTH'S LIQUID CORE

A. A. Loginov, Yu. I. Samoilenko, and V. A. Tkachenko

We investigate the excitation of meridional flow by the differential rotation of the Earth's liquid core. The excitation mechanism is based on the hypothesis about the primary role of the differential rotation of the inner core and mantle. For cylindrical and spherical liquid layers confined between two rotating axially symmetric shells, the conditions for the azimuth flow instability which creates a meridional component were obtained. Methods were proposed for the solution of nonlinear equations describing steady flows at large Reynolds numbers.