

УДК 629.7.015

# Проблемы межпланетных оптимизации экспедиций пилотируемых

Б. Н. Кифоренко, И. Ю. Васильев

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ

*Надійшла до редакції 08.07.99*

В межах єдиної варіаційної проблеми розглянуті задачі оптимізації параметрів, вибору траекторій польоту і оптимального керування рухом і роботою системи забезпечення життєдіяльності (СЗЖ) космічних апаратів пілотованих міжпланетних експедицій. Досліджується ефективність активного скидання відходів СЗЖ за рахунок енергії реактивного струменя ракетних двигунів великої тяги у порівнянні з їхньою частковою регенерацією. Підтверджено принципову можливість здійснення перших пілотованих експедицій на Марс до розробки перспективних біорегенеративних СЗЖ.

## ВВЕДЕНИЕ: ЦЕЛЬ И СРЕДСТВА. СВОБОДА И НЕОБХОДИМОСТЬ

Оценивая на грани тысячелетий научно-технические достижения человечества, необходимо признать начало практического освоения космического пространства одним из наиболее впечатляющих и вместе с тем неожиданных. Преклонение перед дерзкими идеями провозвестников эпохи К. Э. Циолковского, Ф. А. Цандера, Р. Годдарда, Г. Оберта, В. Гомана, Р. Эно-Пельтири ни в малейшей степени не снижает остроты проблемы оправданности и своевременности тех поистине баснословных затрат, которые произведены космическими державами для обеспечения современного уровня космической деятельности. Приходится признать, что неизбежный выход из своей колыбели цивилизация Третьей планеты Солнечной системы вынуждена была сделать в связи с весьма неблагоприятными особенностями своего исторического развития. Драматическое отставание этического совершенствования участников исторического процесса от все ускоряющегося технического прогресса привело в XX веке к двум мировым войнам. Третья, ракетно-ядерная мировая война, потенциально угрожавшая планетарной катастрофой, велась в виде демонстрации силы. Все более разрушительные

ядерные боеприпасы взрывались на испытательных полигонах, расположенных на собственной территории, а совершенство средств доставки демонстрировалось в космической гонке сверхдержав.

Выпущенный для устрашения потенциального противника в борьбе за мировое господство джинн космической экспансии начал, однако, довольно скоро вносить все более весомый вклад в решение глобальных проблем человечества. Все возрастающая экономическая эффективность вложений в материальное и научно-техническое обеспечение космической деятельности привела к осознанию целесообразности дальнейшего движения по пути, на который вынуждено было вступить человечество в середине нашего века. Однако спад напряженности противостояния сверхдержав снижает остроту демонстрационного аспекта космического соревнования. Вместе с тем расширяются возможности объединения промышленных и научных потенциалов вчера еще непримиримых противников для осуществления все более значительных шагов. При этом повышенная острота проблем конверсии отраслей народного хозяйства, созданных для обслуживания демонстрационной и, как теперь можно надеяться, лишь гипотетической ракетно-ядерной войны, делает постановку весьма сложных и, казалось бы, пока не современных космических проблем до-

статочно актуальными. В ряду таких проблем одной из наиболее привлекательных и сложных является организация пилотируемой экспедиции к планете Марс.

Успешное осуществление еще недавно казавшихся фантастическими полетов на Луну и длительные экспедиции космонавтов на станции «Мир» продемонстрировали реальность межпланетных экспедиций. Однако громадная удаленность Марса от Земли делает невозможным обеспечение жизнедеятельности экипажа уже хорошо отработанным в наше время способом, основанным на периодическом пополнении расходуемых запасов поставками с Земли. Естественным и практически единственным путем преодоления этого препятствия представляется использование систем обеспечения жизнедеятельности (СОЖ) с высокой степенью замкнутости, позволяющих получать необходимые для жизни экипажа вещества путем регенерации их из отходов для повторного (многократного) использования. Такая система должна, по современным представлениям, воспроизвести на борту экспедиционного комплекса основные функциональные особенности экосистемы Земли с естественным круговоротом веществ, обеспечивающих существование человека. Сложность подобного моделирования общеизвестна, и современная оценка сроков возможной разработки указанных СОЖ в два-три десятилетия представляется отнюдь не завышенной.

Поиски альтернативных подходов, снижающих требования к уровню замкнутости СОЖ, направлены на анализ таких сценариев экспедиции, которые позволяли бы использовать большее количество необходимых веществ без существенного увеличения выводимой на монтажную околоземную орбиту начальной массы экспедиционного комплекса. Если не принимать всерьез экзотические идеи использования внеземных ресурсов, более или менее реалистические предложения касаются использования атмосфер планет для торможения при подлете к Марсу и Земле, рассредоточения во времени стартовой активности путем предварительной заброски в окрестности Марса материально-технического обеспечения околомарсианского и возвратного этапов экспедиции, и т. п. Каждая из предлагаемых идей имеет как свои привлекательные аспекты, так и сложности, неизбежные при практической реализации. В настоящей работе предлагается способ осуществления длительных пилотируемых космических экспедиций с использованием СОЖ, аналогичной работающей на станции «Мир» и создаваемой для станции «Альфа». Стартовая масса экспедиционного комплекса включает при этом запас

рабочих веществ СОЖ, необходимых для выполнения всей экспедиции (с учетом весьма незначительной регенерации), однако оказывается соизмеримой со случаем использования гипотетической биорегенеративной СОЖ. Существенное снижение стартовой массы комплекса достигается путем уменьшения топливных затрат при выполнении необходимых динамических маневров. Указанная экономия обеспечивается активным сбросом отходов СОЖ за счет энергии реактивной струи маршевых двигателей.

Идея активного отбрасывания имеющейся на борту космического аппарата инертной массы для увеличения тяги двигателей впервые была высказана Ф. А. Цандером в 1936 г. Он предложил использовать для этого освобождающиеся в полете элементы конструкции. В работе [48] рассмотрена задача об оптимальном управлении активным сбросом инертной массы и получены оценки возможного выигрыша на модельных примерах. В работе [27] впервые, насколько нам известно, был предложен активный сброс именно отходов СОЖ как естественно накапливающейся на борту космического аппарата инертной массы, и продемонстрирована соизмеримость эффективности активного сброса с применением СОЖ с высокой степенью регенерации. Обнадеживающие результаты [27], хотя и полученные при решении модельной задачи о перелете космического аппарата между точками покоя в бессиловом поле, стимулировали дальнейшие исследования авторов, представленные в настоящей работе. К числу немаловажных побуждающих факторов необходимо также отнести то, что инертная масса уже давно и эффективно используется, например, в твердотопливных ракетных двигателях, а ее использование для повышения эффективности жидкостных или ядерных ракетных двигателей не является в настоящее время принципиально сложной технической проблемой.

## I. КАК МЫ ПОЛЕТИМ НА МАРС?

### 1.1. Марсианская экспедиция как вариационная проблема

Среди современных проблем освоения космического пространства осуществление в недалеком будущем пилотируемых экспедиций к планетам Солнечной системы, является, очевидно, самой актуальной. К планируемым в ближайшее время экспедициям в первую очередь относится марсианская, необходимость осуществления которой в начале следующего тысячелетия декларируется в выдвинутой президентом США Бушем в 1989 г. программе космиче-

ских исследований SEI (Space Exploration Initiative).

С конца 60-х гг. нынешнего столетия, когда после успешного выполнения пилотируемой экспедиции на Луну по программе «Аполло» в качестве следующего этапа освоения межпланетного пространства была выбрана экспедиция на Марс, предложено большое число ее сценариев. Каждый из них, отличаясь своей траекторной схемой межпланетного перелета, типом двигательной установки, конструктивным решением космического аппарата, типом системы обеспечения жизнедеятельности, имеет свои преимущества и недостатки. При этом в качестве основных критериев выбора дизайна традиционно рассматриваются следующие:

- 1) минимальное влияние на экипаж пониженной либо нулевой гравитации;
- 2) минимальное влияние на экипаж космического облучения и солнечной радиации;
- 3) оптимальная величина начальной массы КА на околоземной орбите.

Легко понять, что требования всех этих критериев противоречивы. Действительно, снижение дозы облучения экипажа, как и уменьшение пребывания космонавтов в условиях пониженной гравитации, требует задействования высокоэнергетических «быстрых» траекторных схем перелета, что связано с увеличением начальной массы космического аппарата. Стремление уменьшить начальную массу связано не только с ухудшением качества экспедиции по первым из отмеченных показателей, но и в значительной степени ужесточает требования к качеству СОЖ. Эта неизбежная противоречивость накладываемых требований как раз и обуславливает необходимость исследования задачи выполнения марсианской экспедиции как вариационной проблемы.

В исследованиях по механике космического полета, относящихся к проблеме реализации длительных пилотируемых межпланетных экспедиций, и в работах, касающихся систем обеспечения жизнедеятельности, эту проблему рассматривают с разных сторон. В большинстве научных публикаций, изучающих динамическую часть проблемы, предполагается, что СОЖ включается в состав полезной нагрузки, и зависимость затрат на обеспечение жизнедеятельности от длительности экспедиции не принимается во внимание. Отсюда следует возможность в качестве функционала вариационной задачи выбирать суммарную характеристическую скорость динамических маневров, непосредственно связанную с расходом рабочего тела двигательной системы и, тем самым, со стартовой массой экспедиционного комплекса. С другой стороны, в подав-

ляющем большинстве исследований СОЖ, характеристики межпланетных перелетов учитываются лишь как необходимая начальная информация об условиях работы этих систем.

Это пробел постепенно заполняется в публикациях последних лет [109]. Однако такие параметры, как удельный массовый расход рабочих веществ СОЖ, эффективность регенерации и масса системы регенерации, в вариационных задачах считаются фиксированными и не являются объектами оптимизации. Несмотря на ограниченность такого одностороннего подхода, он представляет собой следующий шаг в математическом моделировании длительных пилотируемых межпланетных полетов, соответствующий уровню постепенно накапливающейся информации о возможностях СОЖ и расходах, необходимых для их реализации, а также постепенному сокращению времени на теоретическое осмысливание проблемы в связи с приближением первых реальных пилотируемых межпланетных экспедиций.

Следующий неминуемый с точки зрения логики развития механики космического полета шаг состоит в том, что проблема исследуется в рамках подхода, предложенного в работе [15], когда при формулировке задачи фиксируются только удельные массово-расходные характеристики СОЖ (удельный расход рабочих веществ, удельные массовые коэффициенты — в математической модели СОЖ), а ее конструктивные параметры (масса запаса рабочих веществ, эффективность регенерации, масса конструкции СОЖ и необходимых для ее функционирования веществ) определяются при решении единой оптимизационной проблемы с выбором траектории перелета к цели и назад, управления двигательной системой и необходимых расходов рабочего тела двигательной системы.

Впервые такая идеология применительно к длительным пилотируемым полетам была использована в работах [40, 41], затем полученные результаты были обобщены в работе [39], однако сфера их использования ограничена допущением, что эти расходы малы по сравнению с полной массой космического аппарата и, естественно, принятыми гипотезами их зависимости от длительности полета.

Существенной особенностью формулирования вариационных проблем механики космического полета, включающих оптимизацию конструктивных параметров СОЖ, является отказ от заранее фиксированной продолжительности перелета. Обычно длительность маневров, изучаемых механикой полета, либо считается заданной, либо минимизируется (задачи на быстродействие) [15, 24]. Если длительность некоторого динамического маневра,

переводящего центр масс космического аппарата с одной орбиты на другую, при формулировании вариационной задачи оставить свободной, то минимальное значение расхода топлива достигается при бесконечно большой длительности перехода. Это следует из анализа как аналитических решений задач о движении космического аппарата с малой тягой в модельных гравитационных полях [8, 9, 17, 86], так и численных решений задач о межорбитальных переходах и межпланетных полетах с возвращением как с идеально регулируемым, так и с нерегулируемым двигателем малой тяги [95]. Что касается маневрирования с двигателем большой тяги и нерегулируемым двигателем малой тяги, то и тут оптимальной является бесконечно большая длительность межорбитального перехода, выполняемого по схеме циклического скользящего режима [38].

В ряде публикаций, особенно связанных с минимизацией характеристической скорости межпланетных переходов с возвращением, полная длительность экспедиции хотя и не считается явно заданной, но заранее постулируется какая-нибудь особенность искомого решения, например схема перехода с заданным количеством импульсов, которая позволяет получить результаты, худшие по функционалу, но интересные с практической точки зрения, поскольку переход осуществляется за конечное время.

Естественный подход к изучению длительности динамического маневра состоит в выборе функционала задачи, зависящим не только от расходов топлива, но и от длительности выполнения маневра. Очень близкой к задачам механики пилотируемых космических полетов является постановка [29], где предложено максимизировать массу полезной нагрузки при данной стартовой массе аппарата, включающей, кроме полезной нагрузки, запас топлива и запас массы, необходимой для функционирования полезной нагрузки. Были проанализированы различные гипотезы о зависимости этих расходов массы от длительности перехода на примере задачи перехода между точками покоя в бессиловом поле, что в определенном приближении отображает быстрый межпланетный перелет. Некоторые данные из этой работы могут быть полезными для оценок в проблеме пилотируемых полетов только для СОЖ с полностью замкнутым циклом, потому что масса оборудования, обеспечивающего функционирование полезной нагрузки в [29] считается постоянной в течение всего времени выполнения маневра.

В работе [28] предложена постановка задачи более адекватная реальным СОЖ. Считается, что

расходы массы на обеспечение жизнедеятельности экипажа состоят из начального запаса рабочих веществ СОЖ, расходуемых с данной интенсивностью, постоянной, однако пропорциональной максимизируемой полезной нагрузке, а также из массы системы регенерации, зависящей от эффективности регенерации и от обобщенной работы системы регенерации. В работе [27] предложен прием активного сброса отходов как инертной массы путем ускорения их в двигателе за счет энергии реактивной струи. Идея увеличения тяги ракет за счет ускорения инертной массы рассматривалась раньше для одноступенчатых [48] и многоступенчатых ракет [38]. Отношение к отходам СОЖ, накапливающимся на борту корабля, как к инертной массе, которая аккумулируется естественным путем, с ее последующим сбросом через двигатель, позволило предложить новый путь, альтернативный подходу, требующему создания перспективных СОЖ с высокой степенью замкнутости (с высоким значением коэффициента регенерации в терминах [27, 29]). Численные результаты [27], полученные, как и в работе [29], для модельной задачи о перелете между точками покоя в бессиловом поле, позволяли надеяться на сопоставимость эффективности использования систем регенерации с высокой степенью замкнутости и активного сброса отходов.

Преимущества активного сброса очевидны с точки зрения возможной технической реализации, поскольку они не требуют разработки новых технологий. Мы имеем определенный опыт использования инертной массы в твердотопливных двигателях. Поскольку основную массу отходов СОЖ составляет техническая вода (до 20 л в сутки на человека), то проблема ускорения такой инертной массы в жидкостных ракетных двигателях, и особенно в ядерных тепловых ракетных двигателях, где она может быть использована как самостоятельное рабочее тело, не является сложной при современном уровне конструктивного совершенства тепловых ракетных двигателей. Проблема вдува в сопло работающего двигателя дополнительного инертного либо рабочего вещества с целью управления вектором тяги давно исследуется в газовой динамике [31, 32]. Трудности разработки перспективных СОЖ проиллюстрированы выше. Поэтому целиком оправданной является необходимость тщательного исследования возможности длительных пилотируемых межпланетных экспедиций с использованием двигательных систем с активным сбросом инертной массы, накапливаемой из отходов СОЖ, не подлежащих регенерации.

Среди основных направлений оптимизации межпланетных перелетов можно выделить следующие:

1. Использование ядерных ЖРД, либо электрических РД, либо комбинированных силовых установок.
2. Использование аэродинамических маневров в атмосферах планет (торможение, захват атмосферой).
3. Использование гравитационных полей планет для осуществления пертурбационных маневров (маневров КА с целью изменения параметров кеплеровских траекторий в поле притяжения Солнца).
4. Применение схем с использованием нескольких КА, выполняющих различные функции (пилотируемый и автоматический транспортный КА).
5. Использование внеземных ресурсов для изготовления компонентов рабочего тела ракетных двигателей с целью уменьшения стартовой массы КА.

Оптимизация параметров и траекторий межпланетного пилотируемого космического аппарата с использованием активного сброса отходов СОЖ может быть проведена в рамках каждого из этих подходов, однако в этой работе рассматриваются только варианты полета с использованием одного КА с химическим либо ядерным РД, считающимися наиболее вероятными кандидатами на роль двигательных установок первых марсианских экспедиций.

## 1.2. Двигательные системы и проблемы механики полета

В настоящее время накопилось огромное количество научных публикаций о проблемах длительных пилотируемых межпланетных перелетов. Результаты этих исследований, имеющих действительно междисциплинарный характер, отражены во многих известных монографиях. Среди книг по механике космического полета в первую очередь стоит обратить внимание на фундаментальные работы [15, 24], к которым прилагается обширная библиография.

Следующий по значимости раздел научных публикаций, непосредственно относящихся данной проблеме, — теория функционирования и практика конструирования систем обеспечения жизнедеятельности. Отметим книги [12, 14], где впервые обоснован тезис о невозможности выполнения длительных экспедиций, например полета на Марс, до разработки биорегенеративных СОЖ [12, 14, 55, 61, 66, 96, 101]. Огромное число публикаций посвящено анализу различных медико-биологических проблем длительных космических экспедиций [11, 44].

Общий анализ большинства публикаций по механике космического полета демонстрирует их слабую связь с исследованиями, представленными в двух других разделах. Вероятно, эта особенность является характерной для работ начального этапа исследований, еще довольно далеких от возможной практической реализации. Задача межпланетного перелета с возвращением в реальном гравитационном поле сама по себе является слишком сложной вариационной проблемой, чтобы усложнять ее учетом факторов и процессов, для осмыслиния которых еще не было необходимого опыта.

В результате такого упрощенного подхода появилась возможность получить практически исчерпывающие результаты и разработать методы, позволяющие эффективно и с нужной точностью решать задачу выбора траекторий межпланетного перехода с орбиты спутника Земли на орбиту спутника планеты с возвращением назад для двигателей любой тяги. Наиболее распространенными являются такие постановки: 1) задача на минимум характеристической скорости для перелетов с большой тягой; 2) на минимум интеграла по времени от квадрата реактивного ускорения для регулируемых и на минимум суммарной длительности активных дуг для нерегулируемых двигателей малой тяги [15]. Исследовались также задачи об оптимальном сочетании двигателей разных типов [22, 72, 73, 84].

В работах [37, 39, 57, 76, 88, 97, 100, 110] проанализирован состав оптимальных траекторий перелета, которые могут включать как регулярные дуги максимальной тяги и пассивного полета, так и сингулярные дуги — спирали Лоудена. Для двигателей большой тяги широко применяется импульсная аппроксимация, суть которой состоит в замене активных дуг конечной длительности импульсами тяги. Это приводит к конечному приросту массы и вектора скорости центра масс космического аппарата при непрерывном в момент действия импульса радиусе-векторе центра масс. Обширный обзор литературы, относящейся к импульсным переходным траекториям, приведен в работе [76]. Использование импульсной аппроксимации позволяет исходную вариационную задачу о минимуме суммарной характеристической скорости перелета свести к задаче конечномерной оптимизации моментов импульсов, величин и направлений прироста скорости.

Численные и аналитические оценки (например [57, 76, 88, 97]) показывают, что при скорости реактивной струи менее 10000 м/с и приросте характеристической скорости того же порядка величина гравитационных потерь, не учитываемых при импульсной аппроксимации, не превышает нескольких процентов, если начальное реактивное

ускорение космического аппарата соизмеримо с гравитационным.

Задача конечномерной оптимизации, к которой приводит импульсная аппроксимация, либо решается прямыми методами численного поиска экстремума («экстремальный подход» в терминах [24]), либо с использованием «вариационного подхода», при котором уравнения движения исследуются совместно с сопряженной системой, что очень удобно при использовании модели центрального гравитационного поля, в терминах которой уравнения сопряженной системы интегрируются в элементарных функциях [57, 80, 81].

Что касается математических моделей реальных гравитационных полей, ньютоновское центральное гравитационное поле является общепринятым формализованным представлением для межпланетных участков траектории, а влияние гравитационных полей планет старта и назначения приближенно учитывается с использованием концепции сфер влияния [65, 67, 80, 110] (метод сфер влияния и модифицированный метод сфер влияния [24]).

Импульсная аппроксимация с достаточной для практических оценок точностью отображает зависимость требуемой характеристической скорости от краевых условий маневра для регулярных оптимальных траекторий. Сингулярные же дуги при движении вне планетных атмосфер имеют второй порядок вырождения [13] в терминах [20], и могут входить в состав оптимальной траектории только при некоторых специально подобранных краевых условиях [89]. Эффективность такого включения, как показывают оценки [89], настолько мала, что не может оправдать существенных усложнений в управлении величиной и направлением вектора тяги, возникающих при практической реализации этих дуг.

Если использование импульсной аппроксимации для анализа схем экспедиций к планетам с возвращением является общепринятым, то ответа на вопрос о наилучшей схеме для конкретной экспедиции не существует. Это связано с многокритериальностью проблемы выбора схемы, так как ее выбор влияет не только суммарная характеристическая скорость, но и общая продолжительность экспедиции, доза радиоактивного облучения экипажа, условия осуществления связи с аппаратом и т. п. [109]. Для исследований последних десятилетий характерно повышенное внимание к другим, помимо характеристической скорости, критериям схемы.

По количеству импульсов тяги классическим считается четырехимпульсный перелет с орбиты спутника Земли на орбиту спутника Марса и назад. Вместе с тем было показано, что снижение требуе-

мой характеристической скорости возможно при использовании торможения в атмосфере планет, предложенного еще Ф. А. Цандером [50]. Последнее было тщательно исследовано в вариационных постановках в работе [23] и — в применении к марсианской экспедиции — в работах [4, 5, 34], в статьях и многочисленных работах зарубежных авторов [62].

Отметим, что существует еще одна возможность снижения затрат характеристической скорости на выполнение марсианской экспедиции — путем использования пертурбационного маневра при промежуточном близком пролете возле Венеры [83, 104, 105, 107].

При определенных условиях (сравнительно большая угловая дальность межпланетных участков) оптимальными являются перелеты с большим количеством импульсов [63, 71, 87]. Проблемы оптимизации таких многоимпульсных траекторий изучаются в работах [6, 78–79, 87]. Предложены также более сложные схемы экспедиций с использованием нескольких аппаратов, летящих по разным траекториям [99, 108], а также с использованием внеземных ресурсов [113].

### 1.3. Проблемы обеспечения жизнедеятельности

Основные проблемы обеспечения жизнедеятельности экипажа в экстремальных условиях длительных пилотируемых полетов очень подробно рассмотрены в работах основоположников современной космонавтики. Обобщение современного состояния научных исследований и конструкторских разработок этой проблемы дано в монографиях и обзорных работах [12, 14, 68, 102, 106, 111]. Необходимо отметить, однако, что в настоящее время надежную экспериментальную проверку прошли лишь принципы работы СОЖ практически открытого типа с очень незначительной относительно массы расходуемыми веществами степенью регенерации, и пригодных поэтому только для кратковременных полетов, либо с постоянным пополнением необходимых запасов с Земли.

Непригодность СОЖ такого типа для длительных межпланетных экспедиций считается несомненной. Целесообразным считается СОЖ с высокой степенью замкнутости. Для физико-химических систем такого типа считается принципиальным требование снижение уровня расхода рабочих веществ на человека, с современного значения 32 кг/сут до 3.4 кг/сут [53].

Однако большинство исследователей отдают преимущество использованию биологических принци-

пов регенерации рабочих веществ СОЖ из отходов [12, 53, 55, 61, 66, 68, 91, 96, 101, 102] с замкнутым экологическим циклом, при идеальном осуществлении которого СОЖ и человек обмениваются с окружающим космическим пространством только энергией [61], используя энергию Солнца и рассеивая излишнюю тепловую энергию диссипации при функционировании СОЖ.

Оценки энергомассовых характеристик систем регенерации [12, 14, 53, 55, 60, 61, 66, 68, 91, 96, 101, 103, 111] различны, однако усредненные значения основных параметров в последних публикациях близки. Так, на суточные потребности одного космонавта при калорийности рациона питания 2800 ккал/сут необходимо иметь 3–6 м<sup>2</sup> водной поверхности, кислородные системы площадью 6–10 м<sup>2</sup>, 15–20 м<sup>2</sup> поверхности для культивирования биомассы [91]. Удельная посевная площадь оранжерей составляет 25 м<sup>2</sup> [103], а для биорегенеративных СОЖ полузамкнутого типа — 20 м<sup>2</sup>.

Становятся понятными чисто конструктивные затруднения, которые необходимо преодолеть при создании перспективных СОЖ. К сожалению, эти трудности являются простейшими, поскольку не касаются принципиальных вопросов. Один только перечень таких принципиальных проблем [53, 56, 59, 85, 98, 102] целиком оправдывает пессимистические оценки, суть которых в том, что создание перспективных СОЖ вероятно лишь через 20–30 лет [85] (оценка 1987 г.).

Наиболее серьезные затруднения связаны с тем, что биотехнологические грядки систем регенерации должны функционировать в неблагоприятных для биологических объектов условиях микрогравитации, искусственной газовой среды с параметрами, существенно отличающимися от земной атмосферы, к тому же с учетом возможности бактериального заражения. Кроме того, очень важными являются проблемы совместимости биорегенеративных СОЖ с элементами существующих систем регенерации физико-химического типа, а также совместимость биотехнологических подсистем СОЖ с экипажем [56].

С научной и технической точки зрения глобальная проблема разработки перспективных СОЖ имеет сложный междисциплинарный характер. Несомненные проблемы возникают на всех трех уровнях создания СОЖ [59]: системном (замкнутая СОЖ либо СОЖ, работающая с использованием запасов рабочих веществ, которые полностью доставляются с Земли перед стартом либо частично пополняются на планете назначения), подсистем-

ном (физико-химические либо биологические методы регенерации), и компонентном (дистиляционные или обратноосмотические технологии очищения воды и т. д.). Создание перспективных СОЖ требует длительного времени и существенных финансовых затрат, чем и стимулирует поиск альтернативных возможностей [98].

#### 1.4. Межпланетная экспедиция.

Системно-синергетический подход

Краткий анализ проблем пилотируемых межпланетных экспедиций, приведенный в предыдущих разделах, демонстрирует существенное взаимное влияние решений, принимаемых при конструировании различных систем экспедиционного комплекса. Поэтому, как уже отмечалось выше, поиск наилучших состава, траекторий, управлений и параметров комплекса должен проводиться в процессе решения единой вариационной проблемы.

Включение параметров СОЖ в состав неизвестных рассматриваемой проблемы и предположение о возможности активного сброса отходов позволяет ввести в рассмотрение нетрадиционный для механики космического полета поток массы между СОЖ и двигательной системой комплекса. Тем самым эти элементы экспедиционного комплекса, которые традиционно с системных позиций рассматриваются как антагонисты, перестают быть таковыми. Более того, взаимосогласованное управление этими элементами позволяет существенно ослабить требования к системе регенерации рабочих веществ СОЖ из отходов. Возникает неожиданный синергизм традиционно антагонистических элементов системы.

Отмеченная особенность предлагаемого нами подхода отличается от рассмотренных ранее случаев синергизма элементов космических аппаратов тем, что все упомянутые случаи относились к элементам, которые не являлись антагонистами с общесистемных позиций. К работам этой группы можно отнести публикации [22, 84, 72, 73], относящиеся к космическим аппаратам с комбинированными двигателями большой и малой тяги, особенно работы, в которых один тот же конструктивный элемент — ядерный реактор — используется и для разогрева рабочего тела двигателя большой тяги, и для подогрева рабочего тела бортовой электростанции, вырабатывающей энергию для электрического ракетного двигателя, когда маршевый двигатель работает в режиме малой тяги.

## II. КАК МЫ ПОЛЕТИМ НА МАРС

### 2.1. Вариационная проблема о минимальной стартовой массе космического аппарата

Основной проблемой этой работы является задача выполнения длительных пилотируемых космических полетов. По сложившейся традиции она формулируется и исследуется как вариационная проблема. Динамика движения космического аппарата описывается в терминах механики материальной точки переменной массы, то есть исследуется только лишь движение центра масс космического аппарата относительно некоторой инерциальной системы координат, а вращательным движением аппарата вокруг центра масс пренебрегается.

Такой упрощенный подход, оправдавший себя на начальных этапах теоретических исследований, неоднократно оказывался неэффективным в случаях, когда вращательное движение вокруг центра масс существенно влияло на движение самого центра масс аппарата [24], либо в случаях, когда расходы на управление обеими составляющими движения оказывались сопоставимыми [15]. В настоящее время условия, определяющие возможность использования модельного представления движения центра масс космического аппарата как материальной точки, четко указаны [24], так что принятая в работе упрощенная модель динамики аппарата при выполнении длительной пилотируемой межпланетной экспедиции полностью оправдана.

Сравнительно новой является проблема математического моделирования процессов функционирования системы обеспечения жизнедеятельности космического аппарата. В некоторых работах анализируются существующие и перспективные физико-химические системы регенерации СОЖ либо их отдельные подсистемы с различной степенью детальности формализованного описания массо- и энергопереноса и происходящих химических реакций. Значительно меньше надежной информации о системах регенерации с использованием биотехнических модулей, что связано с их неразработанностью.

Поскольку одной из главных целей работы является сопоставление эффективности СОЖ с высокой степенью замкнутости, надежная информация о которых практически отсутствует, с эффективностью СОЖ с не слишком высокой степенью регенерации, использующей активный сброс отходов космического аппарата, было принято решение об использовании единой обобщенной математической модели СОЖ, удовлетворяющей закону сохранения массы и некоторым гипотетическим допущениям, которые не противоречат здравому смыслу, подобно тому, как это сделано в работе [27].

Для рассматриваемой вариационной проблемы оптимальным принято считать то решение, которое отвечает схеме перелета с минимальной стартовой массой при фиксированной полезной нагрузке. Такой выбор критерия является наиболее адекватным проблеме осуществления первых экспедиций на планеты.

Возможной альтернативой сложившимся в механике космического полета подходам следует признать критерий стоимости [109]. Однако для первой экспедиции, открывающей третий этап космической истории человечества, соображения стоимости будут играть важную роль лишь при принятии принципиального решения о возможности либо невозможности ее реализации, а затем отойдут на второй план. Кроме того, минимизация начальной массы экспедиционного аппарата напрямую связана со снижением полной стоимости экспедиции, в связи с высокой ценой доставки полезной нагрузки на стартовую околоземную орбиту.

### 2.2. Математическая модель космического аппарата как системы переменного состава

#### 2.2.1. Состав космического аппарата.

Начальная масса космического аппарата, осуществляющего долговременную пилотируемую экспедицию, состоит, по предположению, из массы полезной нагрузки  $M_{\pi}$ , массовых затрат на выполнение заданного динамического маневра  $M_{\mu}$ , массовых затрат на функционирование СОЖ КА  $M_c$ , а также массы конструкции  $M_c$  и двигательной установки  $M_e$ :

$$M(T_0) = M_{\pi} + M_{\mu} + M_c + M_e \quad (2.1)$$

Величина  $M_\mu$  складывается из массы начальных запасов компонентов топлива и топливных баков для их транспортировки:

$$M_\mu = \sum_{j=1}^k (1 + \beta_j) M_j(T_0), \quad (2.2)$$

где  $M_j(T_0)$  обозначает начальный запас  $j$ -го компонента топливной смеси,  $k$  — количество компонентов. Как видно из формулы (2.2), масса топливных баков считается прямо пропорциональной начальному запасу соответствующих компонентов топлива с фиксированными при постановке задачи коэффициентами пропорциональности  $\beta_j$ .

Массовые затраты на функционирование СОЖ складываются из величин масс системы регенерации (СР) СОЖ  $M_r$  и начального запаса рабочих веществ СОЖ (вода, продукты питания и т.п.)  $M_q(T_0)$ :

$$M_s = M_r + M_q(T_0).$$

При этом масса системы регенерации СОЖ вычисляется согласно [27] по формуле:

$$M_r = \rho \eta^2 Q (1 + \mu T_r), \quad (2.3)$$

где  $Q$  — массовый расход рабочих веществ СОЖ в единицу времени,  $\eta \in [0,1]$  — коэффициент регенерации,  $\rho, \chi, \mu$  — положительные параметры,  $T_r$  — обобщенная работа СР, вычисляемая по формуле

$$T_r = \int_{T_0}^{T_f} \varphi dt, \quad (2.4)$$

где  $T_f$  — время окончания заданного маневра,  $\varphi$  — управляющая функция СР со значениями из отрезка  $[0,1]$ .

Предполагается, что нерегенерируемая часть отходов СОЖ может ускоряться за счет энергии реактивной струи с целью увеличения тяги двигателя КА. Обозначив текущий запас отходов инертной массы через  $M_i$ , дифференциальные уравнения баланса величин запасов инертной массы и рабочих веществ СР можем записать в виде

$$\dot{M}_q = -Q(1 - \eta\varphi), \quad \dot{M}_i = \omega Q(1 - \eta\varphi) - Q_i, \quad (2.5)$$

где  $Q_i$  — секундный массовый расход инертной массы,  $\omega$  — управляющая функция, отвечающая за накопления отходов СОЖ в качестве инертной массы:  $\omega \in [0, \omega_0]$ ,  $\omega_0 = \text{const} \leq 1$ . Соотношения (2.5) обобщают аналогичные уравнения модели [27] введением новой функции управления  $\omega$ .

Функциональные зависимости массы двигательной установки от максимальных значений расходов компонентов топлива  $Q_0$  и инертной массы  $Q_i$ , а также массы конструкции КА от масс составляющих его частей  $M_e = M_e(Q_0^{\max}, Q_i^{\max})$ ,  $M_c = M_c(M_\pi, M_\mu, M_s, M_e)$  считаются известными при формулировке задачи. В эти зависимости, кроме перечисленных аргументов, входит определенное количество удельных конструктивных параметров, значения которых считаются заданными.

С учетом сказанного текущая масса КА записывается в виде

$$M(T) = M_\pi + M_r + M_q(T) + M_i(T) + M_e + M_c + \sum_{k=1}^n [\beta_k M_k(T_0) + M_k(T)] \quad (2.6)$$

Отметим, что соотношения (2.3)–(2.5) отображают весьма упрощенную модель СОЖ. На самом деле расход  $Q$  представляет собой сумму расходов рабочих веществ СОЖ, существенно различающихся между собой по возможности их регенерации для повторного использования. При более детальном анализе следует, видимо, выделить три группы рабочих веществ — газообразные, жидкые и твердые отходы. Формулы (2.3) для вычисления массы соответствующих подсистем регенерации требуют подстановки собственных конструктивных параметров,

которые существенно отличаются. Кроме того, в уравнениях типа (2.5) следует учесть временные запаздывания процессов регенерации — от минут и часов для газообразных и жидкокомпрессионных веществ до месяцев для других отходов. Для начального анализа мы посчитали достаточным ограничиться моделью (2.3)–(2.5), которая обобщенно учитывает основные потоки массы в СОЖ, связь между работой СОЖ и возможностью накопления инертной массы и возможную величину массы самой СОЖ.

### 2.2.2. Уравнения движения центра масс КА.

Исследование динамики полета КА, выполняющего длительную пилотируемую экспедицию с достаточной для практических целей точностью можно провести с использованием уравнений движения центра масс аппарата в терминах динамики материальной точки переменной массы. Система дифференциальных уравнений, управляющая движением КА и изменением его массовых компонентов с учетом уравнений (2.4), (2.5) записывается в виде

$$\begin{cases} \dot{\vec{R}} = \vec{V}, \\ \dot{\vec{V}} = \frac{P(Q_0, Q_i)}{M} \vec{e} + \vec{F}(\vec{R}), \\ \dot{M}_\mu = -Q_0, \\ \dot{M}_g = -Q(1 - \eta\varphi), \\ \dot{M}_i = -Q_i + \omega Q(1 - \eta\varphi), \\ \dot{t}_r = \varphi. \end{cases} \quad (2.7)$$

Здесь  $\vec{R}$  и  $\vec{V}$  — соответственно радиус-вектор центра масс и скорость КА,  $Q_0$  — массовый расход топливной смеси (без учета инертной массы),  $P(Q_0, Q_i)$  — тяга реактивного двигателя, считающаяся известной функцией соответствующих расходов,  $\vec{e}$  — орт направления тяги,  $\vec{F}$  — главный вектор ускорения от гравитационных сил,  $t_r$  — текущее время работы СР:  $t_r(T_f) = T_r$ .

В правой части второго уравнения (2.7) представлено ускорение от реактивных и гравитационных сил. Тем самым предполагается, что траектории КА не будут пересекать атмосферы планеты назначения и Земли, двигаясь в которых необходимо учитывать аэродинамические силы. Несмотря на то, что исследованию использования планетных атмосфер для торможения космических аппаратов при приближении к планетам, посвящено немало публикаций, полностью ракетная схема (all-rocket scheme) считается одной из наиболее вероятных для первых экспедиций, что связано с ее высокой надежностью, особенно в условиях недостаточной информации о характеристиках верхних атмосфер даже для планет Земной группы.

### 2.2.3. Формулировка общей вариационной проблемы.

Далее будем предполагать, что рассматриваемый динамический маневр КА представляется собой переход между некоторым образом заданными начальным и конечным положениями в пространстве  $(\vec{R}, \vec{V})$ :

$$(\vec{R}(T_0), \vec{V}(T_0)) \in S_0(\vec{R}, \vec{V}), (\vec{R}(T_f), \vec{V}(T_f)) \in S_1(\vec{R}, \vec{V}), \quad (2.8)$$

где  $S_0$  и  $S_1$  — соответствующие гладкие многообразия в пространстве  $(\vec{R}, \vec{V})$ . Время выполнения маневра не фиксируется при постановке.

Выберем в качестве управляющих функций рассматриваемой оптимизационной задачи секундные массовые расходы компонентов топлива  $Q_0(t)$ , инертной массы  $Q_i(t)$ , направление тяги двигателя  $\vec{e}(t)$ , а также управляющие функции СР СОЖ КА  $\varphi(t), \omega(t)$ .

Задача об оптимизации выполнения заданного маневра включает определение значений массы начальных запасов компонентов топлива  $M_i(T_0)$ , максимальных расходов компонентов топлива и инертной массы и,

следовательно, массы двигательной системы  $M_e$ , массы конструкции  $M_c$ , коэффициента регенерации  $\eta$  и массы системы регенерации  $M_r$ , а также управляющих функций и траекторий полета, обеспечивающих выполнение граничных условий маневра (2.8) с минимальным значением функционала

$$J = M(T_0) \quad (2.9)$$

при заданных значениях полезной массы, расхода массы рабочих веществ СОЖ, удельных конструктивных параметров двигательной системы, подсистемы регенерации и конструкции КА.

В дальнейшем предполагается, что множество допустимых управлений  $U$  замкнуто и граничные условия маневра заданы в форме, отвечающей задаче Майера.

### 2.3. Анализ оптимального управления движением пилотируемого КА

В дальнейшем нам будет удобнее пользоваться безразмерными величинами, входящими в систему (2.7). Отнесем величины всех массовых компонентов КА к величине полезной нагрузки, все расходы — к расходу  $Q_0^*$  топливной смеси, при котором тяга ракетного двигателя в режиме без ускоренного сброса инертной массы максимальна:  $Q_0^* = \arg \max P(Q_0, 0)$ . Соответствующие формулы записываются в виде

$$M_j = M_\pi m_j, j \in \{q, r, \pi, \mu, e, c\}, Q_j = Q_0^* q_j, j \in \{0, i\} \quad (2.10)$$

Для того чтобы система (2.7) и формула (2.3) при переходе к новым переменным сохранила свой вид, необходимо провести обезразмеривание остальных переменных задачи по следующим формулам:

$$P = P_{\max} p, \bar{R} = \frac{P_{\max} M_\pi}{Q_0^{*2}} \vec{r}, \bar{V} = \frac{P_{\max}}{Q_0^*} \vec{v}, \bar{F} = \frac{P_{\max}}{M_\pi} \vec{f}, T = \frac{M_\pi}{Q_0^*} t, \rho = \frac{M_\pi}{Q_0^*} \bar{\rho}, \mu = \frac{Q_0^*}{M_\pi} \bar{\mu}. \quad (2.11)$$

Здесь  $\bar{\rho}$ ,  $\bar{\mu}$  — безразмерные аналоги размерных параметров СР СОЖ. Поскольку в дальнейшем изложении будут рассматриваться только безразмерные величины, надчеркивание будет опускаться.

Анализ управляющих функций сформулированной выше задачи оптимального управления проводится с использованием принципа максимума Понтрягина [46]. Следуя процедуре принципа, запишем функцию  $H$  задачи в виде

$$H = \bar{\psi}_r \bar{v} + \bar{\psi}_\nu \left[ \frac{p(q_0, q_i)}{m} \bar{e} + \bar{f} \right] - \psi_\mu q_0 - \psi_q q(1 - \eta\varphi) - \psi_i [q_i - \omega q(1 - \eta\varphi)] + \psi_\varphi \varphi. \quad (2.12)$$

Дифференциальная система для сопряженных функций

$$\begin{cases} \dot{\bar{\psi}}_r = -\frac{\partial \bar{f}^T}{\partial \bar{r}} \bar{\psi}_\nu, \\ \dot{\bar{\psi}}_\nu = -\bar{\psi}_r, \\ \dot{\psi}_\mu = \dot{\psi}_q = \dot{\psi}_i = \bar{\psi}_\nu \frac{p}{m^2} \bar{e}, \\ \dot{\psi}_i = 0. \end{cases} \quad (2.13)$$

имеет первые интегралы

$$\psi_i \equiv C_1, \psi_\mu - \psi_q \equiv C_2, \psi_\mu - \psi_i \equiv C_3 \quad (2.14)$$

где  $C_i, C_q, C_e$  — константы интегрирования. Поскольку выбор оптимального направления реактивной тяги, как следует из вида гамильтониана (2.12), не зависит от выбора остальных управляющих функций, оптимальное управление  $\vec{e}(t)$  выбирается из условия максимума скалярного произведения  $\vec{\psi}, \vec{e}$ , имеем

$$\vec{e} = \frac{\vec{\psi}_v}{|\vec{\psi}_v|} \quad (2.15)$$

### 2.3.1. Управление работой системы регенерации.

Анализ управляющих функций СР КА  $\omega(t), \varphi(t)$ , отвечающих соответственно за накопление и регенерируемых рабочих веществ СР в качестве инертной массы и за интенсивность работы СР, далее проводится без конкретизации вида функциональной зависимости тяги ракетного двигателя  $p(q_0, q_i)$  и компонентного состава топливной смеси.

Это обусловлено не только независимостью выбора оптимальных управляющих функций СР от выбора управляющих функций двигательной системы  $q_0(t), q_i(t)$ , но и представляющей интерес возможностью получить представление об оптимальном управлении СР СОЖ КА для самого широкого класса используемых двигательных систем.

Утверждение 2.1. Значения оптимальных управляющих функций системы регенерации СОЖ КА  $\omega(t), \varphi(t)$  вдоль регулярных дуг траектории в оптимизационной задаче (2.7) — (2.9) принадлежат границе области допустимых управлений.

Действительно, поскольку из формулы (2.12) следует, что

$$\frac{\partial H}{\partial \omega} = \psi_i q (1 - \eta \varphi), \quad \frac{\partial H}{\partial \varphi} = q \eta (\psi_q - \psi_i \omega) + C_i, \quad (2.16)$$

то вдоль регулярных дуг оптимальной траектории имеем

$$\omega(t) = \begin{cases} 0, & \psi_i q (1 - \eta \varphi) < 0, \\ 1, & \psi_i q (1 - \eta \varphi) > 0. \end{cases} \quad (2.17)$$

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0, & q \eta (\psi_q - \psi_i \omega) + C_i < 0, \\ 1, & q \eta (\psi_q - \psi_i \omega) + C_i > 0. \end{cases} \quad (2.18)$$

Доказываемое утверждение получается как следствие следующего соображения: поскольку можно полагать, что при любом выборе управления  $\varphi(t)$  выполняется  $q(1 - \eta \varphi) > 0$  (в практически неинтересном случае  $\eta = 1, \varphi = 1$ , соответствующем работе «безотходной» системы регенерации, можно положить  $\omega = 0$ ), то выбор управления  $\omega(t)$  не зависит от выбора  $\varphi(t)$ . Следовательно, вдоль регулярных дуг

$$\omega(t) = \begin{cases} 0, & \psi_i < 0, \\ 1, & \psi_i > 0. \end{cases} \quad (2.19)$$

Из (2.18) с учетом (2.19) для оптимального управления  $\varphi(t)$  имеем

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0, & q \eta \psi_q + C_i < 0, \psi_i < 0 \cup q \eta (\psi_q - \psi_i) + C_i > 0, \psi_i > 0, \\ 1, & q \eta \psi_q + C_i > 0, \psi_i < 0 \cup q \eta (\psi_q - \psi_i) + C_i > 0, \psi_i > 0. \end{cases} \quad (2.20)$$

Вид формул (2.19), (2.20) доказывает утверждение 2.1.

Необходимо отметить, что при анализе возможных участков особых управлений  $\omega(t), \varphi(t)$  возникают затруднения принципиального характера. Действительно, как нетрудно видеть из (2.16), необходимое условие сингулярности  $\omega(t)$  на некотором интервале  $\tau \in [t_0, t_f]$  можно записать в виде

$$\psi_i(\tau) = 0. \quad (2.21)$$

Вспоминая дифференциальную систему для сопряженных функций (2.13), имеем

$$\frac{d}{dt} \psi_i(\tau) = |\bar{\psi}_v| \frac{p(q_0, q_i)}{m^2} = 0. \quad (2.22)$$

Из (2.22) следует, что либо  $\bar{\psi}_v$ , либо  $p(q_0, q_i)$  вдоль сингулярной дуги обращаются в 0. Покажем, что первая возможность на оптимальной траектории не имеет места. Действительно, в противном случае должно выполняться  $\frac{d}{dt} \bar{\psi}_v(\tau) = -\bar{\psi}_r \equiv 0$ . В свою очередь,  $\frac{d}{dt} \bar{\psi}_r(\tau) = -\frac{\partial \bar{f}^T}{\partial \bar{r}} \bar{\psi}_v \equiv 0$ , откуда необходимо выполнение  $\bar{\psi}_r(t) \equiv 0$ ,  $\bar{\psi}_v(t) \equiv 0, \forall t \in [t_0, t_f]$ , что противоречит принципу максимума.

Таким образом, особым управление  $\omega(t)$  может быть только на пассивных участках оптимальной траектории ( $p(q_0, q_i) = 0$ ). В силу того что для любого  $n \geq 1$  выполняется  $\frac{d^n}{dt^n} \psi_i(\tau) \equiv 0$ , рассматриваемая сингулярная дуга относится к вырожденным особым управлению [13], для которых в настоящее время не существует эффективных методов исследования.

Вывод о вырожденности особых управлений оказывается справедливым и для управлений  $\varphi(t)$ .

Интересно отметить, что условие (2.21) является необходимым также и для существования особого управления расходом инертной массы  $q_i(t)$ . Однако из физических соображений понятно, что единственным оптимальным режимом на пассивных участках является режим  $q_i(t) = 0$ . Действительно, неускоренный (а значит, не увеличивающий тягу ракетного двигателя) сброс инертной массы может быть только результатом ее неоптимального накопления, т.е. неоптимального выбора  $\omega(t)$ .

Необходимо отметить, что даже если бы особые управлении  $\varphi(t)$  и/или  $\omega(t)$ , принимающие значения из внутреннего ядра области  $[0,1] \times [0,1]$ , оказались оптимальными на некоторой пассивной дуге траектории, соответствующие им приrostы фазовых координат  $M_q$  и  $M_i$  (см. (2.7)) можно было бы реализовать, используя граничные значения функций  $\varphi$  и  $\omega$  с помощью выбора необходимой длительности «активных» ( $\varphi = 1, \omega = 1$ ) и «пассивных» ( $\varphi = 0, \omega = 0$ ) участков работы системы регенерации.

Таким образом, единственный результат, который может быть установлен при анализе оптимальных управляющих функций СР для сформулированной в самом общем виде оптимизационной проблемы — доказанное выше утверждение о принадлежности значений оптимальных управлений  $\omega(t), \varphi(t)$  вдоль регулярных дуг оптимальной траектории границе прямоугольника  $[0,1] \times [0,1]$ . Для получения конкретных результатов необходимо соответствующее уточнение граничных условий исходной оптимизационной задачи. Последнее утверждение может быть проиллюстрировано следующим примером. Предположим, что начальные запасы компонентов топлива и рабочих веществ СР СОЖ  $m_\mu(0), m_q(0)$  свободны для выбора при постановке задачи, начальный запас инертной массы  $m_i(0)$  равен нулю, равны нулю также конечные запасы этих массовых компонентов, при этом времена выполнения маневра и работы системы регенерации не фиксированы. В этом случае из условий трансверсальности в форме Летова [35] может быть получено следующее соотношение:

$$(1 + \beta_\mu) \delta m_\mu(t_0) + \rho q \eta^2 \mu \delta t_i(t_f) + \delta m_q(t_0) - \psi_\mu(t_0) \delta m_\mu(t_0) - \psi_q(t_0) \delta m_q(t_0) + C_i \delta t_r(t_f) = 0,$$

откуда, в силу независимости вариаций  $\delta m_\mu(t_0), \delta m_q(t_0), \delta t_r(t_f)$ , следует

$$\psi_u(t_0) = 1 + \beta_u, \psi_w(t_0) = 1, C_t = -\rho q \eta^x \mu. \quad (2.23)$$

Из (2.16) следует, что переключающая функция для управления  $\varphi(t)$  при  $\psi_i \leq 0$  принимает вид:

$$H_\varphi = q \eta \psi_q - \rho q \eta^x \mu \quad (2.24)$$

В силу монотонного возрастания сопряженной функции  $\psi_q(t) \geq \psi_q(t_0) = 1$ , откуда следует, что  $H_\varphi > q \eta - \rho q \eta^x \mu$ . Выражение, стоящее в правой части неравенства представляет собой разность между массой регенерируемых в единицу времени рабочих веществ СР и массовыми затратами на ее функционирование. Естественно предположить, что включение СР в состав КА целесообразно лишь в случае, когда эта разность положительна. Следовательно, при рассмотренных граничных условиях оптимизационной задачи на участках  $\psi_i \leq 0$  оптимальные значения управления  $\varphi(t)$  задаются соотношением:  $\varphi(t) = 1$ .

### 2.3.2. Управление расходами компонентов рабочего тела маршевых двигателей.

Жидкостный ракетный двигатель. Для проведения дальнейшего анализа оптимального управления в сформулированной выше вариационной задаче (2.7)-(2.9) будет предполагаться, что пилотируемый космический аппарат, предназначенный для выполнения заданного маневра, оснащен химическим жидкостным ракетным двигателем (ЖРД), использующим в качестве рабочего тела двухкомпонентное топливо (горючее + окислитель).

Обозначим через  $u$  и  $w$  нормированные в соответствии с (2.11) единичные массовые расходы горючего и окислителя. Уточнение компонентного состава топливной смеси ракетного двигателя приводит, как легко видеть, к следующему видоизменению исходной постановки оптимизационной задачи:

- 1) Величина массовых затрат на выполнение заданного динамического маневра  $m_\mu$ , в отличие от формулы (2.2), задается теперь формулой

$$m_\mu = (1 + \beta_u) m_u^0 + (1 + \beta_w) m_w^0, \quad (2.25)$$

где  $m_u^0, m_w^0$  — начальные запасы  $u$ - и  $w$ -компонентов топливной смеси. Соответственно изменяется вид формулы, дающей величину текущей массы аппарата:

$$m(t) = m_\pi + m_r + m_q(t) + m_i(t) + m_e + m_e + \beta_u m_u^0 + m_u(t) + \beta_w m_w^0 + m_w(t). \quad (2.26)$$

- 2) Третье уравнение системы дифференциальных уравнений (2.7), описывающее изменение текущего запаса топливной смеси  $m_q(t)$ , распадается на два уравнения следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{m}_u = -u, \\ \dot{m}_w = -w. \end{cases} \quad (2.27)$$

- 3) Сопряженные функции  $\psi_u, \psi_w$  подчиняются дифференциальному уравнению

$$\dot{\psi}_u = \dot{\psi}_w = \psi_v \frac{p(u, w, q_i)}{m^2}, \quad (2.28)$$

аналогичному уравнению для сопряженной функции  $\psi_q$  в системе (2.13).

Аналогично [48] при использовании активного сброса инертной массы скорость истечения реактивной струи  $V_i = V_i(u, w, q_i)$  и тяга ракетного двигателя аппарата  $p_i = p_i(u, w, q_i)$  задаются следующими формулами:

$$V_i = V_0(u, w) \sqrt{\frac{u+w}{u+w+q_i}}, \quad p_i = p_0(u, w) \sqrt{1 + \frac{q_i}{u+w}}, \quad (2.29)$$

где  $V_0(u, w)$ ,  $p_0(u, w)$  — скорость истечения и тяга ЖРД без активного сброса инертной массы. Функциональная зависимость величины тяги  $p_0(u, w)$  от массовых расходов компонентов топлива считается заданной при постановке задачи, при этом предполагается выполненным условие

$$p_0(0, w) = p_0(u, 0) = p_0(0, 0) = 0. \quad (2.30)$$

Соотношения, связывающие тягу  $p_i$ , скорость истечения  $V_i$ , массовые расходы  $u$ -,  $w$ -компонентов рабочего тела и инертной массы  $q_i$ , можно получить, пользуясь обобщением одномерной теории сопла Лаваля на случай гетерогенных потоков [7] с учетом таких допущений:

- частицы инертной массы находятся в состоянии теплового равновесия с потоком газообразных продуктов сгорания топлива;
- скорость частиц равна скорости движения газа. Удалось показать [28], что скорость истечения смеси  $V_i$  связана со скоростью истечения струи  $V_0$ , которая содержит только газообразные продукты сгорания,

$$V_i = \sigma V_0,$$

где  $\sigma$  — коэффициент потерь скорости, являющийся убывающей функцией отношения  $\varepsilon$  расхода инертной массы к суммарному расходу компонентов основного рабочего тела:  $\varepsilon = \frac{q_i}{u+w}$ .

Потери скорости истечения увеличиваются в случае, когда тепловое равновесие между частицами инертной массы и потоком рабочего тела отсутствует. В наиболее неблагоприятном случае, когда частицы сохраняют начальную температуру [13]  $\sigma = \sqrt{1 - \varepsilon}$ . Именно этому случаю соответствуют формулы (2.29).

Проведем анализ оптимального управления расходами компонентов топливной смеси и инертной массы через двигатель аппарата. Будем предполагать, что функции  $u(t)$ ,  $w(t)$  и  $q_i(t)$  принимают свои значения из некоторого замкнутого множества  $\Omega$ , для которого выполняются следующие условия:

- плоскости  $u = 0$ ,  $w = 0$  и  $q_i = 0$  являются границами  $\Omega$ ;
- произвольный луч, выходящий из точки  $(0, 0, 0)$  в пространстве  $(u, w, q_i)$ , либо пересекает граничную поверхность множества  $\Omega$  в единственной точке (не считая самой точки  $(0, 0, 0)$ ), либо полностью принадлежит ей.

На рис. 1 показан примерный вид множества  $\Omega$ , соответствующий естественному предположению об ограничении максимальной величины давления в камере сгорания ракетного двигателя [26]. Нетрудно видеть, что гипотезы 1, 2 для него справедливы, так же как и для множества допустимых управлений в виде параллелепипеда

$$\Omega = [0, u_0] \times [0, w_0] \times [0, q_i^0] \quad (2.31)$$

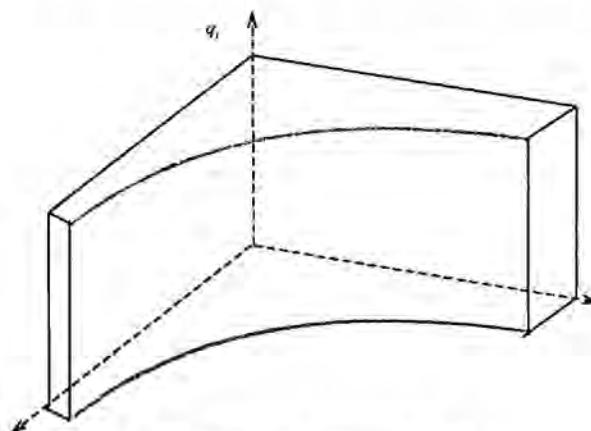


Рис. 1. Примерный вид множества  $\Omega$

При сделанных выше предположениях справедливо следующее утверждение.

**Утверждение 2.2.** Вектор оптимальных значений управляющих функций ракетного двигателя  $u(t), w(t), q_i(t)$  в оптимизационной задаче (2.7)–(2.9) принадлежит границе множества допустимых управлений  $\Omega$ .

**Доказательство:**

Введем новые управляющие функции  $q_0(t), \alpha(t), k(t)$ , связанные с  $u(t), w(t), q_i(t)$  соотношениями

$$q_0 = u + w, \alpha = \frac{u}{w}, k = \frac{q_i}{q_0}. \quad (2.32)$$

В силу условия (2.30) нулевой расход любого из компонентов топлива соответствует нулевому значению развиваемой тяги, из чего следует неоптимальность на пассивных участках траектории ненулевого расхода одного из топливных компонентов при нулевом значении второго топливного компонента. Неоптимальность на пассивных участках ненулевого расхода инертной массы обсуждалась при анализе управляющих функций СР СОЖ КА. Таким образом, можно считать, что на пассивных участках оптимальной траектории необходимо выполняется  $u = w = q_i = 0$  и, в силу 1 гипотезы о виде множества допустимых управлений  $\Omega$ , доказываемое утверждение выполняется тривиально.

Далее при доказательстве утверждения будем рассматривать только активные участки движения аппарата, вдоль которых, очевидно, выполняется  $w > 0, q_0 > 0$ , и замена переменных (2.32) задает непрерывное отображение множества  $\Omega$  переменных  $u, w, q_i$  на множество  $\Omega'$  переменных  $q_0, \alpha, k$ . При этом внутреннее ядро и граница  $\Omega$  при отображении (2.32) переходит соответственно во внутреннее ядро и границу  $\Omega'$ .

Выбор представления (2.32) удобен тем, что практически для всех используемых на практике видов ракетного топлива скорость истечения  $V_0(q_0, \alpha)$  при фиксированном  $\alpha$  является монотонно возрастающей функцией  $q_0$ , и кривая, представляющая эту зависимость, выпукла вверх; если же зафиксировать  $q_0 = q_0^1$ , то типичная зависимость  $V_0(q_0^1, \alpha)$  также выпукла вверх с единственной точкой максимума [3].

В обозначениях (2.32) с учетом (2.27) функция  $H$  может быть записана в виде суммы  $H = H_0 + H_1$ , где

$$H_0 = \bar{\psi}_v \bar{v} + \bar{\psi}_w \bar{f} - \bar{\psi}_q q(1-\eta\varphi) + \psi_u \alpha q(1-\eta\varphi) + C_v \varphi \quad (2.33)$$

не зависит от выбора управлений  $u, w, q_i$ . Часть  $H_1$  функции  $H$  представляет собой функцию  $q_0, \alpha, k$ :

$$H_1 = q_0 \left\{ \psi_v \frac{V_0(q_0, \alpha)}{m} \sqrt{1+k} - \psi_u (1+k) - \frac{C_u}{a+1} - C_w k \right\}. \quad (2.34)$$

Здесь

$$C_v \equiv \psi_v - \psi_w, C_{uu} \equiv \psi_u - \psi_w. \quad (2.35)$$

Покажем, что  $H(q_0, \alpha, k)$  не может достигать максимума во внутренней точке множества допустимых управлений  $\Omega'$ . Действительно, при фиксированных  $\alpha = \alpha_1, k = k_1$ ,  $H$  как функция  $q_0$  может обращаться в ноль не более чем в двух точках: при  $q_0 = 0$  и в единственной, в силу монотонного возрастания  $V_0(q_0, \alpha_1)$ , точке  $q_0 = q_0^1$  в которой выражение в фигурных скобках (2.34) равно нулю. Поскольку  $V_0(q_0, \alpha_1) < V_0(q_0^1, \alpha_1)$  при  $q_0 < q_0^1$ , должно выполняться  $H(q_0, \alpha_1, k_1) < H(q_0^1, \alpha_1, k_1) = 0$ . Между двумя нулями функции  $H(q_0, \alpha_1, k_1)$  производная  $\frac{\partial H_1}{\partial q_0}$  может

обращаться в ноль не менее одного раза:  $\frac{\partial H_1}{\partial q_0} = 0$  при  $q_0 = q_0^2, q_0^2 \in (0, q_0^1)$ . Предположим, что и необходимые

условия локального экстремума функции  $H_1(q_0, \alpha, k)$  выполнены в точке  $(q_0^2, \alpha_1, k_1)$ :

$$\frac{\partial H_1(q_0^2, \alpha_1, k_1)}{\partial a} = 0, \frac{\partial H_1(q_0^2, \alpha_1, k_1)}{\partial k} = 0. \text{ При этом возможны два случая: если точка } q_0^2 \text{ единственная, то она является}$$

точкой локального минимума  $H_1(q_0, \alpha_1, k_1)$  и не может быть точкой максимума функции трех переменных  $H_1(q_0, \alpha, k)$ . В случае, если  $q_0^1$  является одной из точек локального максимума  $H(q_0, \alpha_1, k_1)$ , максимум функции  $H_1(q_0, \alpha, k)$  в  $(q_0^1, \alpha_1, k_1)$  также не достигается в силу соотношений  $H_1(q_0^1, \alpha_1, k_1) < H_1(q_0^1, \alpha, k) = 0$ , справедливых для произвольных  $\alpha_1, k_1$ .

Если точка  $(q_0^1, \alpha_1, k_1)$  принадлежит открытому ядру множества  $\Omega'$ , она не может быть точкой максимума  $H_1(q_0, \alpha, k)$ , поскольку не является стационарной:

$$\frac{\partial H_1(q_0^1, \alpha_1, k_1)}{\partial q_0} = \frac{\psi_v}{m} \left\{ [V_0(q_0^1, \alpha_1) \sqrt{1+k_1} - \psi_v - \frac{C_u}{\alpha_1 + 1} - \psi_i k_1] + q_0^1 V_0'(q_0^1, \alpha_1) \sqrt{1+k_1} \right\} > 0,$$

так как выражение в квадратных скобках обращается в ноль (по определению  $q_0^1$ ), а второе слагаемое больше нуля в силу монотонного возрастания  $V_0(q_0, \alpha)$  как функции  $q_0$  при фиксированном  $\alpha$ . Для завершения доказательства отметим, что при фиксированных положительных значениях  $k$ ,  $\alpha$  соотношения (2.32) задают в пространстве  $u, w, q_i$  луч выходящий из точки  $(0, 0, 0)$  и пересекающий, в силу II гипотезы о виде множества  $\Omega$ , граничную поверхность множества допустимых управлений в единственной точке. Поскольку каждая точка из внутреннего ядра  $\Omega$  принадлежит некоторому лучу указанного вида, и в силу произвольности выбора  $\alpha_1, k_1$ , утверждение о принадлежности вектора оптимальных значений управляющих функций ракетного двигателя границе множества допустимых управлений  $\Omega$  доказано.

Заметим, что попутно было доказано, что вдоль оптимальных траекторий аппарата часть  $H_1$  функции  $H$  удовлетворяет неравенству

$$H_1 \geq 0. \quad (2.36)$$

При этом знак равенства имеет место только на пассивных участках.

На основании утверждения 2.1 при анализе оптимальных управляющих функций ЖРД достаточно ограничиться рассмотрением граничной поверхности множества допустимых управлений. В нашем исследовании мы будем предполагать, что вид множества допустимых управлений  $\Omega$  соответствует приведенному на рис. 2.1, при этом ограничения, наложенные на расход инертной массы записываются так:

$$0 \leq q_i(t) \leq q_i^0 = \text{const}. \quad (2.37)$$

Таким образом, граничная поверхность  $\Omega$  состоит из боковой поверхности и двух оснований:  $q_i = 0$  и  $q_i = q_i^0$ .

Оптимальное управление на границе  $q_i = q_i^0$ . При  $q_i = q_i^0$  часть функции  $H$ , зависящая от управлений  $q_0, \alpha$ , записывается в виде

$$H_1 = \psi_v \frac{V_0(q_0, \alpha)}{m} \sqrt{q_0(q_0 + q_i^0)} - q_0 \left( \frac{\psi_v a + \psi_w}{a+1} \right) = q_0 \left[ \psi_v \frac{V_0(q_0, \alpha)}{m} \sqrt{1 + \frac{q_i^0}{q_0}} - \frac{\psi_v a + \psi_w}{a+1} \right]. \quad (2.38)$$

Для того чтобы оптимальное управление принадлежало рассматриваемой границе, необходимо выполнение следующих двух условий:

$$H_1 \geq 0, q_i^{opt} \geq q_i^0, \quad (2.39)$$

где  $q_i^{opt}$  находится из условия стационарности  $H_1$  как функции  $q_i$ :

$$\frac{\partial H_1}{\partial q_i} = \frac{\psi_v}{m} V_0(q_0, \alpha) \frac{q_0}{2\sqrt{q_0(q_0 + q_i^0)}} - \psi_i = 0. \quad (2.40)$$

Нетрудно видеть, что второе из условий (2.39) всегда выполняется при  $\psi_i \leq 0$ , при этом если  $q_i^0 = \infty$ , то участку  $\psi_i \leq 0$  соответствует неускоренный мгновенный сброс инертной массы, очевидно не являющийся оптимальным.

При  $\psi_i > 0$  условия (2.39) с учетом (2.40) записываются в виде

$$\sqrt{q_0(q_0 + q_i^0)} < \frac{\psi_v q_0 V_0}{2m \psi_i}, \quad (2.41)$$

$$\frac{\psi_v}{m} V_0 \sqrt{q_0(q_0 + q_i^0)} > q_0 \left( \frac{\psi_u a + \psi_w}{a+1} \right). \quad (2.42)$$

Для того чтобы внутренняя точка  $(q_0, \alpha)$  граничной поверхности  $q_i = q_i^0$  была стационарной точкой функции  $H_1$ , необходимо выполнение условий

$$\frac{\partial H_1}{\partial q_0} = \frac{\psi_v}{m} \frac{\partial V_0}{\partial q_0} \sqrt{q_0(q_0 + q_i^0)} + \frac{\psi_u}{m} V_0 \frac{2q_0 + q_i^0}{2\sqrt{q_0(q_0 + q_i^0)}} - \frac{\psi_u a + \psi_w}{a+1} = 0, \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial \alpha} = \frac{\psi_v}{m} \frac{\partial V_0}{\partial \alpha} \sqrt{q_0(q_0 + q_i^0)} - q_0 \frac{\psi_u - \psi_w}{(a+1)^2} = 0. \quad (2.44)$$

Необходимые условия II порядка существования максимума функции  $H_1$  в точке  $(q_0, \alpha, q_i^0)$  имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H_1}{\partial q_0^2} &= \frac{\psi_v}{m} \frac{\partial^2 V_0}{\partial q_0^2} \sqrt{q_0(q_0 + q_i^0)} + 2 \frac{\psi_v}{m} \frac{\partial V_0}{\partial q_0} \frac{2q_0 + q_i^0}{2\sqrt{q_0(q_0 + q_i^0)}} + \frac{\psi_v V_0}{m} \frac{2\sqrt{q_0(q_0 + q_i^0)} - \frac{(2q_0 + q_i^0)^2}{2\sqrt{q_0(q_0 + q_i^0)}}}{2q_0(q_0 + q_i^0)} = \\ &= \frac{\psi_v}{m} \frac{4(q_0^2 + q_0 q_i^0)^2 \frac{\partial^2 V_0}{\partial q_0^2} + 8(2q_0 + q_i^0)(q_0^2 + q_0 q_i^0) \frac{\partial V_0}{\partial q_0} - q_i^0 V_0}{4(q_0^2 + q_0 q_i^0)^{3/2}} < 0, \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial^2 H_1}{\partial \alpha^2} = \frac{\psi_v}{m} \frac{\partial^2 V_0}{\partial \alpha^2} \sqrt{q_0(q_0 + q_i^0)} + q_0 \frac{\psi_u - \psi_w}{2(1+\alpha)^3} < 0. \quad (2.46)$$

Условие  $H_1 > 0$ , выполняющееся на активных участках траектории, с учетом соотношения (2.43) записывается в виде

$$\frac{\psi_v}{m} (V_0 \sqrt{q_0(q_0 + q_i^0)} - \frac{\partial V_0}{\partial q_0} q_0 \sqrt{q_0(q_0 + q_i^0)} - V_0 \frac{q_0(2q_0 + q_i^0)}{2\sqrt{q_0(q_0 + q_i^0)}}) > 0. \quad (2.47)$$

Проведя необходимые преобразования в (2.47), имеем

$$V_0 q_i^0 - \frac{\partial V_0}{\partial q_0} q_0 (q_0 + q_i^0) > 0, \quad (2.48)$$

Из (2.45) следует выполнение неравенства

$$q_i^0 V_0 - 8(2q_0 + q_i^0)(q_0 + q_i^0) q_0 \frac{\partial V_0}{\partial q_0} - 4(1 + \frac{q_0}{q_i^0})^2 q_0^2 \frac{\partial^2 V_0}{\partial q_0^2} > 0. \quad (2.49)$$

Условия существования максимума во внутренней точке рассматриваемой граничной поверхности (2.48), (2.49) при  $q_i^0 > 0$  могут быть переписаны в виде

$$V_0 - \left(1 + \frac{q_0}{q_i^0}\right) \frac{\partial V_0}{\partial q_0} q_0 > 0, \quad (2.50)$$

$$V_0 - 8\left(1 + \frac{2q_0}{q_i^0}\right)\left(1 + \frac{q_0}{q_i^0}\right)q_0 \frac{\partial V_0}{\partial q_0} - 4\left(1 + \frac{q_0}{q_i^0}\right)^2 q_0^2 \frac{\partial^2 V_0}{\partial q_0^2} > 0. \quad (2.51)$$

Поскольку в неравенствах (2.50), (2.51) не фигурируют сопряженные функции, можно сделать вывод о том, что условия существования внутренней стационарной точки не зависят от вида граничных условий и функционала рассматриваемой оптимизационной задачи и определяются лишь параметрами выбираемой при постановке двигательной системы аппарата, а именно, видом функциональной зависимости  $V_0(q_0, \alpha)$ .

При невыполнении хотя бы одного из неравенств (2.50), (2.51) вектор оптимальных значений управляющих функций  $q_0(t), \alpha(t)$  принадлежит пересечению рассматриваемой границы с боковой поверхностью.

Заметим, что если при постановке задачи принимается концепция двигательной установки без активного сброса инертной массы  $q_i^0 = 0$ , то условие (2.48) в силу сделанных предположений о  $V_0(q_0, \alpha)$  не выполняется. Тем самым подтверждается результат, полученный в работе [30], где была показана граничность оптимального управления расходами двухкомпонентной топливной смеси ЖРД без активного сброса инертной массы.

Если условия (2.50), (2.51) выполняются, необходимо рассматривать дополнительные условия существования максимума во внутренней точке границы. Преобразуя (2.46) с учетом (2.44), имеем

$$\frac{\partial^2 H_1}{\partial \alpha^2} = \frac{\psi_v}{m} \sqrt{q_0(q_0 + q_i^0)} \left( \frac{\partial^2 V_0}{\partial^2 \alpha} + \frac{1}{2(1+\alpha)} \frac{\partial V_0}{\partial \alpha} \right) = \frac{\psi_v}{m} \frac{\sqrt{q_0(q_0 + q_i^0)}}{2(1+\alpha)} [2(1+\alpha) \frac{\partial^2 V_0}{\partial^2 \alpha} + \frac{\partial V_0}{\partial \alpha}] < 0,$$

откуда следует еще одно необходимое условие существования максимума:

$$2(1+\alpha) \frac{\partial^2 V_0}{\partial^2 \alpha} + \frac{\partial V_0}{\partial \alpha} < 0. \quad (2.52)$$

Заметим, что условие (2.52) выполняется по крайней мере в области  $\frac{\partial V_0}{\partial \alpha} < 0$ , поскольку  $\frac{\partial^2 V_0}{\partial \alpha^2} < 0$ .

Проверка условия эллиптичности стационарной точки  $D = \frac{\partial^2 H_1}{\partial q_0^2} \cdot \frac{\partial^2 H_1}{\partial \alpha^2} - (\frac{\partial^2 H_1}{\partial q_0 \partial \alpha})^2 > 0$  дает

$$\frac{\partial^2 H_1}{\partial q_0 \partial \alpha} = \frac{\psi_v}{m} \frac{2q_0(q_0 + q_i^0) \frac{\partial^2 V_0}{\partial q_0 \partial \alpha} + (2q_0 + q_i^0) \frac{\partial V_0}{\partial \alpha}}{2\sqrt{q_0(q_0 + q_i^0)}} - \frac{\psi_u - \psi_w}{(1+\alpha)^2},$$

откуда с учетом (2.44) имеем

$$\frac{\partial^2 H_1}{\partial q_0 \partial \alpha} = \frac{\psi_v}{m} \left\{ \frac{2q_0(q_0 + q_i^0) \frac{\partial^2 V_0}{\partial q_0 \partial \alpha} + (2q_0 + q_i^0) \frac{\partial V_0}{\partial \alpha}}{2\sqrt{q_0(q_0 + q_i^0)}} - \frac{\partial V_0}{\partial \alpha} \frac{\sqrt{q_0(q_0 + q_i^0)}}{q_0} \right\} = \frac{\psi_v}{m} \frac{2(q_0 + q_i^0)q_0 \frac{\partial^2 V_0}{\partial q_0 \partial \alpha} - q_i^0 \frac{\partial V_0}{\partial \alpha}}{2\sqrt{q_0(q_0 + q_i^0)}},$$

$$D = \left(\frac{\psi_v}{m}\right)^2 \left\{ \frac{4(q_0 + q_i^0)^2 q_0^2 \frac{\partial^2 V_0}{\partial q_0^2} + 8(2q_0 + q_i^0)(q_0 + q_i^0)q_0 \frac{\partial V_0}{\partial q_0} - q_i^0 V_0}{4q_0(q_0 + q_i^0)} \times \right. \\ \left. \times \frac{1}{2(1+\alpha)} \left[ \frac{\partial V_0}{\partial \alpha} + 2(1+\alpha) \frac{\partial^2 V_0}{\partial \alpha^2} \right] \frac{[2(q_0 + q_i^0)q_0 \frac{\partial^2 V_0}{\partial q_0 \partial \alpha} - q_i^0 \frac{\partial V_0}{\partial \alpha}]^2}{4q_0(q_0 + q_i^0)} \right\}. \quad (2.53)$$

После упрощения соотношения (2.53), с учетом выполнения неравенства (2.52), условие эллиптичности стационарной точки приводит к необходимости выполнения следующего неравенства

$$V_0 - 8(1 + \frac{q_0}{q_i}) \left(1 + \frac{q_0}{q_i}\right) q_0 \frac{\partial V_0}{\partial q_0} - 4(1 + \frac{q_0}{q_i})^2 q_0^2 \frac{\partial^2 V_0}{\partial q_0^2} + 2(1+\alpha) \frac{[2(1 + \frac{q_0}{q_i})q_0 \frac{\partial^2 V_0}{\partial q_0^2} - \frac{\partial V_0}{\partial \alpha}]^2}{\frac{\partial V_0}{\partial \alpha} + 2(1+\alpha) \frac{\partial V_0}{\partial \alpha^2}} > 0. \quad (2.54)$$

Таким образом, анализ оптимального управления  $q_0(t), \alpha(t)$ , проведенный на граничной поверхности  $q_i = q_i^0$ , позволяет сделать следующие выводы:

- Необходимые условия существования максимума  $H_1$  во внутренней точке сводятся к неравенствам (2.48) ( $H_1 > 0$ ), (2.49) ( $\frac{\partial^2 H_1}{\partial q_0^2} < 0$ ) и (2.54) ( $D > 0$ ), причем выполнение (2.54) невозможно без выполнения (2.52).
- Соотношения (2.48), (2.49), (2.54), (2.52) инвариантны относительно выбора краевых условий и минимизируемого функционала оптимизационной задачи, поскольку не зависят от сопряженных функций.
- Если принятая концепция двигателательной системы КА без активногоброса инертной массы  $q_i^0 = 0$ , то оптимальным является управление, принадлежащее пересечению рассматриваемой граничной поверхности с боковой поверхностью, что подтверждает результат, полученный ранее в [30].
- При  $q_i^0 > 0$  всегда найдется достаточно малое значение  $q_0$ , при котором необходимы условия существования максимума во внутренней точке выполняются, что следует из качественного анализа соответствующих кривых  $V_0(q_0)$ , приведенных в технической литературе [3].
- С увеличением  $q_i^0$  диапазон значений  $q_0$ , для которых вышеназванные условия выполняются, вероятно, возрастает, точно это можно утверждать относительно условия (2.48).

Оптимальное управление на боковой поверхности  $\Omega$ . При анализе оптимального управления управляемыми функциями ЖРД КА на боковой поверхности множества допустимых управлений  $\Omega$ , необходимо рассмотреть два случая: 1) оптимальной является внутренняя точка боковой поверхности, и 2) оптимальное управление принадлежит пересечению боковой поверхности с «крышкой»  $q_i = q_i^0 > 0$  (случай  $q_i^0 = 0$  рассмотрен выше). Какой из рассматриваемых случаев имеет место, определяется неравенством  $q_i^{opt} < q_i^0$ , которое необходимо выполнять только в первом случае. Здесь  $q_i^{opt}$  по-прежнему находится из соотношения (2.40).

Рассмотрим случай, когда оптимальной является внутренняя точка боковой поверхности. Часть функции  $H$ , зависящая от управлений  $q_0, \alpha, q_i$ , записывается в виде

$$H_1 = \psi_v \frac{V_0(q_0, \alpha)}{m} \sqrt{q_0(q_0 + q_i^0)} - q_0 \left( \frac{\psi_v \alpha + \psi_w}{a+1} \right) - \psi_i q_i. \quad (2.55)$$

Предположим, что уравнение проекции боковой поверхности  $\Omega$  на плоскость  $(q_0, \alpha)$  задано в параметрической форме:

$$q_0 = g(\alpha), \alpha \in [\alpha_{min}, \alpha_{max}]. \quad (2.56)$$

Выбор  $\alpha$  в качестве параметра удобен при достаточно «разумном» выборе вида вышесказанной проекции. Действительно, если проекция боковой поверхности на плоскость  $(u, w)$   $\Omega_{uw}$  соответствует приведенной на рис. 1 либо является прямоугольником, монотонному изменению параметра соответствует непрерывный обход границы  $\Omega_{uw}$ . При этом можно предполагать, что при надлежащем выборе множества допустимых управлений  $\Omega$  значениям  $\alpha_{\min}, \alpha_{\max}$  соответствуют пассивные участки оптимальной траектории, поэтому дальнейший анализ проводится для внутренних точек боковой границы  $\Omega_{uw}$ .

Условия стационарности точки максимума в этом случае записываются в виде

$$\frac{\partial h_1}{\partial q_i} = \frac{\psi_v}{2m} V_0(g(\alpha), \alpha) \sqrt{\frac{g(\alpha)}{g(\alpha) + q_i}} - \psi_i = 0, \quad (2.57)$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial \alpha} = \frac{\psi_v}{m} \left[ \frac{\partial V_0}{\partial \alpha} \sqrt{g^2 + gq_i} + V_0 \frac{2g + q_i}{2\sqrt{g^2 + gq_i}} \frac{\partial g(\alpha)}{\partial \alpha} \right] - g \frac{\psi_u - \psi_w}{(1+\alpha)^2} - \frac{\partial g(\alpha)}{\partial \alpha} \frac{\psi_u \alpha + \psi_w}{1+\alpha} = 0. \quad (2.58)$$

Из (2.57) следует соотношение

$$\sqrt{g(g + q_i)} = \frac{\psi_v}{2m\psi_i} gV_0, \quad (2.59)$$

подставляя которое в (2.58), имеем условие для переключающей функции на активных участках:

$$H_1 = \frac{\psi_v^2}{2m^2} \frac{gV_0}{\psi_i} - g \frac{\psi_u \alpha + \psi_w}{1+\alpha} = g \left[ \frac{\psi_v^2}{\psi_i m^2} \frac{V_0^2}{2} - \frac{\psi_u \alpha + \psi_w}{1+\alpha} \right] > 0. \quad (2.60)$$

Таким образом, активный участок оптимален, пока кинетическая энергия единицы массы основного рабочего тела (без инертной массы) больше некоторого порогового значения:

$$\frac{V_0^2}{2} - \frac{\psi_i m^2}{\psi_v^2} \frac{\psi_u \alpha + \psi_w}{1+\alpha} > 0. \quad (2.61)$$

Покажем, что в рассматриваемом случае уравнения движения (2.7) и присоединенная система (2.13) имеют первый интеграл

$$\psi_i m^2 = C_1 = \text{const}. \quad (2.62)$$

Действительно, на боковой поверхности множества допустимых управлений динамика массового расхода с учетом (2.57) определяется уравнением вида

$$\dot{m} = -(g + q_i) = -\frac{1}{4} \frac{\psi_v^2}{m^2 \psi_i^2} V_0^2 g. \quad (2.63)$$

При этом сопряженные функции подчинены уравнениям

$$\dot{\psi}_u = \dot{\psi}_w = \dot{\psi}_i = \frac{\psi_v}{m^2} V_0 \sqrt{g(g + q_i)}. \quad (2.64)$$

Учитывая соотношения (2.59), (2.63), (2.64), имеем  $\frac{\dot{\psi}_i}{\psi} = -2 \frac{\dot{m}}{m}$ , откуда и следует существование первого интеграла (2.62).

Легко проверяется, что этот первый интеграл имеет место только во внутренней точке боковой поверхности, т.е при оптимальном выборе расхода инертной массы из условия (2.57).

Поскольку он также справедлив для двигательных установок ограниченной мощности без ограничений на величину массового расхода традиционного рабочего тела (идеально регулируемый двигатель) [15], можно сделать

вывод о том, что оптимальный выбор величины расхода инертной массы  $q_i$ , позволяет в улучшить эффективность использования энергии основного рабочего тела ЖРД, приблизив ее к эффективности идеально регулируемых двигателей и не нарушая при этом ограничений, характерных для типичных ЖРД.

С учетом первого интеграла (2.62) условие оптимальности активного участка (2.61) преобразуется к виду

$$\frac{V_0^2}{2} - \frac{C_1}{\psi_v^2} \frac{\psi_u \alpha + \psi_w}{1+\alpha} > 0. \quad (2.65)$$

Рассмотрим необходимые условия существования максимума функции  $H_1$  II порядка в стационарной точке. Учитывая (2.57), можно сделать вывод о выполнении необходимого условия по  $q_i$ ,

$$\frac{\partial^2 H_1}{\partial q_i^2} = -\frac{\psi_v}{4m} V_0 \sqrt{g(g+q_i)^{-3/2}} < 0. \quad (2.66)$$

Условие стационарности по  $\alpha$  (2.58) с учетом первого интеграла (2.62) записем в виде

$$\frac{\partial H_1}{\partial \alpha} = \frac{\psi_v^2}{2} \frac{g}{C_i} V_0 \frac{\partial V_0}{\partial \alpha} + \frac{dg}{d\alpha} \left( \frac{2g+q_i}{g} \psi_i - \frac{\psi_u \alpha + \psi_w}{1+\alpha} \right) - g \frac{\psi_u - \psi_w}{(1+\alpha)^2} = 0. \quad (2.67)$$

Проведя промежуточные выкладки, с учетом (2.57) и первых интегралов сопряженной системы (2.64)

$$\psi_u - \psi_i = C_u^i, \psi_w - \psi_i = C_w^i$$

соотношение (2.67) можно привести к виду

$$\frac{\partial H_1}{\partial \alpha} = \frac{d}{d\alpha} \left[ g \left( \frac{\psi_v^2}{4C_i} V_0^2 - g \frac{C_w^i + \alpha C_u^i}{1+\alpha} \right) \right] = 0. \quad (2.68)$$

Таким образом, необходимое условие существования максимума по  $\alpha$  в стационарной точке:

$$\frac{\partial^2 H_1}{\partial \alpha^2} = \frac{d^2}{d\alpha^2} \left[ g \left( \frac{\psi_v^2}{4C_i} V_0^2 - g \frac{C_w^i + \alpha C_u^i}{1+\alpha} \right) \right]. \quad (2.69)$$

Для проверки условия эллиптичности можно воспользоваться следующим выражением для смешанной производной функции  $H_1$  по  $q_i$  и  $\alpha$ :

$$\frac{\partial^2 H_1}{\partial q_i \partial \alpha} = \frac{\psi_v}{m} \sqrt{\frac{g}{g+q_i}} \left[ \frac{\partial V_0}{\partial \alpha} + \frac{V_0}{2g} \frac{q_i}{g+q_i} \frac{\partial g}{\partial \alpha} \right]. \quad (2.70)$$

Условие эллиптичности стационарной точки, с учетом (2.66), (2.69) и (2.70), можно записать в виде

$$-\frac{d^2}{d\alpha^2} \left[ g \left( \frac{\psi_v^2}{4C_i} V_0^2 - g \frac{C_w^i + \alpha C_u^i}{1+\alpha} \right) \right] \cdot \frac{\psi_v}{4m} V_0 \sqrt{g(g+q_i)^{-3/2}} - \frac{\psi_v^2}{m^2} \frac{g}{g+q_i} \left[ \frac{\partial V_0}{\partial \alpha} + \frac{V_0}{2g} \frac{q_i}{g+q_i} \frac{\partial g}{\partial \alpha} \right]^2 > 0. \quad (2.71)$$

Необходимо отметить, что в отличие от случая граничной поверхности  $q_i = q_i^0$ , необходимые условия оптимальности второго порядка на боковой поверхности зависят от сопряженных функций оптимизационной задачи.

При  $q_i^{opt} \geq q_i^0$  оптимальное управление может принадлежать пересечению боковой поверхности множества допустимых управлений с плоскостью  $q_i = q_i^0$ . В этом случае условие стационарности  $H_1$  как функции единственного управления  $\alpha(t)$  записывается в виде (2.58) с заменой  $q_i$  на  $q_i^0$ :

$$\frac{\partial H_1}{\partial \alpha} = \frac{\psi_v}{m} \left[ \frac{\partial V_0}{\partial \alpha} \sqrt{g^2 + gq_i^0} + V_0 \frac{2g + q_i^0}{2\sqrt{g^2 + gq_i^0}} \frac{\partial g}{\partial \alpha} \right] - g \frac{\psi_u - \psi_w}{(1+\alpha)^2} - \frac{\partial g}{\partial \alpha} \frac{\psi_u \alpha + \psi_w}{1+\alpha} = 0, \quad (2.72)$$

Для существования в стационарной точке максимума необходимо также выполнение соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H_1}{\partial \alpha^2} &= \frac{\psi_v}{m} \left[ \frac{\partial^2 V_0}{\partial \alpha^2} \sqrt{g^2 + gq_i^0} + 2 \frac{\partial V_0}{\partial \alpha} \frac{\partial g}{\partial \alpha} \frac{2g + q_i^0}{2\sqrt{g^2 + gq_i^0}} + \frac{V_0}{2} \left( \frac{\partial^2 g}{\partial \alpha^2} \frac{2g + q_i^0}{2\sqrt{g^2 + gq_i^0}} - \frac{\partial g}{\partial \alpha} \frac{q_i^0}{(g^2 + gq_i^0)^{3/2}} \right) \right] + \\ &+ 2g \frac{\psi_u - \psi_w}{(1+\alpha)^3} - 2 \frac{\partial g}{\partial \alpha} \frac{(\psi_u - \psi_w)}{(1+\alpha)^3} - \frac{\partial^2 g}{\partial \alpha^2} \frac{\psi_u \alpha + \psi_w}{1+\alpha} \leq 0. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Подытоживая анализ оптимальных управляющих функций расходами компонентов рабочего тела ЖРД КА и инертной массы на границе множества допустимых управлений  $\Omega$ , можно сделать вывод о том, что использование необходимых условий существования максимума II порядка не позволяет установить *a priori* неоптимальность управлений ни на одной из рассмотренных граничных поверхностей. Поэтому алгоритм выбора оптимального управления состоит в решении уравнений (2.43), (2.44) на «крышке»  $q_i = q_i^0$ ; (2.57), (2.58) на боковой поверхности; (2.72) на их пересечении.

Оптимальными будут те значения  $q_0, q_i, \alpha$ , подстановка которых в выражение (2.55) для функции  $H_1$  даст наибольшее значение. Если это значение отрицательно, то, в силу доказанного свойства  $H_1$ , оптимальным является пассивный участок, на котором  $u = 0, w = 0, q_i = 0$ .

Приведенный алгоритм не связан с проверкой необходимых условий оптимальности второго порядка, поскольку непосредственное сопоставление значений функции  $H_1$  во всех стационарных точках и в начале координат пространства управлений дает полное решение задачи поиска максимума  $H$  и требует меньшего объема вычислений.

Анализ оптимального управления ЖРД следует дополнить исследованием управлений на граничной дуге оптимальной траектории — когда выполняется  $m_i(t) = 0$ , что эквивалентно условию  $q_i = \omega q(1-\eta\varphi)$ . Поскольку оптимальные значения  $\omega(t)$  и  $\varphi(t)$  вдоль регулярных дуг граничны, расход инертной массы  $q_i$  через двигатель оказывается в этом случае постоянным. В случае, когда  $q_i = const \neq 0$ , соответствующая дуга анализируется так же, как и оптимальное управление на границе  $q_i = q_i^0$ , с заменой  $q_i^0$  на соответствующую постоянную. Если же  $q_i = 0$ , оптимальные управлении припадлежат границе множества  $\Omega'$  и могут быть определены из уравнения (2.73) с подстановкой в него  $q_i^0 = 0$ .

**Ядерный тепловой ракетный двигатель.** В соответствии с одномерной теорией газовых потоков в сверхзвуковых соплах ракетных двигателей, основные характеристики ядерного теплового ракетного двигателя (ЯТРД) — скорость истечения реактивной струи  $V$ , тяга  $P$  и единичный массовый расход рабочего тела  $q$  — при заданных величинах температуры диссоциированного газа  $T$  и давления в камере сгорания  $p_0$  определяются по следующим формулам [36]:

$$V = \gamma_c z(\lambda_c) \sqrt{\frac{\kappa+1}{2\kappa} \frac{R_* T}{\mu}}, \quad (2.74)$$

$$P = p_0 F_* \left( \frac{2}{\kappa+1} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \gamma_c z(\lambda_c), \quad (2.75)$$

$$q = p_0 F_* \left( \frac{2}{\kappa+1} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa+1} \frac{\mu}{R_* T}}. \quad (2.76)$$

Здесь  $R$  — универсальная газовая постоянная,  $\kappa$  — показатель адиабаты газообразного рабочего тела,  $\mu$  — молекулярная масса рабочего тела,  $F$  — площадь критического сечения реактивного сопла,  $\gamma_c$  и  $\lambda_c$  — полный импульс газового потока и его относительная скорость на срезе сопла,  $z(\lambda) = \lambda + \frac{1}{\lambda}$ .

Дальнейшее моделирование рабочих процессов в ядерном ракетном двигателе, модифицированном для возможности ускоренного сброса инертной массы, основано на предположении о том, что показатель адиабаты сопла при использовании как традиционного рабочего тела, так и инертной массы остается постоянной величиной. Это справедливо, в частности, если в качестве основного рабочего тела ЯТРД используется водород, поскольку вода, составляющая основную часть отходов системы обеспечения жизнедеятельности КА, в диссоциированном состоянии является, как и водород, двухатомным газом, а показатель адиабаты для двухатомных газов одинаков [36]. В рамках этого предположения величины  $\gamma_c$ ,  $z(\lambda_c)$ ,  $F$  можно считать постоянными при любом выборе рабочего тела, поскольку они определяются заданной геометрией реактивного сопла. Таким образом, величина тяги ЯТРД в соответствии с формулами (2.74)–(2.76) становится функцией только давления в камерах горения, изменения же молекулярной массы газового потока и его температуры оказывают влияние только на величины скорости истечения и единичного массового расхода рабочего тела:

$$V = \xi_1 \sqrt{\frac{T}{\mu}}, q = \xi_2 p_0 \sqrt{\frac{\mu}{T}}, P = qV. \quad (2.77)$$

Здесь  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  — константы, определяющие геометрические характеристики камеры горения ракетного двигателя.

Предполагая возможность только раздельного использования основного рабочего тела и инертной массы для создания реактивной тяги, выберем в качестве управляющих функций ЯТРД величины  $p_0$ ,  $T$  и  $\delta$  — дискретную функцию переключения вариантов топливной смеси. Множество допустимых управлений зададим в виде

$$0 \leq T \leq T_0, 0 \leq p_0 \leq p_0^{\max}, \delta \in \{0,1\}, \quad (2.78)$$

где величины  $T_0$  и  $p_0^{\max}$  фиксированы. Будем предполагать, что режим  $\delta=1$  соответствует использованию основного рабочего тела,  $\delta=0$  — инертной массы. Заметим, что возможность случая  $\delta=0$  обусловлена тем, что рабочее тело ЯТРД не является источником энергии реактивной струи.

Динамика изменения массовых запасов основного рабочего тела ЯТРД  $m_u$  и инертной массы  $m_i$  в соответствии с (2.77) определяется следующими дифференциальными уравнениями:

$$\dot{m}_u = -\delta \xi_2 p_0 \sqrt{\frac{\mu_0}{T}}, \dot{m}_i = -(1-\delta) \xi_2 p_0 \sqrt{\frac{\mu_i}{T}}, \quad (2.79)$$

где  $\mu_0$  и  $\mu_i$  — соответствующие величины молекулярной массы топливной смеси.

Часть  $H_1$  функции  $H$ , зависящая от выбранных управляющих функций, задается формулой:

$$H_1 = \frac{\psi_u}{m} \xi p_0 - \psi_u \delta \xi_2 p_0 \sqrt{\frac{\mu_0}{T}} - \psi_i (1-\delta) \xi_2 p_0 \sqrt{\frac{\mu_i}{T}}, \quad (2.80)$$

где  $\xi = \xi_1 \xi_2$ ; при этом дифференциальные уравнения для сопряженных функций  $\psi_u$  и  $\psi_i$  имеют тот же вид, что и для случая использования в качестве двигательной установки жидкостного ракетного двигателя:

$$\dot{\psi}_u = \dot{\psi}_i = \frac{\psi_u}{m^2} P. \quad (2.81)$$

Из вида формул (2.79) следует, что оптимальные значения функции  $\delta(t)$  находятся из соотношений

$$\delta = \begin{cases} 1, & H_\delta > 0, \\ 0, & H_\delta < 0, \end{cases} \quad (2.82)$$

где

$$H_\delta = \xi_2 \frac{p_0}{\sqrt{T}} (\psi_i \sqrt{\mu_i} - \psi_u \sqrt{\mu_0}). \quad (2.83)$$

Исследуем возможность скользящего режима управления  $\delta$ , которому соответствует выполнение на некотором интервале времени тождества

$$H_\delta \equiv 0. \quad (2.83)$$

Очевидно, случай  $p_0 = 0$  можно исключить из рассмотрения, поскольку на пассивных участках траектории космического аппарата расходы как основного рабочего тела, так и инертной массы в соответствии с уравнениями (2.79) равны нулю, и управление  $\delta$  может быть выбрано произвольно. Если на некотором интервале времени выполняется

$$H_\delta^1 = \psi_i \sqrt{\mu_i} - \psi_u \sqrt{\mu_0} \equiv 0, \quad (2.85)$$

то должно также выполняться и  $\frac{d}{dt} H_\delta^1 \equiv 0$ . Имеем

$$\frac{d}{dt} H_\delta^1 = \dot{\psi}_i \sqrt{\mu_i} - \dot{\psi}_u \sqrt{\mu_0} = \frac{\psi_v}{m^2} P (\sqrt{\mu_i} - \sqrt{\mu_0}), \quad (2.86)$$

и выполнение (2.85) в предположении о том, что молекулярные массы традиционного рабочего тела и инертной массы различны, возможно только на пассивных участках. Таким образом, скользящий режим управления  $\delta$  неоптимальен, и активный участок оптимальной траектории состоит из конечного набора регулярных дуг, на каждом из которых используется либо основное рабочее тело, либо инертная масса.

Рассмотрим движение аппарата на участке  $\delta = 1$ . Функция  $H_1$  в этом случае записывается в виде

$$H_1 = \frac{\psi_v}{m} \xi p_0 - \psi_u \xi_2 p_0 \sqrt{\frac{\mu_0}{T}}. \quad (2.87)$$

Оптимальные значения давления в камере сгорания определяются знаком переключающей функции  $H_p$ :

$$p_0 = \begin{cases} p_0^{\max}, & H_p > 0, \\ 0, & H_p < 0, \end{cases} \quad (2.88)$$

где

$$H_p = \frac{\psi_v}{m} \xi - \psi_u \xi_2 \sqrt{\frac{\mu_0}{T}}. \quad (2.89)$$

Поскольку

$$\frac{dH_1}{dT} = -\frac{1}{2} \psi_u \xi_2 p_0 \sqrt{\mu_0} \frac{1}{T^{3/2}}, \quad (2.90)$$

то на активных участках ( $p_0 > 0$ ) оптимальные значения температуры в камере сгорания выбираются в соответствии со следующими соотношениями:

$$T = \begin{cases} T_0, & \psi_u > 0, \\ 0, & \psi_u < 0. \end{cases} \quad (2.91)$$

Режим  $T = 0$  при положительной величине давления в камере сгорания соответствует, как следует из формул (2.77), неускоренному сбросу бесконечной по величине массы рабочего тела, и следовательно, явно неоптимальен. Таким образом, можно считать, что вдоль активных участков регулярных дуг оптимальной траектории выполняется

$$p_0 = p_0^{\max}, T = T_0. \quad (2.92)$$

Отметим, что этот результат справедлив и вдоль регулярных дуг, на которых в качестве рабочего тела ЯРД используется инертная масса ( $\delta = 0$ ).

Оптимальный режим (2.92) позволяет установить возможные сочетания дуг  $\delta = 1$  и  $\delta = 0$  на каждом активном участке. Допустим, имеет место  $\delta = 1$ . Это означает, что выполняется условие  $H_\delta > 0$ , и в силу (2.92)

$\text{sign}\left(\frac{d}{dt}H_\delta\right) = \text{sign}\left(\frac{d}{dt}H_\delta^1\right)$ . Если сделать дополнительное предположение  $\mu_i > \mu_0$ , справедливо, в частности, для сочетания водород — вода, то из формулы (2.86) следует  $\frac{d}{dt}H_\delta > 0$ . Поэтому переключение режима  $\delta = 1$  на  $\delta = 0$

на каждом активном участке неоптимально, и следовательно, использование основного рабочего тела ЯРД возможно только после полного израсходования накопленного запаса инертной массы. Таким образом, возможными являются следующие режимы работы ЯРД на активных участках: 1) в качестве рабочего тела используется только инертная масса; 2) после полного израсходования запаса инертной массы используется основное рабочее тело ЯРД; 3) используется только основное рабочее тело ЯРД, при этом величина запаса инертной массы к началу активного участка равна нулю.

## 2.4. Проблема оптимизации траекторий межпланетной экспедиции

В данной работе рассматриваются два типа двигательных систем: жидкостные и ядерные ракетные двигатели, которые относятся к двигателям большой тяги. Точный смысл указанного термина состоит в том, что удельная масса таких двигателей, т.е. отношение веса двигателя к развиваемой им максимальной тяге невелико — от единиц до десятых долей процента [15, 24]. Эта особенность позволяет оснащать космические аппараты двигательными системами, способными обеспечивать необходимые приращения скорости за несколько минут, если тяга двигателей близка к максимальной. Поскольку именно такой режим работы двигательной системы удовлетворяет необходимым условиям оптимальности, оказываются выполнимыми критерии допустимости импульсной аппроксимации оптимальной траектории [24]: соизмеримость величин реактивного и гравитационного ускорений и малая продолжительность активных дуг по отношению к общей продолжительности экспедиции. Как показано в [24] импульсная аппроксимация законна для любого вида функциональной зависимости тяги ракетного двигателя от величин расходов рабочего тела, важно лишь, чтобы расход массы аппарата при стремлении длительности активного участка к нулю оставался конечным.

### 2.4.1. Импульсная аппроксимация оптимальной траектории.

Импульсная аппроксимация традиционно используется в механике космического полета при анализе межпланетных перелетов и соответствует цели данной работы — исследовать влияние обобщенных параметров СОЖ и ракетных двигателей на оптимальное распределение начальной массы космического аппарата, оптимальные траектории перехода и режимы управления двигателем и работой СОЖ.

Отметим, что переход к импульсной аппроксимации методически связан с определенным упрощением не только динамической подзадачи основной вариационной проблемы. Импульсная аппроксимация делает бессмысленным включение в число неизвестных величин задачи такого параметра, как масса двигательной системы. При математическом моделировании реальных двигателей их масса считается возрастающей функцией максимальной тяги [15]. Поскольку тяга при импульсе теоретически считается бесконечно большой, масса двигателя исключается из неизвестных задачи и считается частью массы конструкций, фиксированной при постановке задачи.

Указанной нечувствительностью функционала задачи к выбору максимальной тяги двигателя приходится платить за упрощение динамической части задачи при использовании импульсной аппроксимации. Отметим, что это вынужденное упрощение не обязательно считать негативной особенностью использованного подхода, поскольку оно снижает на единицу размерность пространства как искомых величин, так и существенных удельных конструктивных параметров (удельная масса ракетного двигателя не влияет на решение и не включается в число заданных конструктивных параметров). Некоторое ослабление «проклятия размерности» Р. Беллмана не только снижает напряженность проблемы численного поиска оптимальных параметров задачи, но и делает полученные результаты легко обозримыми для получения качественных выводов о влиянии оставшихся параметров на характер решения.

Импульсная аппроксимация позволяет заменить каждый активный участок траектории 7-мерным вектором, состоящим из следующих величин [24]: момента включения двигателей  $t_i$ , радиуса-вектора центра масс аппарата  $\vec{r}_i$  и приращения скорости центра масс  $\Delta\vec{v}_i$ . Если минимизируемый функционал вариационной задачи удается представить как функцию этих величин:

$$J = J(t_i, \vec{r}_i, \Delta\vec{v}_i), i = \overline{1, n}, \quad (2.93)$$

где  $n$  — количество активных участков на оптимальной траектории, то исходная задача сводится к поиску минимума функции  $J$  в конечномерном пространстве  $7n$  переменных при наличии связей, определяемых свойствами гравитационного поля, в котором происходит движение аппарата [24]. В нашем случае предполагается, что при рассмотрении межпланетных переходов используется схема модифицированного метода сфер влияния (MMCВ), согласно которому траектория разбивается на участки, на каждом из которых движение космического аппарата происходит под действием ньютоновской центральной гравитационной силы основного центра притяжения. В этом случае дифференциальные связи между векторами  $\{t_i, \vec{r}_i, \Delta\vec{v}_i\}$  заменяются конечными соотношениями невозмущенного кеплеровского движения [43].

Изложенная схема упрощения исходной вариационной задачи составляет суть так называемого «экстремального» подхода [24], широко применяемого в современной астрономике при оптимизации межпланетных перелетов с двигателями большой тяги. К известным недостаткам экстремального подхода относится то, что в отличие от «вариационного» подхода, базирующегося на анализе необходимых условий оптимальности, вопрос о строгой локальной оптимальности полученных в рамках экстремального подхода решений остается открытым. В частности, количество импульсов и ограничения на положение возможных точек их приложения задаются *a priori*, поскольку перебор всех импульсных схем перелета с различным количеством импульсов в рамках экстремального подхода вряд ли возможен. Кроме того, эффективность экстремального подхода значительно снижается при увеличении числа импульсов вследствие резкого увеличения числа варьируемых параметров. Однако, несмотря на указанные недостатки, экстремальный подход, по-видимому, наиболее удобен для получения первоначальной информации о характерных особенностях рациональных оптимальных траекторий, и решения, полученные в его рамках, могут быть использованы в качестве начальных приближений для определения с использованием вариационного подхода траекторий, удовлетворяющих необходимым условиям оптимальности.

Импульсная аппроксимация применительно к сформулированной общей вариационной проблеме означает введение в рассмотрение различных систем дифференциальных уравнений, описывающих движение аппарата вдоль активных и пассивных дуг траектории. Для активных дуг имеем

$$\begin{cases} \dot{\vec{v}} = \frac{p(u, w, q_i)}{m}, \dot{\vec{m}}_u = -u, \dot{\vec{m}}_w = -w, \dot{\vec{m}}_l = -q_i. \end{cases} \quad (2.94)$$

В соответствии с допущениями импульсной аппроксимации движение аппарата при каждом импульсе происходит по прямой, совпадающей с направлением вектора тяги; в бессиловом поле — под действием только реактивной силы. При этом в число «медленных» переменных, остающихся неизменными по величине, кроме радиуса-вектора центра масс аппарата в рассматриваемом случае включаются масса рабочих веществ СОЖ и обобщенная работа системы регенерации СОЖ  $t_i$ .

На пассивных участках меняются только «медленные» переменные и накапливается инертная масса, при этом динамическая часть задачи представлена классическими уравнениями задачи двух тел:

$$\begin{cases} \dot{\bar{r}} = \bar{v}, \\ \dot{\bar{v}} = -k \frac{\bar{r}}{r^3}, \\ \dot{m}_q = -q(1-\eta\varphi), \\ \dot{m}_i = \omega q(1-\eta\varphi). \end{cases} \quad (2.95)$$

Для обоснования применимости экстремального подхода необходимо показать, что величину начальной массы космического аппарата, являющуюся минимизируемым функционалом исходной вариационной задачи (2.1) — (2.8) можно представить в виде (2.93). С этой целью относительно управляемых функций системы регенерации СОЖ будет предполагаться следующее:

$$\varphi(t) = 1, \omega(t) = 1, t \in [0, T], \quad (2.96)$$

то есть предполагается, что система регенерации отходов СОЖ работает в течение всего времени перелета, и вся нерегенерируемая часть отходов СОЖ используется в качестве пневматической массы, ускоряемой за счет энергии реактивной струи ракетного двигателя на активных участках.

Очевидно, эти допущения нуждаются в дополнительных пояснениях. Анализ управляемых функций СОЖ показал, что оптимальные значения функций  $\varphi(t)$ ,  $\omega(t)$  вдоль регулярных дуг принадлежат границе прямоугольника  $[0, 1] \times [0, 1]$ . При этом сочетание возможных режимов  $\omega(t) = 0$ ,  $\omega(t) = 1$ ,  $\varphi(t) = 0$ ,  $\varphi(t) = 1$  на оптимальной траектории удается выяснить только в процессе численного решения конкретной оптимизационной задачи. Таким образом, даже если отказаться от рассмотрения возможности включения в состав оптимальной траектории особых участков, анализ которых, как показано там же, сопряжен с принципиальными трудностями, вопрос о режиме работы управляемых функций СОЖ остается открытым. Выбор режима работы управлений СР (2.96) из множества оптимально допустимых оправдан, на наш взгляд, тем, что, во-первых, он является наиболее простым для практической реализации, а во-вторых, позволяет, как это будет показано ниже, ввести импульсную аппроксимацию оптимальной траектории КА.

Следуя [24], назовем указанные выше величины  $\{t_i, \bar{r}_i, \Delta v_i\}$ ,  $i = \overline{1, n}$  л-импульсной схемой перелета.

Предположения (2.96) приводят к тому, что величины массы СР и массы начального запаса рабочих веществ СОЖ, полностью определяются временем выполнения заданного динамического маневра:

$$m_r = \rho \eta^x q(1 + \mu T), \quad m_q(0) = q(1 - \eta)T. \quad (2.97)$$

Если дополнительно предполагать, что оптимальная траектория начинается и заканчивается активными участками, то  $T = t_n - t_1$ , и следовательно, величины  $m_r$  и  $m_q(0)$  однозначно определены выбором схемы перелета.

При фиксированной схеме перелета величины  $m_r$  и  $m_q(0)$  фиксированы, и задача оптимизации начальной массы космического аппарата сводится к минимизации топливных затрат на выполнение динамического маневра  $m_\mu$ , величина которых для заданной схемы перелета записывается в виде

$$m_\mu = \sum_{i=1}^n [(1 + \beta_u) \Delta m_u^i + (1 + \beta_w) \Delta m_w^i], \quad (2.98)$$

где  $\Delta m_u^i$  и  $\Delta m_w^i$  — величины затрат горючего и окислителя соответственно на единичном импульсе. Из вида формулы (2.98) следует, что задача минимизации топливных затрат на выполнение всего маневра при заданной схеме перелета эквивалентна минимизации топливных затрат на выполнение каждого единичного импульса. При этом оптимальные величины этих запасов полностью определяются выбором схемы перелета, что обосновывает возможность применения экстремального подхода для численного анализа импульсной аппроксимации исходной вариационной задачи. Действительно, начальная масса космического аппарата при использовании импульсной схемы перелета записывается в виде

$$m(0) = m_r + m_\mu + m_q(0) + m_i, \quad (2.99)$$

где величины  $m_u$ ,  $m_q(0)$  и  $m_r$  вычисляются по формулам (2.97), (2.98), и в силу приведенных выше рассуждений, представима в виде (2.93):

$$m(0) = m(t_i, \tilde{r}_i, \Delta \tilde{v}_i). \quad (2.100)$$

Отметим, что, в отличие от формулы (2.1), в формуле (2.99) величина полезной нагрузки  $m_x$  включает в себя величины масс ракетного двигателя и конструкций, зафиксированные при переходе к импульсной схеме перелета.

#### 2.4.2. Иерархическая структура алгоритма оптимизации межпланетной экспедиции.

Хорошо известно, что полностью разделить оптимизационную задачу механики космического полета на динамическую и параметрическую части удается лишь для наиболее простых математических моделей идеально регулируемых двигательных систем. В нашем случае подобное разделение стало возможным благодаря введению импульсной аппроксимации межпланетных траекторий КА. Основываясь на изложном выше экстремальном подходе, мы можем заменить исходную вариационную проблему трехуровневой иерархической структурой, включающей в себя: 1) задачу выполнения единичного импульса с минимальными массовыми затратами при заданных величинах полезной нагрузки, величины конечной скорости аппарата и накопленного к моменту приложения импульса запаса инертной массы (оптимизация единичного импульса); 2) задачу поиска минимума целевого функционала в пространстве параметров, определяющих траекторную импульсную схему межпланетного перелета с фиксированным количеством импульсов (оптимизация схемы перелета) и 3) задачу поиска минимума целевой функции в конечномерном пространстве массовых параметров СОЖ.

#### 2.4.3. Оптимизация единичного импульса.

При общепринятом использовании импульсной аппроксимации считается, что в момент импульса масса космического аппарата и вектор скорости его центра масс приобретают конечные приращения [24]. Величины потери массы топлива и приращения скорости аппарата считаются связанными классической формулой Циолковского. Используемая в настоящей работе обобщенная модель ракетного двигателя отличается учетом возможности независимого управления расходами компонентов топливной смеси ЖРД и инертной массы. В связи с этим возникает необходимость предварительного исследования задачи о наборе заданной скорости с минимальными топливными затратами.

Вариационная задача о выполнении КА, оснащенным химическим ракетным двигателем, работающим на двухкомпонентном топливе, динамического маневра набора заданной скорости с минимальными затратами топлива при фиксированной массе полезной нагрузки формулируется следующим образом. Как показано выше, допущение об импульсной аппроксимации активных участков при использовании двигателей большой тяги позволяет, во-первых, пренебречь на каждом импульсе действием гравитационных сил, а во-вторых — выделить среди первичных задач группы «быстро» и «медленно» изменяющихся параметров. Поэтому движение космического аппарата во время импульса можно рассматривать как прямолинейное движение материальной точки первичной массы, движущейся под действием реактивной силы в бесконечном поле. С учетом этого, система дифференциальных уравнений, описывающих динамику изменения величины скорости центра масс аппарата и «быстрых» массовых компонентов записывается в следующем виде:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{v}} = \frac{p_0(u, w)}{m} \sqrt{1 + \frac{q_i}{u+w}}, \\ \dot{m}_u = -u, \\ \dot{m}_w = -w, \\ \dot{m}_i = -q_i. \end{cases} \quad (2.101)$$

Легко видеть, что в отличие от системы (2.7) уравнения (2.101) не содержат выражений, зависящих от «медленных» переменных: радиуса-вектора центра масс, массы запаса рабочих веществ СОЖ аппарата, времени работы системы регенерации  $t_r$ .

Далее будем предполагать, что множество допустимых значений управляющих функций ракетного двигателя представляет собой полубесконечный параллелепипед в пространстве  $(u, w, q_i)$ :

$$U = \{0 \leq u \leq u_0, 0 \leq w \leq w_0, 0 \leq q_i \leq \infty\}. \quad (2.102)$$

В соответствии с обоснованной выше редукцией множества допустимых управлений ракетного двигателя до множества оптимально допустимых, можно считать, что вектор оптимального управления принадлежит границе множества  $U$ . Следуя [30], предполагаем, что тяга ракетного двигателя  $p_0(u, w)$  есть квадратичная функция расхода горючего при фиксированной величине расхода окислителя:

$$p_0(u, w) = p_0(u, w_0) = \alpha + 2\beta u - \beta u^2, \alpha > 0, \beta > 0, \alpha + \beta = 1. \quad (2.103)$$

С учетом (2.103) систему (2.101) перепишем в виде

$$\begin{cases} \dot{v} = \frac{p_0(u, w_0)}{m} \sqrt{1 + \frac{q_i}{u + w_0}}, \\ \dot{m}_u = -u, \\ \dot{m}_w = -w_0, \\ \dot{m}_i = -q_i. \end{cases} \quad (2.104)$$

Рассматриваемый динамический маневр космического аппарата состоит в наборе фиксированной по величине конечной скорости при нулевой начальной:

$$v(0) = 0, v(T) = v_f - fix, \quad (2.105)$$

где время выполнения единичного импульса  $T$  не фиксировано.

Предполагается, что начальная масса аппарата состоит из массы полезной нагрузки, начальных запасов горючего и окислителя с учетом массовых затрат на их транспортировку и начального запаса инертной массы, фиксируемого при постановке:

$$m(0) = m_p + (1 + \beta_u)m_u(0) + (1 + \beta_w)m_w(0) + m_i(0), m_p = fix, m_i(0) = fix. \quad (2.06)$$

Запасы топливных компонентов и инертной массы расходуются при импульсе полностью:

$$m_u(T) = m_w(T) = m_i(T) = 0, \quad (2.107)$$

с учетом чего конечная масса аппарата записывается в виде

$$m(T) = m_p + \beta_u m_u(0) + \beta_w m_w(0).$$

Оптимизационная задача о выполнении единичного импульса с минимальными массовыми затратами формулируется в терминах задачи Майера оптимального управления следующим образом: необходимо определить управляющие функции  $u(t), q_i(t)$  со значениями из множества  $U$  и соответствующие траектории системы (2.104), удовлетворяющие красивым условиям (2.105) — (2.107), доставляющие минимум функционалу

$$I = (1 + \beta_u)m_u(0) + (1 + \beta_w)m_w(0). \quad (2.108)$$

Проведем анализ оптимального управления расходом горючего и инертной массы, следуя процедуре принципа максимума Понтрягина. Обозначив  $q_0 = u + w_0$ , запишем гамильтониан задачи в виде

$$H = \psi_v \frac{P_0}{m} \sqrt{1 + \frac{q_i}{q_0}} - \psi_u u - \psi_w w_0 - \psi_i q_i. \quad (2.109)$$

Система для сопряженных функций

$$\dot{\psi}_v = 0, \dot{\psi}_u = \dot{\psi}_w = \dot{\psi}_i = \psi_v \frac{P_0}{m^2} \sqrt{1 + \frac{q_i}{q_0}} \quad (2.110)$$

имеет первые интегралы

$$\psi_v = C_v, \psi_u - \psi_w = C_u, \psi_w - \psi_i = C_i. \quad (2.111)$$

Запишем условия трансверсальности в форме Летова [35]:

$$\pm \delta l - H \delta t + \psi^T \delta x \Big|_0^T = 0.$$

В рассматриваемой задаче они принимают следующий вид:

$$(1 + \beta_u) \delta m_u(0) + (1 + \beta_w) \delta m_w(0) - H(T) \delta T + H(0) \delta(0) + \psi_v(T) \delta v(T) - \psi_v(0) \delta v(0) + \psi_u(T) \delta m_u(T) - \psi_u(0) \delta m_u(0) + \psi_w(T) \delta m_w(T) - \psi_w(0) \delta m_w(0) + \psi_i(T) \delta m_i(T) - \psi_i(0) \delta m_i(0) = 0.$$

Из граничных условий следует

$$\delta m_u(T) = \delta m_w(T) = \delta v(T) = \delta v(0) = \delta m_i(T) = \delta m_i(0) = 0,$$

с учетом чего

$$(1 + \beta_u) \delta m_u(0) + (1 + \beta_w) \delta m_w(0) - H(T) \delta T - \psi_u(0) \delta m_u(0) - \psi_w(0) \delta m_w(0) = 0.$$

Поскольку вариации  $\delta m_u(0), \delta m_w(0), \delta T$  линейно независимы, в силу автономности системы (2.104), необходимо должны выполняться равенства

$$H = 0, \psi_u(0) = 1 + \beta_u, \psi_w(0) = 1 + \beta_w. \quad (2.112)$$

Оптимальные значения управляющих функций  $u(t), q_i(t)$ , принадлежащие внутреннему ядру множества допустимых управлений  $U$ , могут быть найдены из условий стационарности функции  $H$ :

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \frac{\psi_v}{m} \left\{ p'_0(u, w_0) \sqrt{1 + \frac{q_i}{q_0}} - p_0(u, w_0) \frac{q_i}{2q_0^2 \sqrt{1 + \frac{q_i}{q_0}}} \right\} - \psi_u = 0, \quad (2.113)$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = \frac{\psi_v}{2m} - \frac{p_0(u, w_0)}{q_0 \sqrt{1 + \frac{q_i}{q_0}}} - \psi_i = 0. \quad (2.114)$$

Для того чтобы стационарная точка была точкой максимума функции двух переменных, необходимо, чтобы матрица, составленная из вторых производных функции  $H$  была отрицательно определена. Согласно критерию Сильвестра, для этого достаточно выполнение следующих неравенств:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H}{\partial q_i^2} &< 0, \\ D &= \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial q_i^2} - \left( \frac{\partial^2 H}{\partial u \partial q_i} \right)^2 > 0. \end{aligned} \quad (2.115)$$

В нашем случае имеем

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = \frac{\psi_v}{m} \sqrt{1 + \frac{q_i}{q_0}} \left\{ \frac{\partial^2 p_0}{\partial u^2} - \frac{\partial p_0}{\partial u} \frac{q_i}{q_0(q_0 + q_i)} + p_0 \frac{q_i(3q_i + 4q_0)}{4q_0^2(q_0 + q_i)^2} \right\},$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial q_i^2} = -\frac{\psi_v}{m} \sqrt{1 + \frac{q_i}{q_0}} \frac{p_0}{4(q_0 + q_i)^2}, \quad (2.116)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u \partial q_i} = \frac{\psi_v}{m} \sqrt{1 + \frac{q_i}{q_0}} \left\{ \frac{\partial p_0}{\partial u} \frac{1}{2(q_0 + q_i)} - p_0 \frac{(q_i + 2q_0)}{4q_0(q_0 + q_i)^2} \right\},$$

откуда

$$D = -\frac{\psi_v^2}{m^2} \frac{1}{4q_0^3(q_0 + q_i)} \left\{ p_0^2 - 2q_0 p_0 \frac{\partial p_0}{\partial u} + q_0^2 \left[ p_0 \frac{\partial^2 p_0}{\partial u^2} + \left( \frac{\partial p_0}{\partial u} \right)^2 \right] \right\}. \quad (2.117)$$

Поскольку на всем импульсе, очевидно, выполняется  $p_0 > 0$ , первое из условий (2.115), как легко видеть из соотношений (2.116), всегда выполняется. Из вида выражения (2.117) следует, что для существования в стационарной точке функции  $H$  максимума необходимо и достаточно, чтобы выражение в фигурных скобках (2.117) было отрицательным. Выполнение этого условия в достаточно широком диапазоне изменения оптимальных значений расхода горючего  $u^{opt}$  гарантирует следующее утверждение.

**Утверждение 2.3.** Если значение  $u^{opt}$ , являющееся корнем уравнения (2.113), принадлежит интервалу  $(u_p, u_r)$ , где  $u_p, u_r$  — расходы горючего, соответствующие максимуму скорости истечения и максимуму тяги ракетного двигателя при фиксированном значении расхода окислителя без активного сброса инертной массы, то в точке  $(u^{opt}, q_i^{opt})$ , удовлетворяющей условиям стационарности (2.113) и (2.114) функция  $H$  достигает максимума.

Предположим доказательству утверждения 2.3 несколько замечаний. Прежде всего необходимо отметить, что определение интервала  $(u_p, u_r)$  корректно, поскольку для большинства применявшихся на практике топливных смесей ЖРД максимум тяги при фиксированной величине расхода окислителя достигается при бо́льших значениях расхода горючего по сравнению с тем, который доставляет максимум скорости истечения реактивной струи. Во всяком случае, это справедливо для сочетания водород+кислород, являющегося наиболее вероятным кандидатом на роль рабочего тела ЖРД для первых пилотируемых экспедиций к Марсу. Анализ [30] оптимального управления расходами двухкомпонентного топлива для случая, когда сброс инертной массы через двигатель не предусмотрен, показал, что оптимальные значения расхода горючего на активных участках не покидают указанного отрезка. Как будет показано ниже, в случае, когда активный сброс инертной массы за счет энергии реактивной струи возможен, это не так, т. е. возможно попадание значения  $u^{opt}$  внутрь отрезка  $[0, u_p]$ , причем определяющим является знак разности величин баковых коэффициентов. Поскольку расходы горючего, превышающие величину, доставляющую максимум тяги, явно неоптимальны, то при определении области допустимых управлений  $U$  разумно полагать  $u_0 = u_p$ , с учетом чего сумма двух вышеназванных отрезков покрывает весь диапазон возможных значений  $u$ .

#### Доказательство:

Обозначим выражение в фигурных скобках неравенства (2.117) через  $E$ . В силу сделанного выше замечания достаточно показать, что для значений  $u$ , принадлежащих интервалу  $(u_p, u_r)$ , выполняется  $E < 0$ . Для доказательства используем тот факт, что скорость истечения реактивной струи при отсутствии частиц инертной массы в потоке  $V_0(u, w_0)$  как функция расхода горючего при фиксированном расходе окислителя является унимодальной и выпуклой вверх [3]. Поэтому справедливо неравенство

$$\frac{\partial^2 V_0(u, w_0)}{\partial u^2} < 0, \quad (2.118)$$

которое с учетом известного соотношения, связывающего скорость истечения с тягой,

$$p_0 = V_0 q_0 \quad (2.119)$$

может быть переписано в виде

$$\frac{1}{q_0} \left\{ q_0^3 \frac{\partial^2 p_0}{\partial u^2} - 2q_0 (q_0 \frac{\partial p_0}{\partial u} - p_0) \right\} < 0. \quad (2.120)$$

Из (2.120) легко следует

$$2q_0 \frac{\partial p_0}{\partial u} > 2p_0 + q_0^2 \frac{\partial^2 p_0}{\partial u^2}. \quad (2.121)$$

С учетом неравенства (2.118) имеем

$$E < p_0^2 - p_0 (2p_0 + q_0^2 \frac{\partial^2 p_0}{\partial u^2}) + q_0^2 (p_0 \frac{\partial^2 p_0}{\partial u^2} + (\frac{\partial p_0}{\partial u})^2),$$

или, после приведения подобных,

$$E < q_0^2 (\frac{\partial p_0}{\partial u})^2 - p_0^2 = (q_0 \frac{\partial p_0}{\partial u} - p_0)(q_0 \frac{\partial p_0}{\partial u} + p_0). \quad (2.122)$$

Так как знак правой части неравенства (2.122) совпадает со знаком производной скорости истечения по  $u$ , то на интервале  $(u_V, u_P)$  имеем  $E < 0$ , что и требовалось доказать.

Для нахождения оптимальных значений управляющих функций  $u(t), q_i(t)$  подставим в первый интеграл  $H = 0$  выражения для сопряженных функций  $\psi_w, \psi_i$ , полученные из соотношений (2.113), (2.114). С учетом (2.111) имеем

$$\frac{\psi_v}{m} \sqrt{1 + \frac{q_i}{q_0} \{ p_0 - q_0 \frac{\partial p_0}{\partial u} \}} = S, \quad (2.123)$$

где  $S = C_w w_0$ . Первый интеграл (2.123) дает возможность определить интервал, в котором находится оптимальное значение расхода горючего. Действительно, знак выражения в фигурных скобках (2.123) противоположен знаку производной скорости истечения по  $u$ , поэтому в случае  $C_u < 0$  оптимальные значения лежат левее точки максимума скорости истечения:  $u^{opt} \in (0, u_V)$ . Напротив, при  $C_u > 0$  выполняется  $u^{opt} \in (u_V, u_0)$ . Величина константы  $C_u$  определяется из условий трансверсальности (2.112):

$$C_u = \psi_w(0) - \psi_u(0) = \beta_w - \beta_u. \quad (2.124)$$

Тем самым доказано следующее утверждение.

Утверждение 2.4. Диапазон оптимальных значений расхода горючего при активном сбросе инертной массы через ЖРД определяется знаком разности величин баковых коэффициентов горючего и окислителя, а именно,

$$u^{opt} \in \begin{cases} (0, u_V), \beta_w - \beta_u < 0, \\ (u_V, u_P), \beta_w - \beta_u > 0. \end{cases} \quad (2.125)$$

В случае равенства величин баковых коэффициентов, из (2.123) следует, что оптимальным является расход горючего, доставляющий максимум скорости истечения.

Из первого интеграла (2.123) можно получить выражение для нахождения оптимальных значений расхода инертной массы:

$$q_i^{opt} = (S_1^2 m^2 - 1)q_0, \quad S_1 = \frac{S}{\psi_v \{ p_0(u, w_0) - p_0(u, w_0) \}}. \quad (2.126)$$

Вычитая из (2.114) из (2.113), с учетом (2.11) будем иметь

$$\frac{\psi_e}{m} \sqrt{1 + \frac{q_i}{q_0}} \frac{2p'_0(u, w_0)q_0 - p_0(u, w_0)}{2q_0} = C_{iu}, C_{iu} = C_i - C_u. \quad (2.127)$$

В совокупности соотношения (3.31), (3.35) приводят к уравнению

$$2q_0 p'_0(S + C_{iu} q_0) - p_0(S + 2C_{iu} q_0) = 0, \quad (2.128)$$

решением которого является оптимальное значение расхода горючего, являющееся, как следует из вида уравнения, постоянным на участке активного сброса инертной массы через двигатель:  $u^{opt} = u^{opt}(C_i, C_u)$ .

Анализ, проведенный выше, позволяет записать следующие формулы для определения оптимальных значений управляемых функций  $q_i(t)$  и  $u(t)$ :

$$q_i(t) = \begin{cases} q_i^{opt}, & q_i^{opt} > 0, m_i(t) > 0, \\ 0, & q_i^{opt} < 0, m_i(t) = 0. \end{cases} \quad (2.129)$$

$$u(t) = \begin{cases} u_0, & u^{opt} \geq u_0, \\ u^{opt}, & 0 \leq u^{opt} \leq u_0, \\ 0, & u^{opt} < 0. \end{cases} \quad (2.130)$$

Здесь величина  $u^{opt}$  соответствует тому корню уравнения (2.128), который доставляет наибольшее значение гамильтониану задачи, величина  $q_i^{opt}$  определяется из соотношения (2.126). Из физических соображений понятно, что некоторые из возможных сочетаний значений управляемых функций, определяемых соотношениями (2.129), (2.130), заведомо неоптимальны на импульсах. Действительно, к таковым относятся, во-первых, режим  $q_i = \infty$ , соответствующий мгновенному неускоренному сбросу инертной массы, неоптимальность которого показана в работе [48], во-вторых, режим  $q_i = 0$  при  $m_i > 0$ , неоптимальность которого очевидна. Принимая во внимание эти соображения, можно сделать вывод о том, что оптимальная траектория в общем случае может состоять из дуг двух типов:

1)  $u(t) = u^{opt}$ ,  $q_i(t) = q_i^{opt}$  и 2)  $u(t) = u_i^{opt}$ ,  $q_i(t) = 0$ .

Здесь дуга типа 2 соответствует полету аппарата после того как запас инертной массы полностью израсходован. Соотношения для нахождения оптимального значения расхода горючего для этого случая получены в работе [30]:

$$u_i^{opt} = -w_0 + \sqrt{\gamma + \sigma m}, \text{ где } \gamma = w_0^2 + 2w_0 - \frac{\alpha}{\beta}, \sigma = \frac{S}{\psi_e \beta}. \quad (2.131)$$

Таким образом, оптимальная траектория может либо являться дугой типа 1, либо быть совокупностью двух дуг 1-го и 2-го типа соответственно. В первом случае активный сброс инертной массы имеет место на всей траектории полета, во втором случае момент израсходования запаса инертной массы наступает раньше момента выполнения краевых условий маневра, что обуславливает необходимость включения участка полета с использованием только топливных компонентов.

Полученные выше соотношения для нахождения оптимальных значений управляемых функций  $u(t), q_i(t)$  позволяют проинтегрировать систему (2.104) вдоль дуг типа I в элементарных функциях. Имеем

$$v_1 = \frac{p_0(u^{opt}, w_0)}{S_1(u^{opt} + w_0)} \left\{ \frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_0} \right\}, \quad m_1^1 = \frac{w_0}{S_1^2(u^{opt} + w_0)} \left\{ \frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_0} \right\},$$

$$m_u^1 = \frac{u^{opt}}{w_0} m_w^1, \quad m_i^0 = m_0 - m_i - \frac{1}{S_1^2} \left\{ \frac{1}{m_i} - \frac{1}{m_0} \right\}. \quad (2.132)$$

Здесь  $v_i$  — скорость аппарата в конечной точке рассматриваемого участка оптимальной траектории,  $m_u^1$  и  $m_w^1$  — величины израсходованных запасов горючего и окислителя соответственно,  $m_0$  — начальная масса аппарата, определяемая формулой (2.106),  $m_i$  — масса аппарата в момент израсходования запаса инертной массы  $m_i^0$ :

$$m_i = m_0 - m_u^1 - m_w^1 - m_i^0. \quad (2.133)$$

Отметим, что в силу установленного постоянства оптимального значения расхода горючего при ненулевом значении текущего запаса инертной массы, величина тяги ЖРД без активного сброса инертной массы вдоль дуг типа 1 также постоянна и, в соответствии с (2.103), вычисляется по формуле

$$p_0(u^{opt}, w_0) = \alpha + 2\beta u^{opt} - \beta(u^{opt})^2.$$

Вдоль дуг типа 2 система (2.103) проинтегрирована в [30]:

$$v_2 = 2\beta(1+w_0) \ln \frac{m_1}{m_f} - 2\beta\sqrt{\gamma} \ln \frac{(\sqrt{\gamma+\delta m_1} - \sqrt{\gamma})(\sqrt{\gamma+\delta m_2} + \sqrt{\gamma})}{(\sqrt{\gamma+\delta m_1} + \sqrt{\gamma})(\sqrt{\gamma+\delta m_2} - \sqrt{\gamma})} - 2\beta(\sqrt{\gamma+\delta m_1} - \sqrt{\gamma+\delta m_2}),$$

$$m_w^2 = \frac{2w_0}{\sigma} (\sqrt{\gamma+\delta m_1} - \sqrt{\gamma+\delta m_2}), \quad m_u^2 = m_1 - m_2 - m_w^2. \quad (2.134)$$

В соотношениях (2.134) величины  $v_2$ ,  $m_u^2$  и  $m_w^2$  имеют тот же смысл, что и  $v_i$ ,  $m_u^1$  и  $m_w^1$  в (2.132),  $m_2$  — конечная масса аппарата.

Если вся оптимальная траектория является дугой типа 1, то используя интегралы (2.132) и выражение для сопряженной функции  $\psi_u(t)$  на оптимальной траектории:

$$\psi_u(t) = C_v S_1 \left\{ p_0' + \frac{p_0}{2q_0} \left( \frac{1}{S_1 m^2} - 1 \right) \right\} \quad (2.135)$$

условие трансверсальности  $\psi_u(0) = 1 + \beta_u$ , можно выписать полную систему алгебраических уравнений для определения неизвестных  $C_v$ ,  $u^{opt}$ ,  $m_w^1$ ,  $m_u^1$ :

$$v_f = \frac{p_0(u^{opt}, w_0)}{S_1(u^{opt} + w_0)} \left\{ \frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_0} \right\}, \quad m_w^1 = \frac{w_0}{S_1^2(u^{opt} + w_0)} \left\{ \frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_0} \right\},$$

$$m_u^1 = \frac{u^{opt}}{w_0} m_w^1, \quad C_v S_1 \left\{ p_0' + \frac{p_0}{2q_0} \left( \frac{1}{S_1 m^2} - 1 \right) \right\} = 1 + \beta_u. \quad (2.136)$$

Если оптимальная траектория состоит из сочетания дуги типа 1 с дугой типа 2, то для составления азрешающей системы алгебраических уравнений используются соотношения (2.132) — (2.134) и условие беспрерывности сопряженной функции  $\psi_u(t)$  в момент переключения участков. Выражение для  $\psi_u(t)$  вдоль дуг типа 2 заимствовано в [30]:

$$\psi_u(t) = \frac{2C_v \beta}{m} (1 + w_0 - \sqrt{\gamma + \sigma m}).$$

Неизвестные задачи, к числу которых в случае двух участков добавляются  $m_1$ ,  $m_w^2$  и  $m_w^2$ , находятся из следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} v_f &= \frac{p_0(u^{opt}, w_0)}{S_1(u^{opt} + w_0)} \left\{ \frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_0} \right\} + 2\beta(1+w_0) \ln \frac{m_1}{m_f} - \\ &- 2\beta\sqrt{\gamma} \ln \frac{(\sqrt{\gamma+\sigma m_1} - \sqrt{\gamma})(\sqrt{\gamma+\sigma m_2} + \sqrt{\gamma})}{(\sqrt{\gamma+\sigma m_1} + \sqrt{\gamma})(\sqrt{\gamma+\sigma m_2} - \sqrt{\gamma})} - 2\beta(\sqrt{\gamma+\sigma m_1} - \sqrt{\gamma+\sigma m_2}), \\ m_w^1 &= \frac{w_0}{S_1^2(u^{opt} + w_0)} \left\{ \frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_0} \right\}, \quad m_w^1 = \frac{u^{opt}}{w_0} m_w^1, \quad C_v S_1 \{ p'_0 + \frac{p_0}{2q_0} \left( \frac{1}{S_1 m_1^2} - 1 \right) \} = 1 + \beta_a, \\ C_v S_1 \{ p'_0 + \frac{p_0}{2q_0} \left( \frac{1}{S_1 m_1^2} - 1 \right) \} &= \frac{2C_v\beta}{m_1} (1 + w_0 - \sqrt{\gamma + \sigma m_1}), \\ m_w^2 &= \frac{2w_0}{\sigma} (\sqrt{\gamma + \sigma m_1} - \sqrt{\gamma + \sigma m_2}), \quad m_w^2 = m_1 - m_2 - m_w^2. \end{aligned} \quad (2.137)$$

Нахождение неизвестных переменных из системы (2.136) или (2.137) завершает решение задачи оптимизации единичного импульса в случае использования ЖРД. Первые соотношения формул (2.136) и (2.137), с учетом остальных соотношений указанных формул, обобщают классическую формулу Циолковского на случай рассматриваемого жидкостного ракетного двигателя с независимым управлением расходами компонентов топливной смеси, ограниченными неравенствами (2.102), тяга которого аппроксимируется формулой (2.103) и может быть увеличена путем ускорения инертной массы за счет энергии реактивной струи.

Рассмотрим также выполнение описанного выше маневра аппаратом, оснащенным тепловым ядерным двигателем, модифицированным для возможности ускоренного сброса инертной массы на активных участках. В отличие от ЖРД, рабочее тело не является источником мощности ЯТРД, что позволяет использовать для создания тяги инертную массу без основного рабочего тела ЯТРД. Общий анализ, проведенный выше, показал, что вдоль регулярных дуг оптимальных траекторий КА на активных участках оптимальные управление ЯТРД, в качестве которых выбираются величины давления в камере горения  $p_0$ , температуры диссоциированного газового потока  $T$  и индекс используемого рабочего тела (основное рабочее тело или инертная масса)  $\delta$ , принимают граничные значения.

Постановка задачи оптимального управления о выполнении одного импульса с минимальными массовыми затратами при использовании ЯТРД практически совпадает с приведенной для жидкостного ракетного двигателя. Меняются только вид минимизируемого функционала, в котором в силу использования однокомпонентного рабочего тела отсутствует член  $(1 + \beta_w)m_w(0)$ , и также вид функциональных зависимостей скорости истечения, единичного массового расхода рабочего тела и тяги ЯТРД:

$$V_k = \xi_1 \sqrt{\frac{T}{\mu_k}}, \quad q_k = \xi_2 p_0 \sqrt{\frac{\mu_k}{T}}, \quad P_k = q_k V_k, \quad k \in \{0, i\}. \quad (2.138)$$

Здесь индекс 0 соответствует случаю использования основного рабочего тела,  $i$  — инертной массы,  $\xi_1$  и  $\xi_2$  — константы, определяющие геометрические характеристики реактивного сопла ЯТРД.

Из формул (2.138) следует, что связь между скоростями истечения реактивной струи при использовании основного рабочего тела ЯТРД и инертной массы соответственно записывается в виде

$$V_i = V_0 \sqrt{\frac{\mu_0}{\mu_i}} \quad (2.139)$$

В силу граничности значений оптимальных управлений ЯТРД величины скорости истечения для обоих указанных вариантов рабочего тела фиксированы, поэтому для нахождения массовых затрат основного рабочего тела на достижение заданной конечной скорости КА используется классическая формула Циолковского. При этом, как было установлено при общем анализе управляющих функций ЯТРД, возможными являются следующие режимы работы на активных участках.

Режим 1. В качестве рабочего тела используется только инертная масса. Это означает, что накопленного к началу активного участка запаса инертной массы  $m_i^0$  достаточно для набора заданной конечной скорости  $v_f$ . Для этого необходимо должно выполняться следующее условие:

$$\frac{m_p(1-\delta) + m_i^0}{\delta} \geq 0, \quad (2.140)$$

где  $\delta = \exp(\frac{v_f}{V_i})$ ,  $m_p$  — масса полезной нагрузки на единичном импульсе. В этом случае начальный запас рабочего тела равен нулю, и масса аппарата до и после активного участка записывается в виде

$$m(0) = m_p + m_i^0, \quad m(t_f) = m_p, \quad (2.141)$$

где  $t_f$  — длительность активного участка.

Режим 2. Условие (2.140) не выполнено. Это означает, что после полного израсходования инертной массы используется рабочее тело. В этом случае начальный запас рабочего тела  $m_u(0)$  находится из формулы Циолковского:

$$v_f = V_i \ln \frac{m(0)}{m_i} + V_0 \ln \frac{m_i}{m(t_f)}, \quad (2.142)$$

где

$$m(0) = m_p + (1 + \beta_u)m_u(0) + m_i^0, \quad m_i = m_p + (1 + \beta_u)m_u(0), \quad m(t_f) = m_p + \beta_u m_u(0). \quad (2.143)$$

Режим 3. Используется только основное рабочее тело ЯТРД, т. е. величина запаса инертной массы к началу активного участка равна нулю. В этом случае начальный запас рабочего тела  $m_u(0)$  также находится из формулы Циолковского:

$$v_f = V_0 \ln \frac{m(0)}{m(t_f)}, \quad (2.144)$$

где

$$m(0) = m_p + (1 + \beta_u)m_u(0), \quad m(t_f) = m_p + \beta_u m_u(0). \quad (2.145)$$

### III. КАК МЫ ПОЛЕТИМ ТАКИ НА МАРС!

Использование двигателей большой тяги, как показано в предыдущей главе, позволяет ввести импульсную аппроксимацию межпланетных траекторий, что в свою очередь существенно упрощает процедуру решения исходной оптимизационной задачи. В данной работе рассматриваются только четырехимпульсные схемы перелета Земля-Марс с возвращением. Отказ от исследования схем, включающих маневры на пассивных участках, объясняется не только тем, что вдоль этих участков ускоренный сброс инертной массы невозможен, но и тем, что, на наш взгляд, включение этих маневров в схему первых марсианских экспедиций не целесообразно, поскольку отсутствие достаточного опыта их проведения и абсолютно надежных данных об особенностях атмосферы Марса накладывает дополнительные требования к обеспечению безопасности экипажа.

#### 3.1. Вариационная задача о выполнении перелета Земля — Марс с возвращением

Четырехимпульсные межпланетные траектории пилотируемого космического аппарата будем изучать в рамках плоской круговой модели движения планет Солнечной системы, являющейся удачным приближением для начальных оценок [24]. Помимо близости характеристик оптимальных перелетов при использовании пространственной эллиптической и плоской круговой моделей, последняя позволяет указать основные их параметры в универсальном, не связанном с конкретными датами виде.

Аналогично [24], с использованием принятой плоской круговой модели движения планет, будем рассматривать перелет КА с орбиты ИСЗ на орбиту ИСМ при таких предположениях:

- 1.<sup>0</sup> Орбиты планет старта и назначения являются плоскими круговыми орбитами, лежащими в плоскости эклиптики.
- 2.<sup>0</sup> Оптимальная траектория аппарата лежит в плоскости орбиты планет.
- 3.<sup>0</sup> Движение аппарата рассматривается только на гелиоцентрическом участке.
- 4.<sup>0</sup> Начальная и конечная точки дуги перелета совпадают с центрами соответствующих планет.
- 5.<sup>0</sup> Переход между орбитой искусственного спутника и сферой влияния планет представляет собой оптимальный одноимпульсный перелет.

Гипотезы 3<sup>0</sup>, 4<sup>0</sup>, 5<sup>0</sup> соответствуют модифицированному методу сфер влияния (ММСВ) [24], который широко используется при решении задач построения и оптимизации межпланетных траекторий. В соответствии с ММСВ, общая оптимизационная задача о перелете между планетами старта и назначения разбивается на «внутреннюю» и «внешнюю», где под внутренней понимается задача определения траекторий аппарата в сфере влияния планет, а под внешней — в гравитационном поле Солнца (вне сфер влияния планет старта и назначения). Принятые гипотезы 3<sup>0</sup>, 4<sup>0</sup> соответствуют тому, что при оптимизации траекторий Земля — Марс с возвращением будут рассматриваться лишь решения внутренней задачи в предположении о том, что решение задачи про оптимальный переход орбита ИС — сфера влияния планеты известно. Остановимся подробнее на гипотезе 5. В соответствии с [24] в случае круговых орбит ИС планет, оптимальным плоским одноимпульсным перелетом орбита ИС — сфера влияния является перелет с импульсом, приложенным вperiцентре планетоцентрической гиперболы в направлении круговой скорости аппарата на орбите. При этом величина импульса скорости КА вычисляется по формуле

$$dV = V_c (\sqrt{2 + \zeta} - 1), \zeta = \frac{R_c}{a}, \quad (3.1)$$

где  $R_c$  — радиус круговой орбиты ИС,  $a$  — действительная полуось планетоцентрической гиперболы,  $V_c$  — круговая скорость КА на орбите радиуса  $R_c$ . В свою очередь величина  $a$  задается соотношением

$$a = \frac{\mu_p}{V_{sp}^2 - 2 \frac{\mu_p}{R_{sp}}}, \tilde{V}_{sp} = \tilde{V}_v - \tilde{U}_p, \quad (3.2)$$

где  $\bar{V}_v$  и  $\bar{U}_p$  — гелиоцентрические скорости КА и планеты в момент подлета аппарата к планете либо отлета от нее,  $R_{sp}$  — величина радиуса сферы влияния планеты,  $\mu_p$  — ее гравитационная постоянная. Таким образом, величина необходимого прироста скорости КА для перехода с орбиты ИС на сферу влияния планеты однозначно определяется величинами  $\bar{V}_v$  и  $\bar{U}_p$ , которые либо задаются либо вычисляются при построении оптимальных траекторий КА на гелиоцентрических участках полета.

Как было показано в предыдущем разделе, введение импульсной аппроксимации межпланетного перелета с фиксированным количеством импульсов позволяет свести исходную оптимизационную задачу о выполнении заданного маневра к иерархии двух задач: внутренней и внешней, понимая под внутренней задачу о выполнении единичного импульса, а под внешней — нахождение минимума целевой функции исходной задачи в конечномерном пространстве переменных  $\{t_i, \bar{r}_i, \Delta\bar{v}_i\}$ , задающих момент приложения каждого импульса, радиус-вектор и прирост скорости аппарата в этот момент. В отличие от нерегулируемых двигателей большой тяги, для которых массовые расходы на каждом активном участке полета могут быть найдены по формуле Циолковского, в нашем случае внутренняя задача есть задача оптимального управления расходами компонентов топлива и инертной массы с целью достижения заданной величины конечной скорости аппарата с минимальными расходами топлива при фиксированных величинах полезной нагрузки и начального запаса инертной массы. Задача оптимизации единичных импульсов с использованием химических и ядерных ЖРД решена в главе 2.

Система дифференциальных уравнений внешней задачи

$$\begin{cases} \dot{\bar{r}} = \bar{v}, \\ \dot{\bar{v}} = -k \frac{\bar{r}}{r^3}, \\ \dot{m}_q = -q(1-\eta), \\ \dot{m}_i = q(1-\eta). \end{cases} \quad (3.3)$$

является частным случаем системы (2.7), отвечающим движению КА в центральном ньютоновском поле. Смысл дополнительных упрощений

$$\varphi = 1, \omega = 1, \quad (3.4)$$

сделанных при записи (3.3), состоит в том, что система регенерации работает в течение всего времени перелета, и все отходы СОЖ, непригодные для регенерации, накапливаются в виде инертной массы для дальнейшего ускоренного сброса во время импульсов тяги (см. главу 2).

Конкретизация исходной вариационной задачи для случая четырехимпульсного перелета Земля — Марс с возвращением обеспечивается введением краевых условий рассматриваемого динамического маневра.

Обозначим через  $t_0, t_1, t_2, t_3$  соответственно моменты старта аппарата с орбиты спутника Земли, выхода на орбиту ИС Марса, старта с ИСМ и возвращения на орбиту ИСЗ. Тогда краевые условия четырехимпульсного перелета ИСЗ — ИСМ с возвращением записываются так:

$$\bar{r}(t_0) = \bar{r}_e(t_0), \bar{v}(t_0) = \bar{v}_e(t_0), \bar{r}(t_1) = \bar{r}_m(t_1), \bar{v}(t_1) = \bar{v}_m(t_1), \bar{r}(t_2) = \bar{r}_m(t_2), \bar{v}(t_2) = \bar{v}_m(t_2), \bar{r}(t_3) = \bar{r}_e(t_3), \bar{v}(t_3) = \bar{v}_e(t_3). \quad (3.5)$$

Здесь  $\bar{r}_e(t_i), \bar{v}_e(t_i), \bar{r}_m(t_i), \bar{v}_m(t_i)$  — радиусы-векторы и скорости Земли и Марса в выбранной гелиоцентрической системе координат.

Будем предполагать, что начальный запас инертной массы равен нулю, как и конечные значения масс и — и  $w$  — компонентов рабочего тела (горючее и окислитель) ЖРД (в случае ЯТРД — только один компонент), запас рабочих веществ системы обеспечения жизнедеятельности и инертной массы:

$$m_i(t_0) = 0, \quad m_u(t_3) = m_w(t_3) = m_q(t_3) = m_i(t_3) = 0. \quad (3.6)$$

Полная начальная масса аппарата, предназначенного для выполнения четырехимпульсного перелета, вычисляется по формуле

$$m(t_0) = m_\pi + m_\delta + \sum_{i=1}^q [(1 + \beta_u)m_u^i + (1 + \beta_w)m_w^i] + m_r + m_q(t_0), \quad (3.7)$$

в которой, в отличие от формулы (2.1), масса конструкций КА  $m_\pi$  включена в фиксированную величину массы полезной нагрузки, а величина начального запаса рабочих веществ СОЖ  $m_q(t_0)$  задается формулой

$$m_q(t_0) = q(1 - \eta)T, \quad (3.8)$$

где полное время выполнения заданного маневра

$$T = t_3 - t_0 \quad (3.9)$$

не фиксируется при постановке. Кроме того, в начальную массу аппарата включена масса  $m_\delta$  десантного аппарата, который остается на круговой орбите ИСМ.

Для величины конечной массы аппарата имеем

$$m(t_3) = m_\pi + \beta_u m_u^4 + \beta_w m_w^4 + \delta m_r. \quad (3.10)$$

Таким образом, предполагается, что топливные баки секционированы и сбрасываются после каждого импульса, параметр  $\delta$  со значениями из множества  $\{0, 1\}$  определяет, сбрасывается ли система регенерации в конце маневра.

Зададим время ожидания на орбите ИСМ  $T_s$ :

$$T_s = t_2 - t_1. \quad (3.11)$$

Оптимизационная задача о выполнении четырехимпульсного перелета ИСЗ — ИСМ с возвращением формулируется так: при фиксированных значениях времени старта с круговой орбиты  $t_0 = 0$  и времени  $T_s$  ожидания на орбите ИСМ необходимо найти оптимальную схему перелета  $\{\bar{t}_i, \bar{\eta}_i, \Delta\bar{v}_i\}$ , доставляющую минимум целевой функции

$$J = m(t_0). \quad (3.12)$$

Характер связей, накладываемых на векторы  $\{\bar{t}_i, \bar{\eta}_i, \Delta\bar{v}_i\}$ , определяется особенностями гравитационного поля, в котором происходит движение аппарата. Известно, что в случае ньютонаовского поля эти дифференциальные связи можно заменить конечными соотношениями невозмущенного кеплеровского движения [43].

Рассмотрим четырехимпульсный перелет Земля — Марс с возвращением в гелиоцентрической системе координат OXY, лежащей в плоскости перелета. Предполагается, что ось OX совпадает с направлением начального радиуса-вектора КА, положительному направлению оси OY соответствует поворот оси OX на  $90^\circ$  против часовой стрелки. Примерная схема перелета приведена на рис. 2.

В принятой здесь плоской круговой модели движения планет начальная конфигурация планет, очевидно, полностью определяется исходным угловым отклонением Марса  $\varphi_0$ . При этом, в соответствии с четырехимпульсной схемой, траектория космического аппарата, рассматриваемая в рамках ММСВ, складывается из трех участков: 1) перелет между орбитами ИСЗ и ИСМ, 2) ожидание на орбите ИСМ, 3) обратный перелет между орбитами ИСМ и ИСЗ.

В выбранной системе координат начальный радиус-вектор КА имеет координаты  $(r_e, 0)$ , вектор начальной скорости аппарата —  $(0, v_e)$ . В результате приложения импульса на орбите ИСЗ в момент  $t_0$  аппарат приобретает скорость  $\bar{v}_0 = (v_0 \sin \theta_0, v_0 \cos \theta_0)$ , где  $\theta_0$  — угол вектора скорости с местным горизонтом. Элементы эллиптической орбиты аппарата на первой дуге межпланетной траектории находятся, аналогично [43], из следующих соотношений:

$$\frac{1}{a} = \left| \frac{2}{r_e} - \frac{v_0^2}{\mu} \right|, \quad e \sin E_0 = \frac{r_e v_0 \sin \theta_0}{\sqrt{\mu a}}, \quad e \cos E_0 = 1 - \frac{r_e}{a}, \quad p = a(1 - e^2), \quad M_0 = E_0 - e \sin E_0, \quad (3.13)$$

где  $a$  — большая полуось эллипса перехода ИСЗ — ИСМ,  $e$  — эксцентриситет,  $p$  — фокальный параметр,  $E_0$  — начальная эксцентрическая аномалия,  $M_0$  — средняя угловая аномалия в эпоху  $t_0$ ,  $\mu$  — гравитационная постоянная Солнца. Условиями того, что КА достигнет Марса в момент  $t_1$ , являются, во-первых, условие попадания на круговую орбиту Марса:

$$r_m = a(1 - e \cos E_1), \quad (3.14)$$

и во-вторых, равенство угловых перемещений аппарата и Марса с учетом начального углового отклонения последнего:

$$\vartheta_1 - \vartheta_0 = \phi_0 + \omega_m T_1. \quad (3.15)$$

Здесь  $E_1$  — эксцентрическая аномалия в момент  $t_1$ , а  $\vartheta_0, \vartheta_1$  — истинные аномалии в моменты  $t_0$  и  $t_1$ , связанные с величинами эксцентрических аномалий соотношениями

$$\operatorname{tg} \frac{\vartheta_i}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E_i}{2}, i = \{0,1\}, \quad (3.16)$$

$\omega_m$  — угловая скорость вращения Марса вокруг Солнца,  $T_1 = t_1 - t_0$  — длительность перелета Земля — Марс, величина которой может быть найдена по формуле

$$T_1 = \frac{M_1 - M_0}{n}, \quad (3.17)$$

где  $M_1$  — средняя угловая аномалия в эпоху  $t_1$ ,  $n$  — среднее угловое движение:

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}. \quad (3.18)$$

В момент прибытия на орбиту Марса аппарат имеет скорость  $\bar{v}_1$ . Для того чтобы аппарат имел круговую скорость Марса  $\bar{v}_m(t_1)$ , прикладывается импульс  $\Delta\bar{v}_1$ . Для определения величин прироста скорости космического аппарата  $\Delta v_0$  и  $\Delta v_1$  в момент старта с ИСЗ и прибытия на орбиту ИСМ используются формулы (3.1) — (3.2).

На второй дуге четырехимпульсной траектории аппарат двигается в течение фиксированного времени  $T_s$ , как одно целое с планетой назначения. Задача обратного перелета ИСМ — ИСЗ после соответствующей замены индексов в формулах (3.13), (3.14), (3.16), (3.17), записывается почти идентично рассмотренной выше задаче прямого перелета. Единственное отличие состоит в том, что условие (3.15) заменяется на условие равенства угловых перемещений Земли и аппарата с момента старта с ИСЗ до момента прибытия назад:

$$\omega_e(T_1 + T_s + T_2) = \phi_0 + \omega_m(T_1 + T_s) + \vartheta_1^1 - \vartheta_0^1. \quad (3.19)$$

Здесь  $\omega_e$  — угловая скорость вращения Земли вокруг Солнца,  $T_2$  — длительность перелета ИСМ — ИСЗ,  $\vartheta_0^1, \vartheta_1^1$  — величины начальной и конечной истинной аномалии на эллипсе перехода Земля — Марс.

Таким образом, при фиксированных величинах начального углового отклонения Марса и времени ожидания на орбите ИСМ как элементы гелиоцентрических эллипсов перехода, так и длительности прямого и обратного перелетов и величины прироста скорости аппарата на импульсах в соответствии с формулами (3.13) — (3.19) однозначно определяются величинами скорости КА в момент старта с Земли  $v_0$  и Марса  $v_1$ . Поэтому поиск минимума целевой функции (3.12) при численном анализе оптимальных четырехимпульсных перелетов Земля — Марс производится в двухмерном пространстве этих переменных.

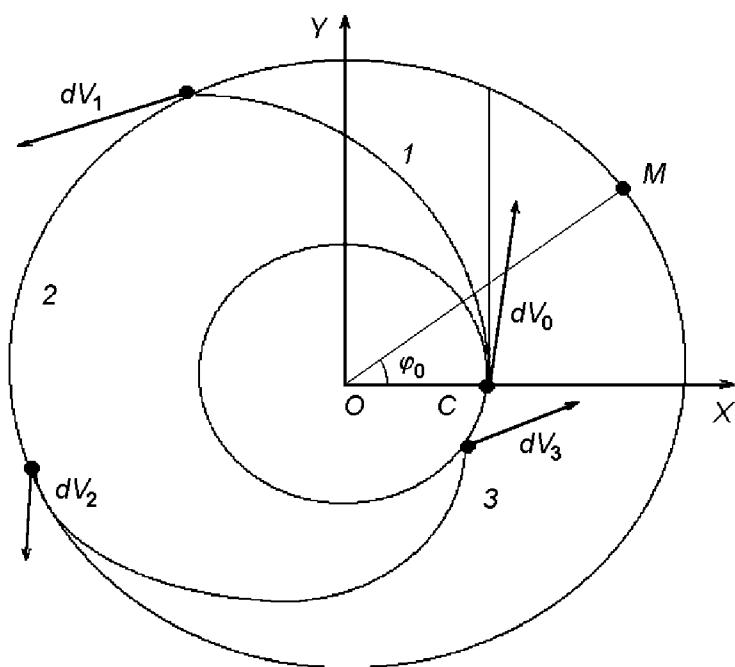


Рис. 2. Примерная схема четырехимпульсного перелета Земля — Марс с возвращением

### 3.2 .Численный анализ четырехимпульсных перелетов

Целью численного анализа четырехимпульсных перелетов Земля — Марс с возвращением является оценка целесообразности активного сброса отходов СОЖ за счет энергии реактивной струи двигателя большой тяги для уменьшения начальной массы пилотируемого КА, предназначенного для выполнения длительных экспедиций. Это достигается путем проведения параметрического анализа сравнивательной эффективности ускоренного сброса отходов СОЖ на активных дугах траектории с режимом пассивного сброса по мере накопления (традиционная схема). В качестве варьируемых величин выбраны весовые параметры системы регенерации СОЖ. Указанные режимы сравниваются в диапазоне основного параметра СОЖ — коэффициента регенерации рабочих веществ СОЖ, охватывающем как существующие СОЖ открытого типа ( $\eta = 0$ ), так и перспективные биорегенеративные ( $\eta \approx 1$ ). Необходимость проведения таких исследований продиктована отсутствием сколько-нибудь достоверной информации о возможных параметрах перспективных СОЖ. Поэтому единственным доступным способом оценки их эффективности является математическое моделирование с вариацией параметров модели в широких диапазонах, ограниченных лишь необходимостью выполнения законов сохранения.

Как отмечено выше, путем введения традиционной для двигателей большой тяги импульсной аппроксимации межпланетных траекторий общая задача оптимального управления пилотируемым КА, выполняющим перелет Земля — Марс с возвращением, может, на основании экстремального подхода, быть заменена проблемой поиска минимума целевой функции в конечномерном пространстве параметров, однозначно определяющих траекторию перелета. В качестве таковых здесь были выбраны величины приростов скорости аппарата на каждом импульсе  $dv_i$ ,  $i = 1, 4$ , а также длительности пассивных дуг  $T_i$ ,  $i = 1, 2$ , при этом время ожидания на планете назначения считалось заданным. Анализ внешней задачи показал, что для плоской круговой модели движения планет траекторные параметры однозначно определяются величинами скорости КА при старте с Земли и Марса. На каждом шаге поиска конечномерного минимума, то есть при фиксированной схеме перелета, решаются оптимизационные задачи выполнения активных участков с минимальными затратами топлива. Указанная иерархическая двухуровневая структура решения общей вариационной задачи предопределяет структуру приведенных результатов численного анализа. Исследование эффективности активного сброса отходов СОЖ в сравнении с традиционным использованием СР разумно провести как в терминах основной вариационной задачи (2.7) — (2.9), так и при фиксированных схемах перелета, данные о которых заимствованы из известных научных публикаций. Сопоставление наших результатов с независимо полученными в терминах традиционного подхода решениями дает возможность оценить эффективность активного сброса в чистом виде.

#### 3.2.1. Фиксированные схемы перелета.

На рис. 3 — 5 даны результаты параметрического анализа эффективности активного сброса отходов СОЖ для фиксированных схем перелета при использовании ЖРД либо ЯТРД в качестве двигательной установки. Варьировались такие параметры СОЖ КА: коэффициент регенерации рабочих веществ СОЖ  $\eta$ , суточный расход рабочих веществ  $q$ , параметры  $\rho$ ,  $\chi$ ,  $\mu$ , определяющие величину массы системы регенерации  $m_r = \rho q \eta^\chi (1 + \mu T)$  при заданном времени выполнения перелета  $T$ . Предполагалось, что численные значения размерных величин этих параметров изменяются в следующих диапазонах:

$$\eta \in [0,1], \quad \rho \in [0,400] \text{ (сут)}, \quad q \in [10,200] \text{ (кг/сут)},$$

$$\chi \in [0,5,5], \quad \mu \in [0,0,01] \text{ (1/сут)}.$$

Эффективность режима ускоренного сброса отходов СОЖ за счет энергии реактивной струи в уменьшении начальной массы КА иллюстрируется на приведенных графиках путем сравнения по величине функционала  $J = m(0)$  с режимом пассивного сброса. Численные параметры и классификация четырехимпульсных траекторий Земля — Марс с возвращением заимствованы в [109]. А именно, предполагалось, что каждая из рассматриваемых траекторий принадлежит к одному из следующих типов: 1) opposition class mission, 2) conjunction class mission и

3) fast-transfer conjunction class mission. Основными отличиями указанных типов траекторных схем являются, во-первых, различная длительность пребывания на орбите ИСМ, которая для первого типа составляет 30—60 сут, для второго и третьего — 400—500 сут, во-вторых, различные суммарные величины необходимых приращений скорости на каждом из четырех импульсов и величины скоростей входа на орбиту ИС планет, которые значительно выше для схем первого типа. Типичным для схем первого типа является использование гравитационного поля Венеры с целью снижения энергетических затрат и скоростей входа, при этом траектория обратного перелета лежит внутри гелиоцентрических орбит Земли и Венеры, что увеличивает опасность солнечной радиации для экипажа. Траекторные схемы второго и третьего типа, имеющие приблизительно одинаковые времена пребывания на орбите ИСМ и величины энергетических затрат, отличаются тем, что за счет относительно небольшого увеличения величины импульса при старте с Земли удается существенно уменьшить время прямого перелета. Везде далее ссылка на любой из перечисленных типов траекторий означает, что использованные численные значения параметров соответствуют приведенным в таблице.

Численные характеристики четырехимпульсных схем перелета

Тип перелета	$dv_1$ , м/с	$dv_2$ , м/с	$dv_3$ , м/с	$dv_4$ , м/с	$T_1$ , сут	$T_2$ , сут	$T_3$ , сут
Opposition class mission	4744	3930	3067	4093	172.1	60	329
Conjunction class mission	3554	908	1444	3770	201.7	550	192.3
Fast transfer conjunction class mission	4247	3050	2180	5484	139	630	152

При проведении численных расчетов выбирались следующие значения максимальной величины удельного импульса ракетных двигателей: ЖРД — 450 с, ЯТРД — 825 с. Предполагалось, что величина полезной нагрузки  $m_{\pi}$  в обоих случаях равна 51 т.

На рис. 3 даны зависимости функционала задачи от коэффициента регенерации СОЖ, выбранного в этом исследовании в качестве ключевого параметра, для вышеназванных типов траекторий Земля — Марс с возвращением. Верхний график на каждом из рисунков соответствует случаю использования ЖРД, нижний — ЯТРД. В свою очередь верхняя кривая на каждом из графиков соответствует режиму пассивного сброса инертной массы перед выполнением каждого импульса, нижняя — ускоренному сбросу отходов за счет энергии реактивной струи ракетного двигателя. Как видим, эффективность активного сброса тем больше, чем хуже система регенерации (меньше значения  $\eta$ ). Для практических «открытых» СОЖ, аналогичных современным, она достигает 1,5—2  $m_{\pi}$  ( $\sim 75$ —100 т) для ЖРД fast- и conjunction-перелетов и до 4  $m_{\pi}$  для opposition. Соответствующие цифры для ЯТРД меньше приблизительно в два — три раза. Приблизительно на 0,1 уменьшаются оптимальные значения  $\eta$  в случае активного сброса отходов. Это означает снижение требований к необходимой эффективности СР.

На рис. 4 на плоскостях  $q - \eta$ ,  $\rho - \eta$ ,  $\mu - \eta$  и  $\chi - \eta$  даны зависимости относительного уменьшения величины функционала  $dJ/J$  для случаев использования ЖРД и ЯТРД. Здесь  $dJ/J = (m^0(0) - m^i(0))/m^0(0)$ , где индекс 0 соответствует режиму пассивного сброса,  $i$  — ускоренного. Уменьшение стартовой массы экспедиционного комплекса наибольшее для открытых СОЖ и может достигать 4—12 % от  $m(0)$ . В отличие от рис. 4 на рис. 5 выигрыш в уменьшении начальной массы КА иллюстрируется путем сравнения режимов пассивного сброса при оптимальном значении коэффициента регенерации  $\eta$  с режимом ускоренного сброса при полном отсутствии системы регенерации —  $\eta = 0$ , что практически соответствует существующим СОЖ открытого типа.

### 3.2.2. Оптимальные схемы перелета.

На рис. 6 даны результаты численного анализа оптимальных в смысле выбранного функционала четырехимпульсных перелетов Земля — Марс с возвращением для случаев использования ЖРД и ЯТРД. Приведены зависимости функционала задачи  $J = m(0)$ , суммарной величины импульсов тяги  $\sum dV = dV_1 + dV_2 + dV_3 + dV_4$ , суммарной длительности перелетов Земля-Марс  $T_1 + T_2$ , начальных запасов компонентов рабочего тела ЖРД и ЯТРД и массовых затрат на функционирование СОЖ КА от коэффициента регенерации рабочих веществ СОЖ  $\eta$ . При проведении численной оптимизации время ожидания на орбите планеты назначения принималось равным 550 сут, исходное угловое отклонение Марса  $\varphi_0 = 45^\circ$ , параметры СР соответственно:  $\rho = 160$  сут,  $q = 80$  кг/сут,  $\chi = 3$ ,  $\mu = 0.00108$  1/сут. Легко видеть, что зависимость  $J$  от  $\eta$  принципиально не отличается от аналогичных кривых для фиксированной схемы. Изменение  $\eta$  практически не влияет на суммарную характеристическую скорость экспедиции, и, тем самым, и на другие кинематические характеристики схемы перелета (длительность экспедиции и ее отдельных фаз).

### 3.3. Оптимальное распределение стартовой массы экспедиционного комплекса

Рис.7 иллюстрирует зависимости основных составляющих величины стартовой массы аппарата от коэффициента регенерации при использовании ЖРД и ЯТРД на оптимальных схемах четырехимпульсного перелета. Даны зависимость совокупной величины топливных затрат на выполнение динамического маневра с учетом массы баков и зависимость массовых затрат на функционирование СОЖ аппарата. Приведенные кривые имеют четко выраженный минимум, при этом оптимальная величина топливных затрат как при использовании ЖРД, так и при использовании ЯТРД достигается при значениях  $\eta = 0.3$ , в то время как минимум затрат на функционирование СОЖ — при  $\eta = 0.8$ .

Кажущееся несоответствие кривых на приведенных рисунках объясняется тем, что эффективность активного сброса отходов существенно зависит от их наличного запаса. Чем меньше коэффициент регенерации  $\eta$ , тем больше рабочего вещества СОЖ остается нерегенерированным и используется в качестве инертной массы. Именно поэтому оптимальными с точки зрения минимизации топливных затрат оказываются весьма малые значения  $\eta$ . При этом масса СОЖ, которая является монотонно возрастающей функцией  $\eta$ , также мала. И лишь весьма значительная величина запаса рабочих веществ СОЖ заставляет использовать систему регенерации с большим значением коэффициента  $\eta$ , обеспечивая таким образом минимальное значение функционала задачи — полной стартовой массы экспедиционного комплекса.

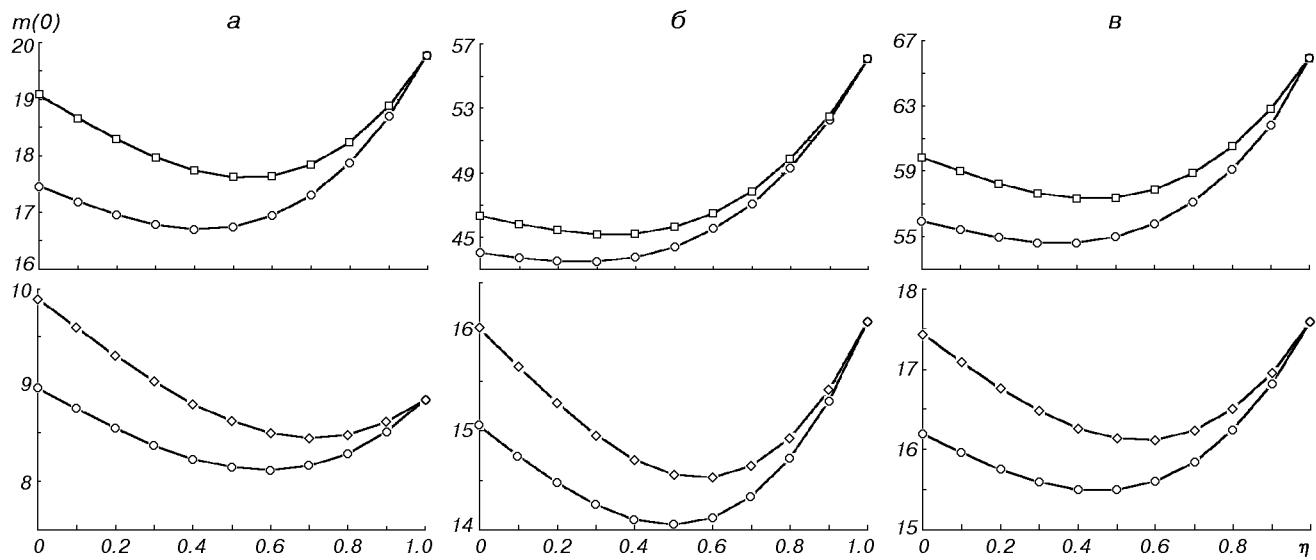


Рис. 3. Зависимость минимизируемого функционала от коэффициента регенерации рабочих веществ СОЖ при использовании химического (вверху) и ядерного теплового (внизу) ЖРД для перелетов типа: *a* — «conjunction», *b* — «fast-transfer», *c* — «opposition». Квадратики — пассивный сброс инертной массы, кружки — активный

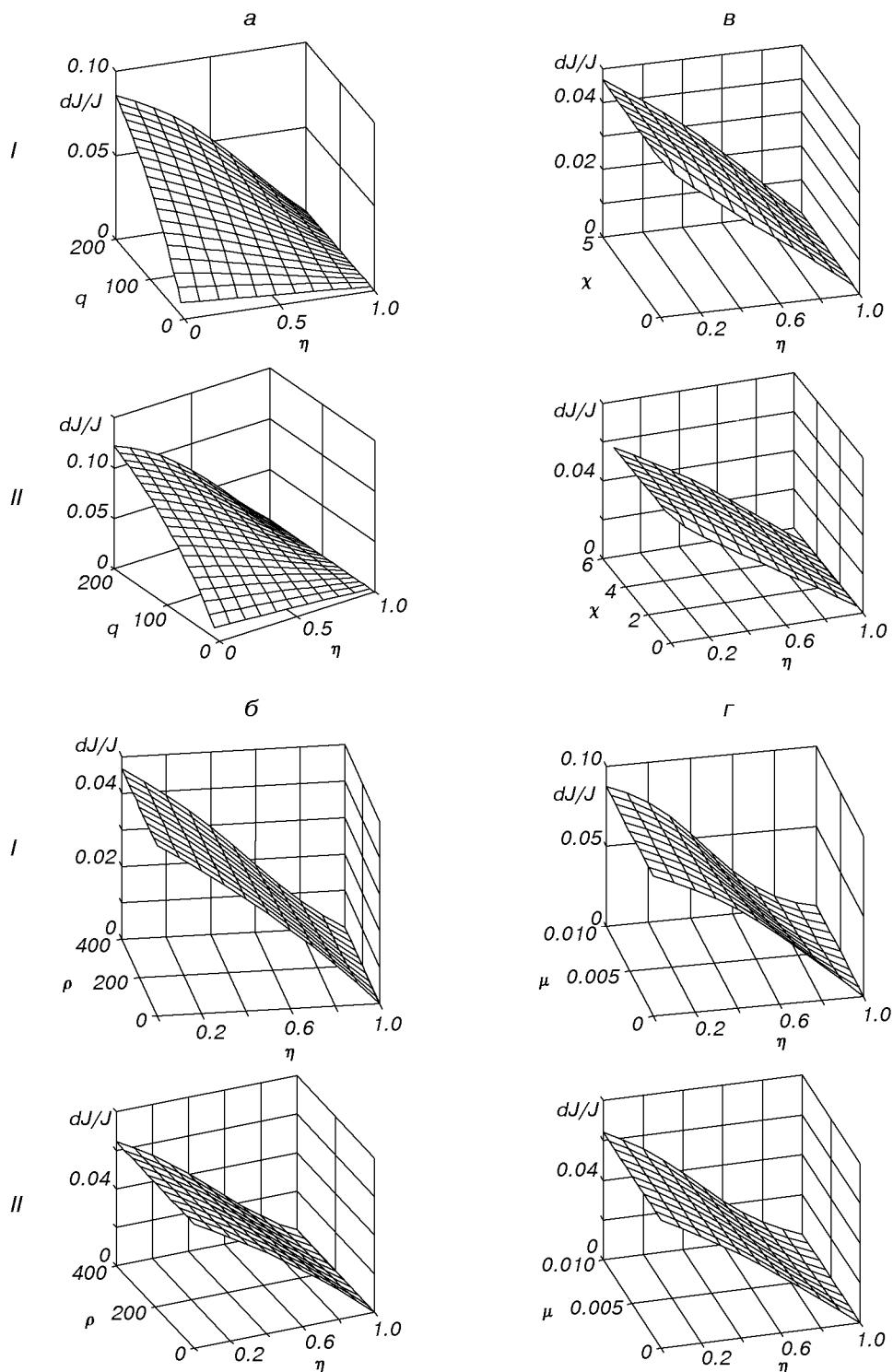


Рис. 4. Относительный выигрыш в величине функционала в случае использования ЖРД (I) и ЯТРД (II) на плоскостях  $q — \eta$ ,  $\rho — \eta$ ,  $\chi — \eta$ ,  $\mu — \eta$  (см. *a* — *c*)

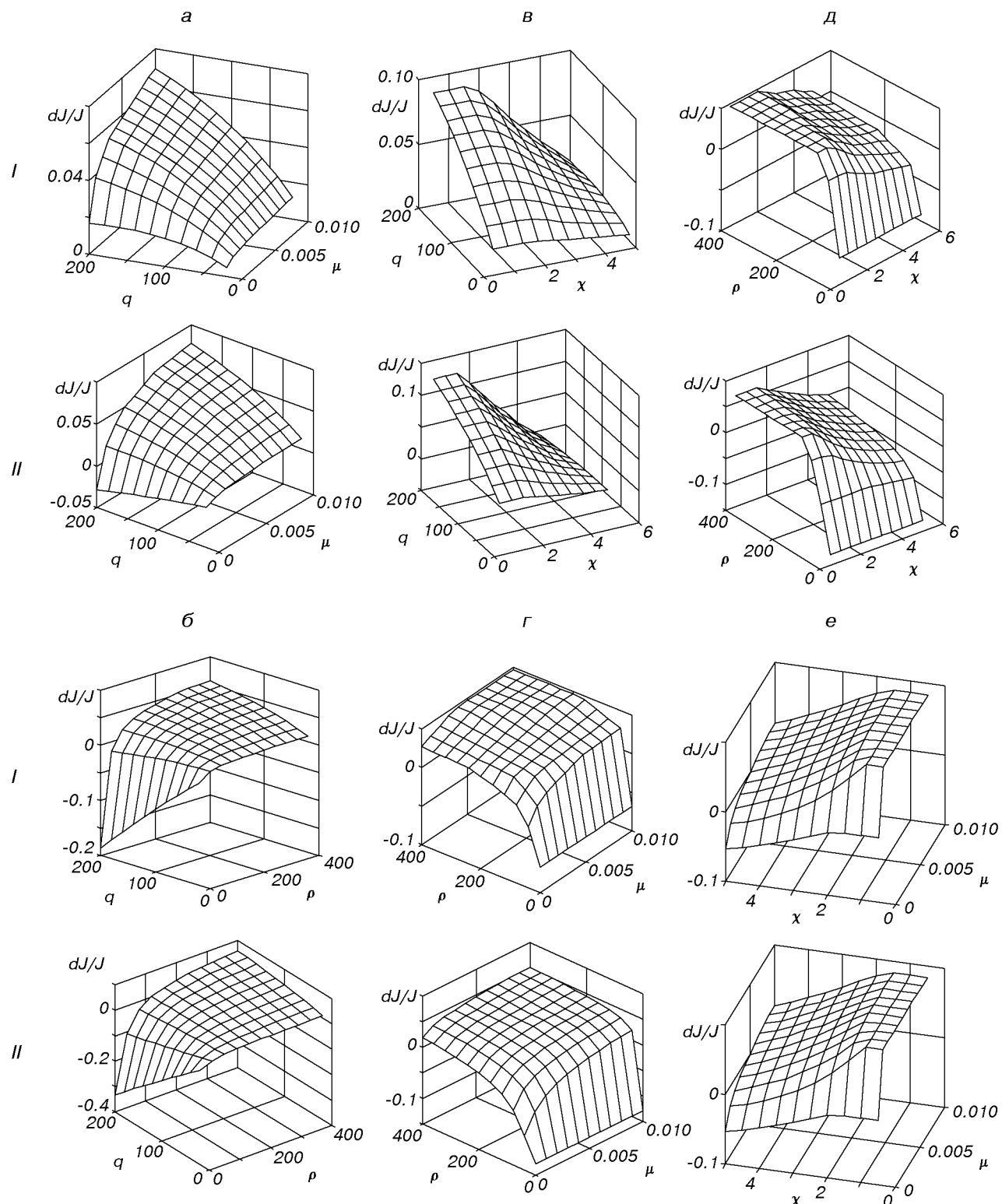


Рис. 5. Сравнительная эффективность режимов активного ( $\eta = 0$ ) и пассивного ( $\eta = \eta_{\text{opt}}$ ) в случае использования ЖРД (I) и ЯТРД (II) на разных плоскостях (*a* — *e*)

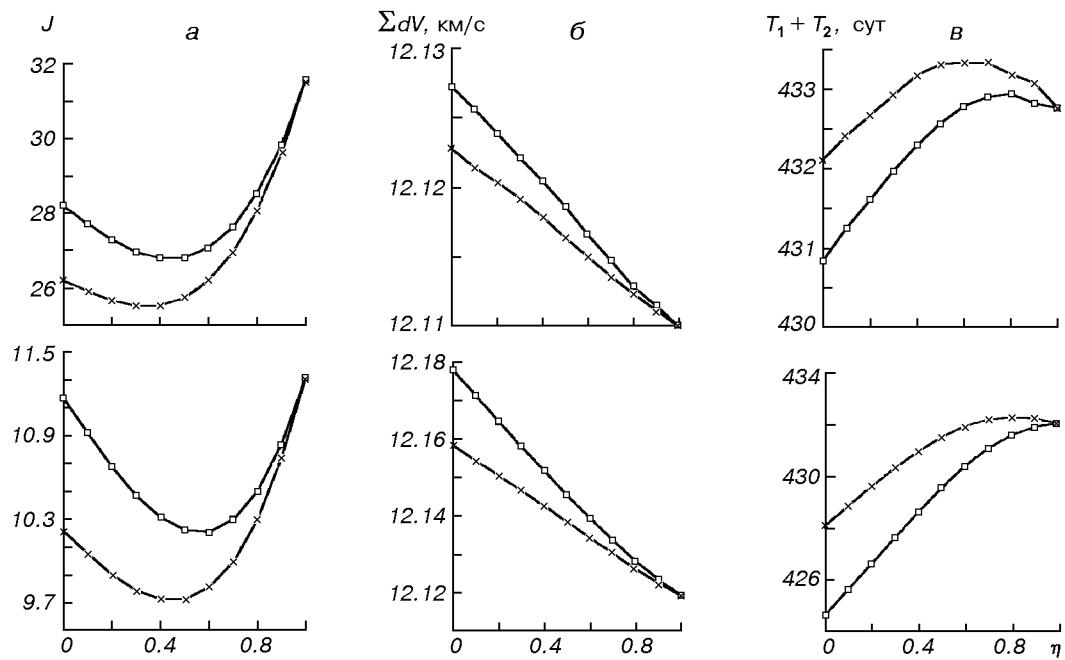


Рис. 6. Зависимости функционала *J*, суммарной величины импульсов тяги  $\Sigma dV$ , суммарной длительности  $T_1 + T_2$  перелетов от коэффициента регенерации рабочих веществ СОЖ для оптимальных четырехимпульсных перелетов Земля — Марс при использовании ЖРД (вверху) и ЯТРД (внизу). Квадратики — пассивный сброс массы, крестики — активный

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ: АКТИВНЫЙ СБРОС ИЛИ БИОРЕГЕНЕРАЦИЯ?

Очевидно, наиболее важный практический вывод, который можно сделать из рис. 3—7, состоит в том, что активный сброс отходов СОЖ за счет энергии реактивной струи ракетных двигателей большой тяги позволяет не откладывать осуществление первых пилотируемых межпланетных экспедиций до разработки биорегенеративных СОЖ. При этом для большинства рассмотренных типов 4-импульсных схем, ускоренный сброс отходов даже при полном отсутствии подсистемы регенерации СОЖ ( $\eta = 0$ ) сравним по эффективности, либо даже эффективнее, нежели режим пассивного сброса при оптимальном значении  $\eta$ .

Справедливость основного вывода подтверждается также результатами параметрического анализа фиксированных схем перелета, приведенными на рис. 4, 5. Действительно, указанная выше эффективность четко выявляется как при сравнении активного и пассивного режимов при одинаковых значениях коэффициента регенерации (рис. 4), так и при сравнении режима активного сброса при  $\eta = 0$

с режимом пассивного при  $\eta = \eta_{\text{opt}}$  (рис. 5). Так как достоверной информации о перспективных СОЖ КА нет, целью численного анализа было исследование указанной эффективности в предельно возможных диапазонах параметров СОЖ. Поэтому и подтверждение основного вывода, и сохранение основных закономерностей зависимости начальной массы КА от указанных параметров свидетельствует также и об адекватности использованной математической модели СОЖ. Представляются интересными также результаты, приведенные на рис. 6—7 для оптимальных 4-импульсных схем перелета Земля — Марс с возвращением. Проиллюстрированные на рис. 6 зависимости траекторных характеристик оптимальных схем показывают, что применение активного сброса приводит к увеличению общей длительности межпланетных перелетов при уменьшении суммарной величины характеристической скорости импульсов. Эта тенденция справедлива как для случаев использования ЖРД в качестве двигательной установки, так и ЯТРД. Однако эти изменения траекторных характеристик весьма незначительны (около 1 %), поэтому ясно, что выигрыш в уменьшении начальной массы КА при использова-

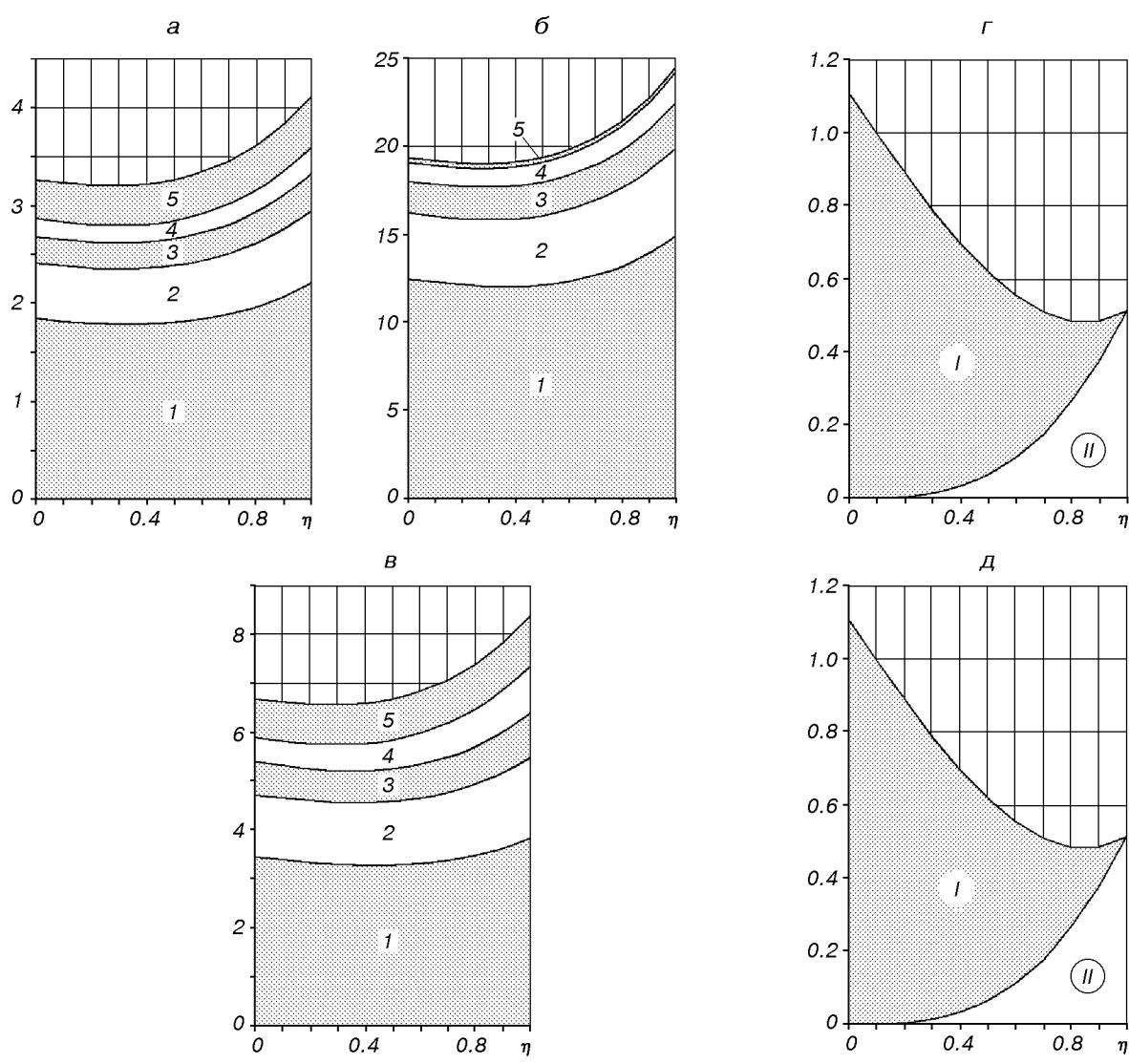


Рис. 7. Выраженные в долях полезной нагрузки зависимости суммарных запасов топлива от коэффициента регенерации для оптимальных 4-импульсных перелетов при использовании ЖРД (вверху) и ЯРД (внизу): а, б, в — запасы *u*-компонента топливной смеси ЖРД, *w*-компонента топливной смеси ЖРД и рабочего тела ЯРД соответственно с учетом массы топливных баков; г и д — суммарные массовые затраты на функционирование СОЖ (I — запас рабочих веществ СОЖ, II — масса СОЖ). Цифры I—4 — номера импульсов, 5 — топливные баки

ния отходов СОЖ как инертной массы достигается в основном за счет минимизации топливных затрат на выполнение импульсов тяги (см. рис. 7) и что основные закономерности, выявленные с помощью параметрического анализа фиксированных схем перелета, остаются справедливыми и для оптимальных.

Отвечая на вопрос, поставленный в заголовке данного раздела, можно указать на соизмеримость эффективности обоих рассматриваемых подходов.

Прямое сопоставление соответствующих кривых действительно свидетельствует о принципиальной возможности выполнения длительных пилотируемых экспедиций с современными СОЖ. Однако необходимость разработки биорегенеративных СОЖ нового поколения диктуется не только стремлением обеспечить экспедиции к планетам. Они нужны и для обеспечения функционирования постоянно действующих поселений, где бы они не находились, и для снижения затрат на жизнеобесп-

печение экипажей пилотируемых станций на околоземных орbitах. Поэтому ответ должен звучать следующим образом: активный сброс и регенерация! При этом технически легко реализуемый активный сброс представляется эффективной мерой снижения требований к системам регенерации СОЖ, разрабатываемым для пилотируемых космических аппаратов.

1. Термодинамические и теплофизические свойства продуктов сгорания: В 5 т. — М.: Наука, 1972.—Т. 2.—484 с.
2. Алемасов В. Е., Даутов Э. А., Дрегалин А. Ф., Сергиевская М. Л. Пакет прикладных программ САНА для решения задачи номографической аппроксимации при проектных исследованиях рабочих процессов в ДЛА // Авиационная техника.—1988.—№ 1.—С. 8—12.
3. Алемасов В. Е., Дрегалин А. Ф., Тишин А. П. Теория ракетных двигателей. — М.: Машиностроение, 1980.—533 с.
4. Балашов В. В. Исследование оптимальных перелетов к Марсу с возвращением в атмосферу Земли с заданной скоростью // Уч. записки ЦАГИ.—1971.—2, № 1.—С. 82—91.
5. Балашов В. В. Некоторые вопросы использования атмосфер планет для снижения энергетических затрат при осуществлении межпланетных перелетов // Тр. 4 чт., посв. разр. научн. наследия К. Э. Циолковского. — М., 1970.—С. 40—49.
6. Балашов В. В., Ильин В. А., Истомин Н. А. Синтез оптимальных многоимпульсных межпланетных траекторий // Тр. 2 чт. посв. разр. научн. наследия Ф. А. Цандера. — М., 1974.—С. 13—26.
7. Баррер М., Жоммот А., Вебеке Б. Ф., Ванденкерхове Ж. Ракетные двигатели. — М.: Оборонгиз, 1962.—799 с.
8. Белецкий В. В., Егоров В. А. Межпланетные перелеты с двигателями постоянной мощности // Космич. исследования.—1964.—2, № 3.
9. Белецкий В. В., Егоров В. А. Разгон космического аппарата в сфере действия планеты // Космич. исследования.—1964.—2, № 3.
10. Болгарский А. В. Расчет процессов в камере сгорания жидкостных ракетных двигателей. — М.: Наука, 1964.—234 с.
11. Веригто В. В. Системные методы в космической биологии и медицине. — М.: Наука, 1987.—213 с.
12. Воронин Г. И., Паливода А. И. Жизнеобеспечение экипажей космических кораблей. — М.: Машиностроение, 1976.—211 с.
13. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Особые оптимальные управление. — М.: Наука, 1973.—156 с.
14. Глушко А. А. Космические системы жизнеобеспечения: Биофизические основы проектирования и испытания. — М.: Машиностроение, 1986.—303 с.
15. Гродзовский Г. Л., Иванов Ю. Н., Токарев В. В. Механика космического полета. Проблемы оптимизации. — М.: Наука, 1975.—704 с.
16. Гродзовский Г. Л., Иванов Ю. Н., Токарев В. В. Механика космического полета с малой тягой // Инж. журн. АН СССР.—1963.—3, № 3, № 4; 1964.—4, № 1, № 2.
17. Гродзовский Г. Л., Иванов Ю. Н., Токарев В. В. О движении тела переменной массы с постоянной затратой мощности в гравитационном поле // Докл. АН СССР.—1961.—137, № 1.
18. Давлетшин Г. З. Активно-гравитационные маневры космических аппаратов. — М.: Машиностроение, 1980.—256 с.
19. Демидова Н. С., Малоземов В. В. Электрохимические системы регенерации космического корабля. — М.: Машиностроение, 1992.—123 с.
20. Злацкий В. Т. К вопросу о построении оптимальных траекторий с участками особого управления // Вычисл. и прикл. математика.—1978.—Вып. 35.—С. 27—34.
21. Иванов В. А., Фалдин Н. В. Теория оптимальных систем автоматического управления. — М.: Наука, 1991.—336 с.
22. Иванов Ю. Н., Оптимальное сочетание двигательных систем // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение.—1964.—№ 2.
23. Ильин В. А. Оптимальный переход космического аппарата, тормозящегося в атмосфере планеты, на орбиту искусственного спутника // Инж. журн.—1963.—3, вып. 2.—С. 163—172.
24. Ильин В. А., Кузьмак Г. Е. Оптимальные перелеты космических аппаратов с двигателями большой тяги. — М.: Наука, 1976.—744 с.
25. Киричников С. Н., Бабкова А. Н. Оптимальные импульсные межорбитальные перелеты с аэродинамическими маневрами // Космич. исследования.—1992.—30, вып. 6.—С. 800—809.
26. Кифоренко Б. М., Харитонов А. М. Управление тягой жидкостных ракетных двигателей: моделирование и оптимизация // Пробл. упр. и информ.—1997.—№ 5.—С. 118—130.
27. Кифоренко Б. Н. Об оптимизации параметров тела переменной массы при движении с активным сбросом отходов системы жизнеобеспечения // Космич. исследования.—1975.—13, вып. 2.—С. 201—205.
28. Кифоренко Б. Н. Об оптимальном времени выполнения динамического маневра материальной точкой переменной массы // Космич. исследования.—1972.—10, вып. 5.—С. 673—678.
29. Кифоренко Б. Н. Об оптимизации времени выполнения динамического маневра // Вычисл. и прикл. математика.—1972.—С. 63—70.
30. Кифоренко Б. Н., Даулетов Г. К. Аналитическое исследование оптимального управления составом рабочего тела // Тр. IX научн. чтений памяти С. П. Королева. — М., 1987.—С. 100—109.
31. Коваленко Н. Д., Стрельников Г. А. Управление сверхзвуковыми газовыми потоками в реактивных соплах. — Киев: Наук. думка, 1994.—125 с.
32. Коваленко Н. Д., Стрельников Г. А., Гира Ю. В., Гребенюк Л. З. Газодинамика сверхзвуковых укороченных сопел. — Киев: Наук. думка, 1993.—435 с.
33. Королев С. П. Ракетный полет в стратосфере. — М.: Воениздат, 1934.
34. Лабунский А. В. Исследование орбит с многократным пролетом Земли и Марса // Космич. исследования.—1991.—29, вып. 3.—С. 390—396.
35. Летов А. М. Динамика полета и управление. — М.: Наука, 1969.—359 с.
36. Лойцинский Л. Г. Механика жидкости и газа. — М.: Наука, 1973.—307 с.
37. Лоуден Д. Ф. Оптимальные траектории для космической навигации. — М.: Мир, 1966.—152 с.
38. Моисеенко В. П. Об оптимизации многоступенчатого аппарата // Тр. ЦАГИ.—1971.—Вып. 1295.
39. Новоселов В. С. Аналитическая теория оптимизации в гравитационных полях. — Л.: ЛГУ, 1972.—317 с.
40. Новоселов В. С. Компланарный перелет с учетом внутреннего запаса массы // Вестник ЛГУ.—1967.
41. Новоселов В. С. Оптимальное построение эллиптической орбиты при усложненных граничных условиях // Уч. зап. ЛГУ.—1967.—Вып. 34.—С. 1—5.

42. Оберт Г. Пути осуществления космических полетов: Пер. с нем. — М.: Оборонгиз, 1947.
43. Охочимский Д. Е., Сихуралидзе Ю. Г. Основы механики космического полета. — М.: Наука, 1990.—445 с.
44. Парин В. В., Космолинский Ф. П., Душков Б. А. Космическая биология и медицина. — М.: Просвещение, 1975.—223 с.
45. Перельгин Б. П., Пискарёва Н. Б. Оптимизация разгонного блока по весовому заправочному соотношению и закону регулирования компонентов топлива // Тр. XI чтений К. Э. Циолковского. — М., 1978.—С. 68—76.
46. Понтиягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1969.—384 с.
47. Пуликан М. Ф. Перспективы разработок ЖРД НМ60 на криогенных компонентах для западноевропейских ракетносителей // Аэрокосмич. механика.—1985.—3, № 7.—С. 131—140.
48. Фаткин Ю. М. Использование инертной массы в двигателе ограниченной скорости истечения // Механика твердого тела.—1967.—№ 3.—С. 164—168.
49. Хоус С. Д., Меугер Д. О. Принцип создания реактивной тяги на основе использования антипротонов и перспективы ее применения для пилотируемой экспедиции на Марс // Аэрокосмич. техн.—1990.—№ 3.—С. 57—64.
50. Цандер Ф. А. Проблемы полета при помощи реактивных аппаратов. Межпланетные путешествия. — М.: Оборонгиз, 1961.
51. Циолковский К. Э. Собрание сочинений. — М.: Изд-во АН СССР, 1954.—Т. 2.—455 с.
52. Черный Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. — М.: Физматгиз, 1959.
53. Шибанов Г. П., Васильев М. А. Оптимизация структуры и режимов функционирования регенеративных систем ОЖ экипажей // ВИНИТИ.—1992.—№ 4.—С. 69—121.
54. Эно-Пельтири Р. Космические полеты (астронавтика): Пер. с франц.—М.: Оборонгиз, 1950.
55. Barta D. J., Henninger D. L. Regeneration Life Support Systems — Why Do We Need Them? // Adv. Space Res.—1994.—14, N 11.—P. 403—410.
56. Bassam N. E., Max G., David K. Perspectives of Biological LSS Foundation // Proc. 4th Eur. Symp. Life Sci. Res. Space. — Paris; Noordwijk, 1990.—P. 445—448.
57. Battin R. H. The Determination of Round-Trip Planetary Reconnaissance Trajectories // J. Aerospace Sci.—1959.—26.—P. 545—567.
58. Beers L. S., Cohen A. D. Mars Capabilities for Electrical, Nuclear and Chemical Propulsion Systems // IAS Paper.—1962.—N 120.
59. Benton C., Clar K. Science, Engineering, and Enabling Technologies Required to Support Mars Exploration // AIAA Pap.—1992.—N 9482.—P. 5.
60. Bilardo V. J. The Physical Chemical Closed-loop Life Support Research Project // AIAA Pap.—1990.—N 3729.—P. 1—14.
61. Binot R. A., Tamponnet C., Lausseur Ch. Biological Life Support for Manned Missions by ESA // Adv. Space Res.—1994.—14, N 11.—P. 71—74.
62. Bowles J. V. Use of Atmospheric Braking During Mars Missions // J. Spacecraft and Rockets.—1990.—N 5.—P. 514—520.
63. Braun R. The Influence of Interplanetary Trajectory Options on a Chemically propelled MMM // J. Astronaut Sci.—1990.—38, N 3.—P. 289—310.
64. Braun R., Blersch D. I. Propulsive Options for a Manned Mars Transportation systems // J. Spacecraft and Rockets.—1991.—N 1.—P. 85—92.
65. Breakwell J. V., Rauch H. E. Asymptotic Matching in Power-Limited Interplanetary Transfers.—Washington: Amer. Astronaut. Soc., 1967.—P. 281—300.
66. Brechignac Fraacois. Toward Bioregenerative Life Support Systems // Proc. 4th Eur. Symp. Life Sci. Res. — Paris: Noordwijk, 1990.—P. 421—429.
67. Byrnes D. V., Hooper H. L. Multi-Conic: a Fast and Accurate Method of Computing Space Flight Trajectories // AIAA Paper.—1970.—N 1062.—P. 1—8.
68. Couch U. T., Auman J. W., Falkey T. C. Advanced Regenerative Life Support for Space Exploration // SAE Techn. Pap. Ser.—1991.—N 911500.—P. 67—77.
69. Dailey C. L., Hieaff J. L., Lobreg R. U. Nuclear Propulsion for Mars Exploration—Electric Versus Thermal // AIAA Pap.—1992.—N 3871.—P. 1—11.
70. Doll J. R. Earth-Orbit Masses for Five-Impulse Mars Stopover Missions in 1980 // J. Spacecraft and Rockets.—1968.—5, N 5.—P. 82—88.
71. Doll J. R., Gobetz F. W. Three-Impulse Interplanetary Rendezvous Trajectories // Proc. Southeastern Symp. on Missiles and Aerospace Vehicle Sci. of AAS.—1966.—7.—P. 55—1—55—14.
72. Eckenwiler M. Closed Form Lagrangian Multipliers for Coast Periods of Optimum Trajectories // AIAA J.—1965.—3, N 6.—P. 1149—1151.
73. Edelbaum T. N. The Use of High- and Low-Thrust Propulsion in Combination for Space Missions // J. Astronaut. Sci.—1962.—N 9.—P. 58—59.
74. Emrich W. Nuclear State Configuration Studies for Mars Missions // AIAA Pap.—1990.—N 3788.—P. 1—7.
75. Emrich W., Young A. Nuclear Propulsion System Options for Mars Missions // AIAA Pap.—1992.—N 1496.—P. 1—6.
76. Gobets F. W., Doll J. R. A Survey of Impulsive Trajectories // AIAA J.—1969.—7, N 5.—P. 49—56.
77. Gobetz F. W., Doll J. R. How to Open the Heliocentric Launch Window for Earth—Mars Orbiter Missions // J. Spacecraft and Rockets.—1969.—6, N 4.—P. 353—360.
78. Gravier J. P., Marchal C., Culp R. D. Optimal Impulsive Transfers Between Real Planetary Orbits // J. Optimiz. Theory and Appl.—1975.—15, N 5.—P. 557—604.
79. Gravier J. P., Marchal C., Culp R. D. Optimal Trajectories Between Earth and Mars in Their True Planetary Orbits // J. Optimiz. Theory and Appl.—1972.—9, N 2.—P. 120—136.
80. Hartwell J. G. A Solution of the Boundary Value Problem for Space Trajectories // Navigation.—1965.—12, N 3.—P. 256—268.
81. Hazelrigg G. A., Lion P. M. Analytical Determination of the Adjoint Vector for Optimum Space Trajectories // AIAA Paper.—1969.—N 916.—P. 1—14.
82. Hohmann W. Die Erreichbarkeit der Himmelskörper. — Oldenbourg: R. Munchen, 1925.
83. Hollister W. M. Mars Transfer Via Venus // AIAA Pap.—1964.—N 64—647.
84. Horsewood J. L. Interplanetary Trajectory Analysis for Combined High- and Low-Thrust Propulsion Systems // Proc. Space Flight Specialist Symp., Denver, Col., 1966. — Washington: Amer. Astron. Soc., 1967.—P. 457—576.
85. Huttenbach R. C., Radford James D. H. Life Support — Future Trends and Developments // SAE Tech. Pap. Ser.—1989.—N 891549.—P. 1—16.
86. Irving J. H. Low Thrust Flight: Variable Exhaust Velocity in Gravitational Fields // Space Techn.—1959.—N 10.
87. Jezewski D. J., Rozendaal H. L. An Efficient Method for Calculating Optimal Free-Space N-Impulse Trajectories // AIAA J.—1968.—6, N 11.—P. 2160—2165.
88. Lawden D. F. Optimal Intermediate-Thrust Rockets in a Gravitational Field // Astronautica Acta.—1962.—8.—P. 106—123.
89. Lawden D. F. Necessary Conditions for Optimal Rocket Trajec-

- tories // J. Mech. and Appl. Math.—1959.—12, N 4.—P. 476—478.
90. Lion P. M., Handelsman M. The Primer Vector on Fixed-Time Impulsive Trajectories // AIAA J.—1968.—16, N 1.—P. 127—132.
  91. MacElroy R. D., Wydeven T. Bio-regenerative Life Support // Proc. 34th AAS Int. Conf.—San Diego., 1989.—P. 239—252.
  92. Mackay J. S. Manned Mars Landing Missions Using Electric Propulsion // Spacecraft.—1970.—12, N 1.—P. 117—122.
  93. McAdaws J. V., Niehoff J. C. Round Trip Trajectory Options for Human Exploration of Mars // Proc. AAS/NASA Int. Symp.—1989.—P. 24—27.
  94. McKay C. The Case for Human Exploration of Mars // AIAA Guid., New and Countr. Conf., Portland, Ougan, Collect, Techn. Pap., Pt. 1. — Washington, 1990.—8 p.
  95. Melbourne V. G., Sauer C. G. Optimum Earth—Mars Roundtrip Trajectories Utilizing a Low-Thrust Power-Limited Propulsion System // Adv. in Astronaut. Sci.—1963.—13.
  96. Novara M., Cullingford H. S. Bio-isolation Analysys of Plants and Humans in a Piloted Mars Sprint // SAE Techn. Pap. Ser.—1988.—N 881051.—P. 1—11.
  97. Petraitis J. J. Correction Factor for Initial Acceleration Effects on Impulsive Mission Requirements // ARS Journal.—1962.—32, N 6.—P. 957—959.
  98. Powell F. T., Sedej M., Lin Chin. Environmental Control and Life Support System Requirements and Technology Needs for Manned Space Missions // SAE Techn. Pap. Ser.—1987.—N 871433.—P. 1—13.
  99. Regsac R. V. Two-Vehicle Mars Stopover with Rendezvous // J. Spacecraft and Rockets.—1966.—3, N 6.—P. 572—586.
  100. Robbins H. M. Optimal rocket trajectories with subars of intermidiate thrust. // Proc. XVIII Internat. Astron. Congr., 1966. — Paris, 1967.—P. 103—110.
  101. Rummel J. D. Long Term Life Support for Space Exploration // SAE Tech. Pap. Ser.—1990.—N 901277.—P. 67—73.
  102. Seshan P. K., Ferrall J. F., Rohatgi N. K. Human Life Support During Interplanetary Travel and Domicile // SAE Techn. Pap. Ser.—1991.—N 911323.—P. 1—18.
  103. Slavin T., Meyer P., Reysa R. Life Support System Definition Study for Long Duration Planetary Missions // SAS Techn. Pap. Ser.—1989.—N 891505.—P. 1—12.
  104. Sohn R. L. Manned Mars Trips Using Flyby Modes // J. Spacecraft and Rockets.—1966.—3, N 2.
  105. Sohn R. L. Venus Swingby Mode for Manned Mars Mission // J. Spacecraft and Rockets.—1964.—1, N 5.
  106. Spuriack P., Spuriak J. M., Evanich P. L. Process Control Integration Requirements for Advanced Life Support Systems Applicable to Manned Space Missions // SAE Tech. Pap. Ser.—1991.—N 911357.—P. 1—9.
  107. Stiepe S. A., Braun R. Effect of Venus Swingby Periapsis Burn During an Earth—Mars Trajectory // J. Astronaut Sci.—1991.—39, N 3.—P. 299—312.
  108. Titus R. R. Powered Flybys of Mars // Astron. Acta.—1965.—11, N 5.—P. 294—308.
  109. Walberg G. D. How Shall We Go to Mars? A Review of Mission Scenarios // J. Spacecraft and Rockets.—1993.—30, N 2.—P. 129—139.
  110. Wang K. Estimate of Effect of Large Thrust on Hohmann-Type Transfers // ARS Journal.—1962.—32, N 4.—P. 642—645.
  111. Werciowski P. F., Nishioka K. A Preliminary Analysis of Advanced LSS for MMM // AIAA Pap.—1990.—N 3.—P. 1—10.
  112. Williams S. N., Longuski J. M. Low Energy Trajectories to Mars Via Gravity Assist from Venus to Earth // J. Spacecraft and Rockets.—1991.—28, N 4.—P. 486—488.
  113. Zubrin R. Nuclear Thermal Rockets Using Indigenous Martian Propellants // AIAA Pap.—1989.—N 31.—Ref. N 2768.

---

#### PROBLEMS IN THE OPTIMIZATION OF MANNED INTERPLANETARY EXPEDITIONS

B. N. Kiforenko and I. Yu. Vasil'ev

Within the scope of the unified variation problem we diskuss the optimization of parameters, choosing flight trajectories and optimal flight control as well as control of life support systems in spacecraft in manned interplanetary expeditions. We examine the efficiency of ejecting the life support systems waste by jets from high-thrust rocket engines as compared to partial waste regeneration. We confirm the possibility of manned expeditions to Mars before efficient life support systems based on biological regeneration are developed.