

УДК 531.768

Фізико-математичне моделювання вимірювальних перетворювачів тиску з пневмомеханічним резонатором

М. Г. Черняк, О. М. Бондаренко, Т. В. Коваленко

Науково-аналітичний центр критичних технологій навігаційного приладобудування
при Національному технічному університеті України «Київський політехнічний інститут», Київ

Надійшла до редакції 03.08.99

Побудована фізико-математична модель ефекту чутливості пневмомеханічної автоколивальної системи до тиску газу, розглянуті базові функціональні схеми побудови вимірювальних перетворювачів тиску та різниці тиску на основі такої системи і отримані аналітичні вирази для залежності їхньої частоти коливань від вимірюваного тиску та чутливості до тиску, вироблені рекомендації щодо проектування та вдосконалення таких приладів.

Створення сучасних систем вимірювання висотно-швидкісних параметрів літальних апаратів, автоматичного регулювання та діагностики їхніх двигунів пов'язане з розробкою прецизійних вимірювальних перетворювачів тиску (ВПТ), що забезпечують високі метрологічні та експлуатаційні характеристики. ВПТ з пневмомеханічним резонатором (ПМР) є одним із найперспективніших типів таких вимірювальних перетворювачів [9].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Базовим функціональним перетворювачем ВПТ з ПМР є пневмомеханічна автоколивальна система (рис. 1, а), вихідна частота якої залежить від вимірюваного тиску. Вона складається із пневмомеханічного резонатора ПМР, системи збудження СЗ та системи реєстрації СР коливань ПМР і широкополосного підсилювача П, що компенсує втрати енергії за період коливань ПМР. ПМР включає плоску пневмокамеру, заповнену газом, та плоский резонуючий елемент (рис. 1, б), який здійснює коливання з власною резонансною частотою ПМР поблизу нерухомого газонепроникного екрану 4. Будову резонуючого елемента умовно представлено

у вигляді жорсткої ефективної частини 1 з робочою поверхнею площею $S_{\text{эф}}$, утримуваної на пружних елементах 2, а пневмокамера утворена щілинним зазором 3. Позначені також підсилювач 5, електроди ємнісних систем реєстрації 6 та систем збудження 7. Нумерація елементів 1—5 надалі залишається незмінною на усіх рисунках.

Умовою роботоздатності ПМР є таке мале значення зазору δ , що газ внаслідок своєї в'язкості не встигає витікати із зазору (або натікати в нього) за півперіод коливань резонуючого елемента у вакуу-

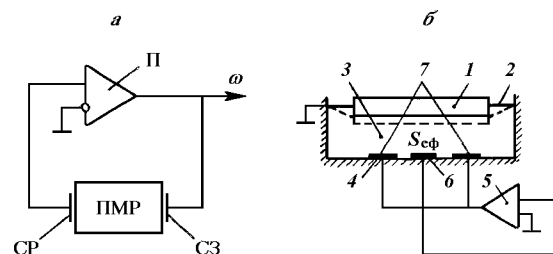


Рис. 1. Пневмомеханічна автоколивальна система (а) та пневмомеханічний резонатор (б): 1 — жорстка ефективна частина, 2 — пружні елементи, 3 — щілинний зазор, 4 — нерухомий газонепроникний екран, 5 — підсилювач, 6 — електроди ємнісної системи реєстрації (СР), 7 — електроди системи збудження (СЗ)

мі. В цьому випадку стиснення (розширення) газу дає внесок у еквівалентну жорсткість ПМР $c_{пг}$. Вона залежить від тиску подаваного до зазору газу та конструктивних параметрів пневмокамери і нижче називатиметься жорсткістю пружного середовища, або приєднаною жорсткістю резонуючого елемента. Крім того, за прискореного руху резонуючого елемента в газовому середовищі до його поверхні буде «прилипати» частина газу, що даватиме внесок у еквівалентну масу ПМР — приєднану масу $m_{пр}$, що залежить від геометрії пневмокамери та резонуючого елемента і густини газу. Ці два параметри відповідно будуть впливати на власну частоту ω коливань ПМР.

З метою підвищення чутливості ВПТ до вимірюваного тиску і послаблення впливу невимірюваних величин (температури, густини газу, інерційності газу та резонуючого елемента, гіроскопічних ефектів і т. н.) доречно використати дві автоколивальні системи, що отримують дію від вимірюваної величини протилежного, а від невимірюваних величин — однакового характеру, об'єднані за відомою у приладобудуванні диференціальною схемою.

Нижче будуть отримані та досліджені аналітичні функції перетворення ПМР з резонуючим елементом із зосередженими та розподіленими параметрами, показані можливості створення ВПТ з такими ПМР та вироблені рекомендації щодо їхнього проектування.

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ФІЗИЧНОГО ЕФЕКТУ ЧУТЛИВОСТІ ЧАСТОТИ ГЕНЕРАЦІЇ ПНЕВМОМЕХАНІЧНОЇ АВТОКОЛИВАЛЬНОЇ СИСТЕМИ ДО ВИМІРЮВАНОГО ТИСКУ ГАЗУ

Вихідні положення та умова роботоздатності ПМР. Для отримання функції перетворення описаного ПМР вводимо наступні спрощуючі твердження.

1. Величини зазорів ПМР δ набагато менші довжини звукової хвилі в середовищі, що заповнює зазор, тому в практичних розрахунках можна користуватись середніми значеннями густини ρ і тиску P вздовж товщини зазору [7];

2. Швидкість зміни об'єму пневмокамери, а значить, густини та температури пружного середовища, набагато більша від швидкості протікання теплових процесів, тому запас тепла в пневмокамері за період коливань резонуючого елемента залишається практично постійним. Це є умовою адіабатності термодинамічного процесу в пневмокамері [7];

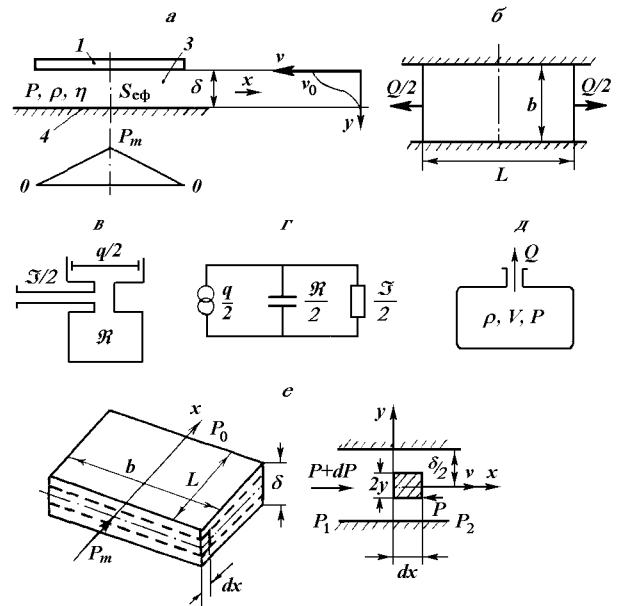


Рис. 2. Допоміжні схеми (див. текст)

3. Амплітуда коливань резонуючого елемента мала в порівнянні з його товщиною h та величиною щільного зазору ПМР, внаслідок чого малі і відхилення тиску $P = P - P_0$ від його постійної складової P_0 . Ця постійна складова задається зовнішнім до пневмокамери об'ємом, досить великим у порівнянні з обсягом пневмокамери.

Розглянемо пневмокамеру у вигляді щільного зазору z між плоскою ефективною частиною I резонуючого елемента і близьким до неї газонепроникним екраном 4 (рис. 2, а). Для визначеності задамо прямокутну форму ефективною частини I (довжина L та ширина b), а також крайові умови: вздовж довжини пластинки зазор ізолюваний, тому витікання газу можливе лише у двох рівноцінних напрямках — через два вільні контури вздовж ширини пластинки (рис. 2, б). Вважаємо, що максимальний тиск P_m у зазорі після різкого стиснення газу ефективною частиною I , що рухається, увесь час витікання газу буде в центральному поперечному перетині пневмокамери (ЦПП), а вздовж її ширини тиск практично не змінюється. Тому процес витікання вважатимемо одномірним — вздовж координати x , що відкладається від центра зазору до одного з вільних контурів витікання газу. Через ЦПП газ не буде перетікати, тому, не порушуючи фізики процесу, можна умовно провести непроникну стінку крізь ЦПП та розглянути лише одну з рівноцінних «половинок» пневмокамери обабіч перетину.

На основі твердження 3 задамося лінійною зміною малого надлишкового тиску \bar{P} за координатою x від $\bar{P}_m = P_m - P_0$ в центрі до $\bar{P}_0 = 0$ на вільному контурі

$$\bar{P} = \bar{P}_m \left(1 - \frac{2x}{L}\right). \quad (1)$$

Такий фрагмент пневмокамери легко замінити приведеною на рис. 2, в еквівалентною пневмостемою (ЕПС) із зосередженими параметрами. Вона складається із половинок пневматичного опору пневмокамери $\mathfrak{S}/2$, постійної ємності пневмокамери $\mathfrak{R}/2$ та змінного джерела об'ємної швидкості $q/2$, яка зв'язана з прогином w_m резонуючого елемента через оператор диференціювання: $q = d/dt(S_{\text{эф}}w_m)$. Ці елементи з'єднані між собою короткими каналами, що не чинять опору потоку газу. Також на основі твердження 3 вважаємо, що зміни площі поперечного перетину пневмокамери за півперіод коливань резонуючого елемента менші, ніж загальна площа перетину $S_c = b\delta$, і на загальні \mathfrak{R} та \mathfrak{S} практично не впливають. Стан такої ЕПС повністю описується значеннями тиску P на з'єднувальних елементах і об'ємною швидкістю $Q = v_r S_c$ через ці елементи, де v_r — швидкість газу, що протікає через S_c .

Функціональну схему ЕПС (рис. 2, в) зручно представити у вигляді наведеної на рис. 2, г електричної схеми аналога [8], що є схемою аперіодичної ланки першого порядку (паралельно з'єднані ємність та опір) з постійною часу T_p [4]

$$T_p = \frac{\mathfrak{S}\mathfrak{R}}{4}. \quad (2)$$

Вона ж є постійною часу ЕПС (рис. 2, в) та вихідної пневмокамери, зображеної на рис. 2, а.

Загальну пневматичну ємність \mathfrak{R} представимо у вигляді посудини з незмінним об'ємом V , що дорівнює об'єму пневмокамери (рис. 2, д). Із твердження 3 витікає, що рух середовища всередині посудини малий, і можна знехтувати втратами на тертя та інерцію газу в порівнянні з його податливістю (ємністю \mathfrak{R}). Виходимо із закону (3) зміни маси газу M у посудині, рівняння Пуассона (4), що описує адіабатний процес [7], для початкового та віддаленого від нього на малий проміжок dt моментів часу і виразу (5) для тиску P' у посудині через його приріст dP :

$$\frac{dM}{dt} = \rho Q, \quad (3)$$

$$\frac{P'}{\rho^\gamma} = \frac{P_0}{\rho_0^\gamma} = \text{const}, \quad (4)$$

де

$$P' = P_0 - dP, \quad (5)$$

Тут γ — коефіцієнт Пуассона для газу, ρ_r — густина газу в початковий момент часу. Виключаючи з цих рівнянь P' і ρ та зважаючи на те, що густина газу ρ за час dt мало змінюється, і користуючись наближенням

$$(1 - \rho Q dt / M)^\gamma \approx 1 - \gamma \rho Q dt / M,$$

отримуємо залежність $Q = \mathfrak{R} dP / dt$, де

$$\mathfrak{R} = \frac{V}{\gamma P_0} = \frac{V}{\rho_r c_{\text{зв}}^2} = \frac{L b \delta}{\rho_r c_{\text{зв}}^2} \quad (6)$$

— загальна пневматична ємність пневмокамери.

Загальний пневматичний опір пневмокамери розглянемо як опір прямокутної щілини, показаної на рис. 2, е. Виходячи з умови рівноваги усіх сил, що діють на елементарну ділянку газу довжиною dx та шириною b , в межах якої густина постійна,

$$-2Pby + 2(P + dP)by - 2bdx\tau = 0,$$

та закону в'язкого тертя Ньютона для дотичного напруження $\tau = \eta dv_r / dy$, де η — коефіцієнт динамічної в'язкості газу, маємо

$$y \frac{dP}{dx} = \eta \frac{dv_r}{dy}.$$

Якщо це рівняння за крайової умови $v_r|_{y=\delta/2} = 0$ проінтегрувати за координатою y і знайти середню швидкість газу $v_{\text{ср}}$, то з урахуванням лінійної залежності (1) можемо записати вираз для об'ємної швидкості протікання газу через щілину

$$Q = v_{\text{ср}} S_c = P_m / \mathfrak{S},$$

де

$$\mathfrak{S} = \frac{12\eta L}{\delta^3 b} \quad (7)$$

— загальний пневматичний опір пневмокамери, що входить до виразу (2).

Задля виконання умови роботоздатності постійна часу пневмокамери повинна перевищувати півперіод коливань резонуючого елемента (час його переміщення із одного крайнього положення в інше), котрий обернено пропорційний власній частоті ω_0 вільних коливань резонуючого елемента у вакуумі: $T_p > (\omega_0)^{-1}$. Підставивши сюди вираз (2) з урахуванням (6) та (7) і зробивши нескладні перетворення, отримуємо аналітичний вираз для умови роботоздатності ПМР:

$$\delta < [\delta] = k^* L \sqrt{\frac{\nu \omega_0}{c_{\text{зв}}^2}}, \quad (8)$$

де $k^* = (6)^{0.5} \approx 2.45$, $[\delta]$ — допустимий зазор ПМР, $\nu = \eta / \rho_r$ — коефіцієнт кінематичної в'язкості газу.

Довільну форму ефективної частини плоского

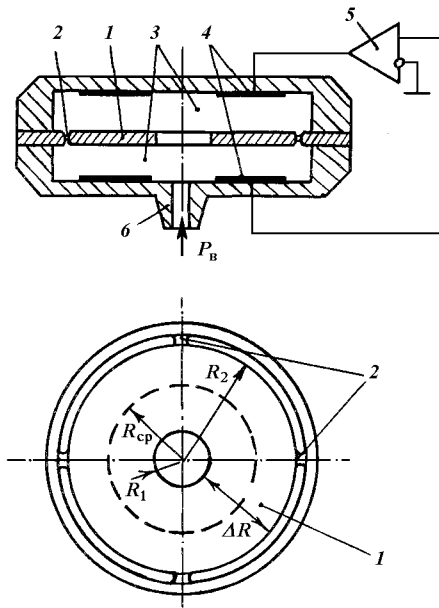


Рис. 3. Схема ВПТ з кільцевим резонатором (див. текст та позначення на рис. 1)

резонуючого елемента можна звести до еквівалентної прямокутної пластинки (ЕПП), що дорівнює за площею робочій поверхні ефективної частини $S_{\text{еф}}$ і має два характерні розміри — найбільший та найменший усереднений. Якщо ці розміри неспівмірні, то до виразу (8) підставляється менший. При співмірних сторонах ЕПП потрібно враховувати додаткові відтоки газу з пневмокамери, які зменшують загальний опір, а значить, і постійну часу пневмокамери та величину допустимого зазору $[\delta]$.

ВПТ з резонуючого елемента із зосередженими параметрами. Найближчою до схеми ПМР рис. 1, б є базова функціональна схема ВПТ з кільцевим резонатором (рис. 3). Такий ВПТ [3] можна вважати системою із зосередженими параметрами. Вимірюваний тиск P_v тут відразу подається через штуцер б до пневмокамер 3. Кільцеву пластинку згідно із запропонованою вище методикою подаємо у вигляді ЕПП площею $S_{\text{еф}} = \pi(R_2^2 - R_1^2)$, при її довжині $L = \Delta R = R_2 - R_1$ та ширині $b = S_{\text{еф}}/\Delta R = \pi(R_2 + R_1)$, а пневмокамеру під нею вважаємо також ізольованою (вздовж поперечного контуру в окружному напрямі по вихідному кільцевому зазору перепадів тиску не буде). Маємо умову роботоздатності ПМР (8), яка повністю збігається з отриманою експериментально авторами [3], з коефіцієнтом $k^* = 2.45$, значення котрого попадає у заданий ними діапазон $k^* = 1...3$.

Для знаходження жорсткості пружного середовища $c_{\text{пс}}$ візьмемо рівняння Пуассона у формі $PV^\gamma = \text{const}$, де $V = S_{\text{еф}}(\delta \pm w_n)$. Прирівнюючи ліві частини рівнянь Пуассона для нейтрального та довільного положення ефективної частини 1 отримуємо вираз для тиску у пневмокамері: $P = P_v(V_0/V)^\gamma$. Тут P_v та $V_0 = S_{\text{еф}}\delta$ — тиск у пневмокамері та її об'єм за нейтрального положення ефективної частини. Нехай для визначеності у пневмокамері 4 відбулося стиснення. Беручи до уваги, що витіснений ефективною частиною об'єм $\Delta V = V_0 - V \ll V_0$, то надлишковий тиск у пневмокамері, викликаний зменшенням об'єму, визначатиметься виразом

$$\Delta P = P - P_v = P_v \left[\left(\frac{V_0}{V_0 - \Delta V} \right)^\gamma - 1 \right] \approx \gamma P_v \frac{\Delta V}{V_0}.$$

Сила, що діє з боку стиснутого пружного середовища на ефективну частину, дорівнює

$$F_{\text{пс}} = \Delta P S_{\text{еф}} = c_{\text{пс}} w_n,$$

де

$$c_{\text{пс}} = \frac{F_{\text{пс}}}{w_n} = \frac{\gamma}{\delta} P_v \frac{\Delta V}{w_n}, \quad (9)$$

— шукана жорсткість пружного середовища. За адиабатного розширення газу зміниться лише знак сили $F_{\text{пс}}$. У випадку розглядуваного тут резонуючого елемента з ефективною частиною незмінної форми (жорстке кільце)

$$c_{\text{пс}} = \frac{\gamma}{\delta} P_v S_{\text{еф}}. \quad (10)$$

Для отримання аналітичного виразу для частоти коливань ПМР з довільним типом резонуючого елемента універсальною та найшвидшою є формальна методика, заснована на балансі максимальної кінетичної енергії коливань ПМР та максимального приросту його потенціальної енергії:

$$T_{\text{max}} = \Delta U_{\text{max}}, \quad (11)$$

котрі в свою чергу складаються з енергій складових частин ПМР (резонуючого елемента та пружного середовища):

$$\begin{aligned} T_{\text{max}} &= T_{\text{пе}} + T_{\text{пс}}, \\ \Delta U_{\text{max}} &= \Delta U_{\text{пе}} + \Delta U_{\text{пс}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Для резонуючого елемента із зосередженими параметрами вирази для цих складових мають відомий з механіки [7, 10] вигляд:

$$T_{\text{пе}} = \frac{m_{\text{пе}} v_0^2}{2}, \quad T_{\text{пс}} = 2\rho_r \int_V \frac{v_c^2}{2} dV, \quad (13)$$

$$\Delta U_{pe} = c_{pe} \frac{w_M^2}{2}, \quad \Delta U_{nc} = 2c_{nc} \frac{w_M^2}{2}, \quad (14)$$

де $m_{pe} = \rho_0 S_{pe} h$ — маса резонуючого елемента, котра задіяна у коливаннях; ρ_0 — густина матеріалу резонуючого елемента, S_{pe} — площа поверхні резонуючого елемента, яка задіяна у коливальному процесі, h — його товщина, v_0 — максимальна швидкість руху резонуючого елемента; v_c — швидкість руху частинок пружного середовища у пневмокамері під час проходження резонуючого елемента нейтрального положення; c_{pe} — жорсткість пружних елементів резонуючого елемента. Множник 2 в чисельнику виразу для T_{nc} та ΔU_{nc} означає, що згідно з рис. 3 обабіч резонуючого елемента знаходяться дві однакові пневмокамери 3.

Розподіл швидкостей частинок газу по товщині зазору (координаті y на рис. 2, а) апроксимуємо функцією $v_c(y) = v_0 [1 - (y/\delta)^2]^2$, котра задовольняє умову непроникності поверхонь резонуючого елемента та газонепроникного екрану ($v_c(0) = v_0$, $v_c(\delta) = 0$ [10]), і знайдемо інтеграл із виразу (13)

$$\int v_c^2 dV = \int_0^\delta v_0^2 \left[1 - \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 \right]^4 S_{pe} dy \approx 0.35 \rho_r S_{pe} \delta. \quad (15)$$

Враховуючи, що для автоколивального режиму роботи ПМР $v_0^2 = \omega^2 w_M^2$ [10], підставимо вирази (12) до виразу (11), зробимо нескладні перетворення з урахуванням рівнянь (10), (13)—(15) і отримаємо необхідний вираз для квадрата частоти коливань ПМР:

$$\omega^2 = \left(\omega_0^2 + \frac{2\gamma P_B}{k_S \rho_0 h \delta} \right) \frac{1}{1 + \eta_M},$$

де $\omega_0^2 = c_{pe}/m_{pe}$, $k_S = S_{pe}/S_{эф}$ — коефіцієнт ефективної площі; $\eta_M = \rho_r \delta / (\rho_0 h)$ — коефіцієнт впливу приєднаної маси на частоту коливань ПМР.

ВПТ з резонуючого елемента із розподіленими параметрами. Розглянемо спочатку ВПТ з резонуючим циліндром, запропонований у роботі [2] (рис. 4). Внаслідок антисиметричності відносно вузлових ліній 7 процесу перетікання газу між пучностями коливань 8 тиск у кільцевому зазорі 3 на вузлових діаметрах майже незмінний та дорівнює тиску подаваного до зазору газу P_B . Тоді зазор поділяється на незалежні ділянки або пневмокамери, допустима величина зазору для котрих повністю характеризує перетікання газу по зазору в цілому. Звичайно $\delta < R_0$, і тому можна замінити ділянку циліндра між сусідніми вузловими лініями 7 на ЕПП довжиною $L = \pi R_0/n$ (розмір ділянки по

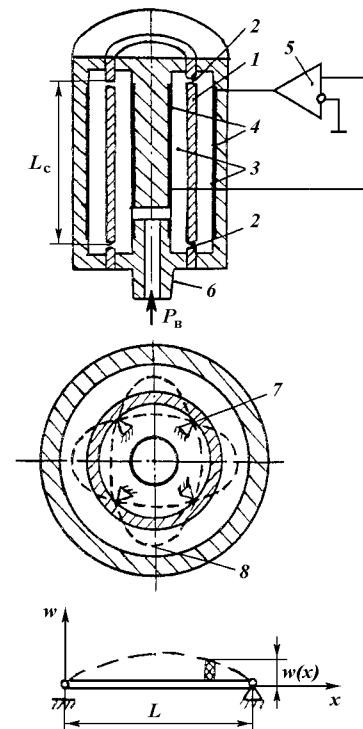


Рис. 4. ВПТ з резонуючим циліндром (див. текст та позначення на рис. 1)

колу), де R_0 — радіус циліндра, n — число вузлових діаметрів, та шириною $b = L_c$, де L_c — довжина циліндра вздовж твірної, і площею робочої поверхні $S_d = LL_c$. Задля механічної розв'язки циліндра із основою намагаються зробити також $L_c > R_0$ [5], а значить, $L_c > L$, і тому відтоками газу у осьовому напрямку можна знехтувати. Тоді маємо пневмокамеру з ЕПП, що описується виразом (8) з $k^* \approx 2.45$. Підставляємо вираз для довжини L у вираз для $[\delta]$ із нерівності (8) і отримуємо

$$[\delta] = \frac{k^* \pi R_0}{n} \sqrt{\frac{\nu \omega_0}{c_{3B}^2}} \approx 7.7 \frac{R_0}{n} \sqrt{\frac{\nu \omega_0}{c_{3B}^2}}.$$

Цей вираз дає значення допустимого зазору, близькі до тих, що визначаються за більш точною емпіричною формулою, отриманою в роботі [2]:

$$[\delta]_T = k_T^* \frac{R_0}{n} \sqrt[3]{\frac{\nu f_0}{c_{3B}^2}},$$

де $f_0 = \omega_0/(2\pi)$, $k_T^* = 2...6$. Наприклад, для $f_0 = 4$ кГц, $R_0 = 6.85 \cdot 10^{-3}$ м, $\nu = 1.32 \cdot 10^{-5}$ м²/с, $c_{3B} = 332$ м/с (при $T_0 = 0^\circ\text{C}$), $n = 2$, $w_0 = 2\pi f_0 = 2.52 \cdot 10^4$ рад/с; $[\delta] \approx 49$ мкм, і якщо узяти із

представленого в [2] діапазону значення $k_T^* = 2$, то $[\delta]_T \approx 56$ мкм. Як бачимо, відносна похибка розрахунку складає 12.5 %.

Зауважимо, що приблизна формула дає трохи занижені результати (значення k_T^* ближче до нижньої межі діапазону) внаслідок нехтування кривизною циліндра та газонепроникного екрану, яка збільшує реальний опір перетіканню газу, тому ПМР з допустимим зазором, підрахованим за приближною формулою, буде напевно роботоздатною. До того ж, користуючись приближною формулою для $[\delta]$, можна отримати просту аналітичну залежність допустимого зазору від конструктивних параметрів резонуючого циліндра. Підставляючи в неї вираз для частоти коливань циліндра у вакуумі [5]

$$\omega_0 \approx \frac{n^2}{R_0^2} \sqrt{\frac{D}{\rho_0 h}}, \quad (16)$$

де $D = E_0 h^3 [12(1 - u^2)]^{-1}$ — циліндрична жорсткість циліндра, ρ_0 , E_0 та u — густина, модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона матеріалу циліндра, отримуємо

$$[\delta] \approx 4.13 \sqrt{h} \sqrt{\frac{\nu}{c_{зв}^2}} \sqrt[4]{\frac{E_0}{\rho_0(1 - u^2)}}.$$

Як бачимо, для практики досить знати, що допустимий зазор ПМР ВПТ з циліндричним резонатором залежить від кореня квадратного від товщини резонатора та слабо залежить від властивостей його матеріалу.

При коливаннях резонуючого циліндру на згин (рис. 4) відхилення його середньої поверхні вздовж вузлових діаметрів 7 будуть величинами другого порядку малості відносно амплітуди зміни радіусів пучностей δ , і ними можна знехтувати, умовно вважаючи циліндр шарнірно закріпленим вздовж вузлових ліній. ЕПП тоді є шарнірно закріпленою на двох протилежних краях і вільною по двох інших ($L_0 > R_0$), при цьому частота коливань вибраної ЕПП у вакуумі [10] і справді досить близька до частоти коливань циліндра в вакуумі [5]. Форма циліндричного прогину ЕПП під час коливань описується виразом $w(x) = w_m \sin(\pi x/L)$ [7], де x — координата, що відраховується від одного з шарнірно закріплених країв до іншого, а витіснений нею об'єм становить

$$\Delta V = \int_0^L w_m \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right) L_c dx = \frac{2}{\pi} w_m S_d.$$

Жорсткість пружного середовища згідно з формулою (9)

$$c_{пс} = \frac{2}{\pi} \frac{\gamma}{\delta} P_b S_d. \quad (17)$$

Швидкість кожної точки ЕПП v_n змінюється у відповідності до форми її прогину: $v_n(x) = dw(x)/dt = v_0 \cos(\pi x/L)$, де $v_0 = dw_n/dt$, тому швидкість частинок пружного середовища змінюватиметься в залежності і від товщини (координата y), і від довжини (координата x) пневмокамери: $v_c = v_0 [1 - (y/\delta)^2] \cos(\pi x/L)$. Відповідно система рівнянь (13) для ЕПП матиме вигляд

$$T_{pe} = \omega^2 \Theta_{pe}, \quad T_{пс} = \omega^2 \Theta_{пс}, \quad (18)$$

де

$$\begin{aligned} \Theta_{pe} &= \frac{b \rho_0 h}{2} \int_0^L w_m^2 \cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx = \frac{\rho_0 h}{2} S_d \frac{w_m^2}{2}, \\ \Theta_{пс} &= 2 \rho_r b \int_0^\delta \int_0^L \frac{w_m^2}{2} \left[1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2\right]^4 \cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx dy = \\ &= 0.35 \rho_r \delta S_d \frac{w_m^2}{2}. \end{aligned}$$

Знову підставляючи вирази (14) та (18) до формул (12) з урахуванням виразу для $c_{пс}$ (17), а ті, в свою чергу, — до рівняння балансу енергій (11), отримуємо вираз для квадрата власної частоти коливань ПМР:

$$\omega^2 = \frac{\Delta U_{pe} + \Delta U_{пс}}{\Theta_{pe} + \Theta_{пс}} = \left(\omega_0^2 + \frac{2k_p P_b}{\rho_0 h \delta}\right) \frac{1}{1 + \eta_m}, \quad (19)$$

де $k_p = 4\gamma/\pi$, $\eta_m = \Theta_m/\Theta_{pe} = 0.7 \rho_r \delta / (\rho_0 h)$, $\omega_0^2 = \Delta U_{pe}/\Theta_{pe}$ — добре відомий квадрат власної частоти коливань циліндра в вакуумі [5], котра відповідає виразу (16). Якщо не враховувати впливу приєднаної маси (коефіцієнта η_m), то вираз (16) повністю збігається з емпіричним [2], а значення коефіцієнта k_p є близьким до значення, знайденого експериментально [2] (для повітря та багатьох інших газів $\gamma = 1.4$ і $k_p = 1.8 \approx 2$).

Хоча обрана нами формальна методика знаходження частоти коливань ПМР, заснована на законі збереження повної механічної енергії, може повністю задовольнити потреби проектування ВПТ з ПМР, корисно також розглянути методику якісного рівня, що використовує заміну вихідної коливальної системи еквівалентною їй по значенню власної частоти системою із зосередженими параметрами, що складається з еквівалентної точкової маси $m_{ек} = m_{pe} + m_{пр}$ і пружини з еквівалентною жорсткістю $c_{ек} = c_{pe} + c_{пр}$, де c_{pe} та m_{pe} — еквівалентні жорсткість та маса резонуючого елемента, $c_{пр}$ та $m_{пр}$ — його приєднані жорсткість та маса. Квадрат кругової частоти коливань еквівалентної системи [8]:

$$\omega^2 = \frac{c_{ек}}{m_{ек}} = \frac{c_{ре} + c_{пр}}{m_{ре} + m_{пр}}. \quad (20)$$

Проаналізуємо цю методику на прикладі ВПТ із резонуючою мембраною, запропонованого в роботі [1] (рис. 5).

Ємність пневмокамери 3 ПМР $4\mathfrak{R} = \pi R_M^2 \delta_M / (\rho_r c_{зв}^2)$, де R_M — радіус мембрани, δ_M — стала величина зазору між мембраною 1 та газонепроникним екраном 4. Пневматичний опір капіляра 6 довжиною l_k та радіусом r_k дається виразом $\mathfrak{S} = 8\eta l_k / (\pi r_k^4)$. Маємо систему із зосередженими параметрами, електрична схема аналога котрої подібна до схеми, приведеної на рис. 2, з, а її постійна часу

$$T_P = \mathfrak{S}\mathfrak{R} = \frac{8\nu l_k R_M^2 \delta_M}{r_k^4 c_{зв}^2},$$

звідки отримуємо умову роботоздатності для радіуса капіляра

$$r_k < [r_k] = 2 \sqrt[4]{R_M} \sqrt{\delta_M} \sqrt[4]{l_k} \sqrt[4]{\nu \omega_0 / c_{зв}^2}.$$

Для вільних коливань еластичної мембрани за формою з одним вузловим колом (вздовж контура заземлення мембрани) (рис. 5) прогини залежать лише від відстані, обумовленої радіусом r [10]: $w(r) = w_M \cos[\pi r / (2R_M)]$. Тоді витіснений мембраною об'єм

$$\Delta V = \int_0^{R_M} w_M \cos\left(\frac{\pi r}{2R_M}\right) 2\pi r dr = 4 \frac{\pi - 2}{\pi} w_M R_M^2 \approx k_v w_M S_M,$$

де $S_M = \pi R_M^2$ — площа поверхні мембрани, $k_v = 0.463$. Жорсткість пружного середовища згідно з формулою (9)

$$c_{пс} = 0.463 \frac{\gamma}{\delta_M} P_B S_M. \quad (21)$$

Присдану масу резонуючого елемента (здіяну у коливаннях масу пружного середовища) $m_{пр}$ визначимо, розділивши максимальну кінетичну енергію пружного середовища $T_{пс}$ на половину квадрата швидкості центра мембрани v_0 . Як і раніше, $T_{пс}$ виражаємо через розподіл швидкостей частинок пружного середовища в зазорі $v_c = v_{ср} [1 - (y/\delta_M)^2]^2$, де $v_{ср} = k_v v_0$ — середня за площею мембрани максимальна швидкість резонуючого елемента:

$$m_{пр} = \frac{T_{пс}}{v_0^2/2} = \frac{2}{v_0^2} 2\rho_r S_M \int_0^{\delta} \frac{v_{ср}^2}{2} \left[1 - \left(\frac{y}{\delta_M}\right)^2\right]^4 dy = 0.15\rho_r \delta_M S_M. \quad (22)$$

Через те що форма прогинів круглої еластичної мембрани під час коливань з нижчою власною частотою близька до форми прогинів під дією

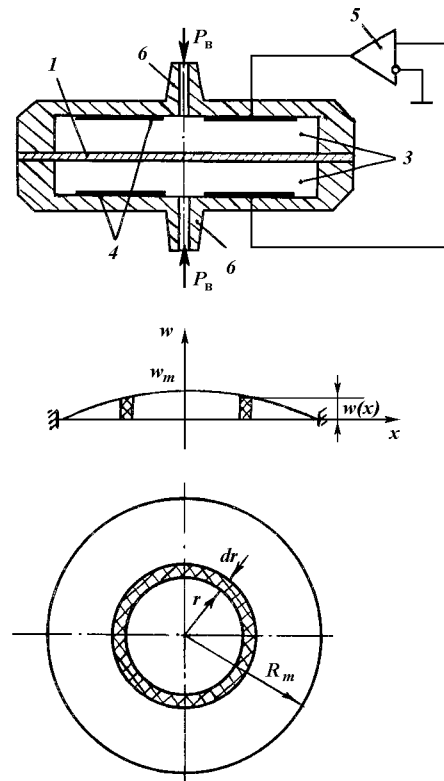


Рис. 5. ВПТ з резонуючою мембраною (див. текст та позначення на рис. 1)

перепаду тиску на ній [8], за $c_{ре}$ краще взяти її жорсткість за тиском, тим більше що жорсткість пружного середовища в пневмокамерах теж розподілена по поверхні мембрани:

$$c_{ре} = \frac{4h\sigma_0 S_M}{R_M^2}, \quad (23)$$

де σ_0 — попередній натяг мембрани. Еквівалентну масу резонуючого елемента приблизно знайдемо із табульованого виразу [10] для кругової частоти вільних коливань мембрани

$$\omega_0^2 = \left(\frac{2.404}{R_M}\right)^2 \frac{\sigma_0}{\rho_0} = \frac{c_{ре}}{m_{ре}}.$$

Тобто

$$m_{ре} = 0.692\rho_0 h S_M. \quad (24)$$

Тепер з урахуванням виразів (21)—(24) та того, що $c_{пр} = 2c_{пс}$ (дві рівні пневмокамери обабіч резонуючого елемента), формула (20) прийме вигляд

$$\omega^2 = \left(\omega_0^2 + \frac{2k_p P_B}{\rho_0 h \delta_M}\right) \frac{1}{1 + \eta_M}, \quad (25)$$

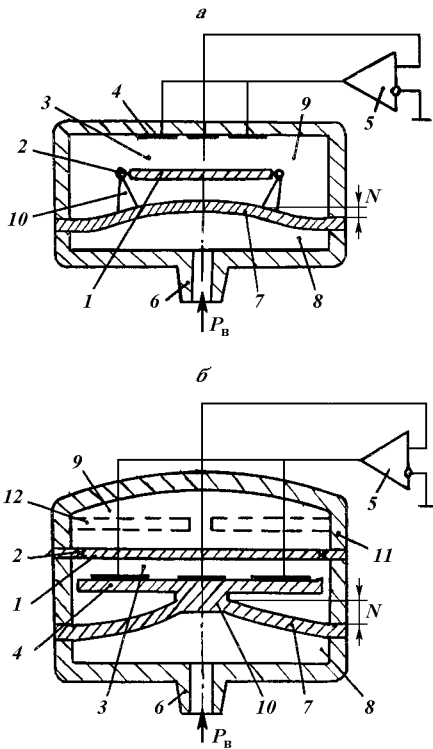


Рис. 6. ВПРТ з кільцевим резонатором (див. текст та позначення на рис. 1); а — з рухомими опорами, б — з рухомих екраном

де $k_p = 0.67\gamma$, $\eta_m \approx 0.2\rho_r\delta_m/(\rho_0h)$. Без урахування впливу приєднаної маси η_m вираз (25) повністю збігається з емпіричним [1, 3] (для повітря та багатьох інших газів $\gamma = 1.4$ і $k_p = 0.94 \approx 1$).

Вимірювальні перетворювачі різниці тиску з ПМР. У вимірювальних перетворювачів різниці тиску (ВПРТ) частота коливань ПМР залежить від змінної величини щілинного зазору δ , котра визначається прогином мембрани 7 (рис. 6) від перепаду тиску на ній між вимірюваним P_B в надмембранній 8 та незмінним P_0 в підмембранній 9 порожнинах ВПРТ за посередництвом рухомих опор (жорсткого центру) 10 і зв'язаних з ними елементів ПМР.

Квадрат власної частоти коливань ПМР з кільцевим резонатором з одним газонепроникним екраном без урахування приєднаної маси при умові $k_s \approx 1$ становить

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{\gamma P_0}{\rho_0 h \delta}. \quad (26)$$

Якщо не враховувати малу зміну розтягуючих зусиль у розтяжках 2 (рис. 6, а) та кута нахилу опор, то від вимірюваного тиску залежатиме лише

величина щілинного зазору ПМР $\delta = \delta_0 - z$, де z — прогин опор 10 (або жорсткого центру 10 схеми на рис. 6, б), δ_0 — вихідний зазор ПМР при нейтральному положенні мембрани 7. Вибираємо мембрану 7 настільки товстою ($R_n/\eta_n < 25$), щоб її прогини були пропорційні перепаду тиску на ній [6]: $z = \text{const} \cdot \Delta P$, де $\Delta P = P_B - P_0$. Параметри мембрани 7 підбираються таким чином, щоб за максимального значення вимірюваного тиску $P_{\text{вм}}$ її прогин в точках закріплення опор (прогин жорсткого центру) 10 був максимально допустимим — z_0 , звідки знаходимо невідому константу: $\text{const} = z_0/P_{\text{вм}}$, де $P_{\text{вм}} = P_B - P_0$ — максимальний перепад тиску на мембрані 7. Тепер вираз для зазору ПМР матиме вигляд $\delta = \delta_0 - z_0 \Delta P / P_{\text{вм}} = (z_0 / P_{\text{вм}}) (P_B - P_0)$, а вираз (26) —

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{\gamma P_0}{\rho h \left[\delta_0 - \frac{z_0}{P_{\text{вм}}} (P_B - P_0) \right]}. \quad (27)$$

Узявши корінь квадратний із виразу (27) та ввівши нові позначення

$$K_z = \frac{\gamma P_0}{\omega_0 \rho_0 h \delta_0}, \quad D_f = \frac{K_z}{1 + \frac{z_0 P_0}{\delta_0 P_{\text{вм}}}}$$

$$D_n = \frac{z_0}{\delta_0 P_{\text{вм}}} \frac{1}{1 + \frac{z_0 P_0}{\delta_0 P_{\text{вм}}}}$$

отримуємо зручний вираз для частоти власних коливань ПМР ВПРТ:

$$\omega(P) = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{D_f}{1 - D_n P_B}}$$

Вплив приєднаної маси на частоту коливань ПМР такого ВПРТ можна врахувати також за формулою для η_m ВПТ з кільцевим резонатором з урахуванням того, що зазори обабіч резонуючого елемента неоднакові: $\eta_m = 0.35 \rho_r (\delta + \delta^*) / (\rho_0 h)$, де $\delta^* = V_{\text{зас}} / S_{\text{сф}}$ — величина приведенного зазору між резонуючим елементом і мембраною 7 (рис. 6, а) або кожухом 11 ВПРТ (рис. 6, б), $V_{\text{зас}}$ — об'єм цього зазору.

В табл. 1 наведені для кожної з розглянутих схем умови роботоздатності та формули для розрахунку залежності частоти коливань ПМР від вимірюваного тиску $f(P_B) = \omega(P_B) / (2\pi)$ (без урахування приєднаної маси і $k_s \approx 1$), чутливості до вимірюваного тиску $S(P_B) = df(P_B) / dP_B$ та інших необхідних для проектування ВПТ параметрів.

Таблиця 1. Основні розрахункові параметри ВПТ та ВПРТ

Базова функціональна схема	Умова робоздатності ПМР	Приєднана жорсткість $c_{ПС}$	Коефіцієнт впливу приєднаної маси η_M	Залежність частоти коливань ПМР від вимірюваного тиску $f(P_B)$	Чутливість до вимірюваного тиску $S(P_B)$
ВПТ з кільцевим резонатором (рис. 3)	$\delta < 2.45\Delta R(\nu\omega_0/c_{зв}^2)^{1/2}$	$2 \frac{\gamma}{\delta} S_{еф}P_B$	$\frac{0.7\rho_r\delta}{\rho_0h}$	$f_0(1 + K_p P_B)^{1/2}, K_p = \frac{2\gamma}{\omega_0^2\rho_0h\delta}$	$\frac{f_0}{2} \frac{K_p}{\sqrt{1 + K_p P_B}}$
ВПТ з резонуючим циліндром (рис. 4)	$\delta < 4.1 [hw/(c_{зв}^2)]^{1/2} \times [E_0/(\rho_0(1 - u^2))]^{1/4}$	$2 \frac{2\gamma}{\pi\delta} S_{п}P_B$	$\frac{0.7\rho_r\delta}{\rho_0h}$	$f_0(1 + K_p P_B)^{1/2}, K_p = \frac{2k_p}{\omega_0^2\rho_0h\delta}, k_p = (4/\pi)\gamma$	$\frac{f_0}{2} \frac{K_p}{\sqrt{1 + K_p P_B}}$
ВПТ з резонуючою мембраною (рис. 5)	$r_k < 2R_M^{1/2}(\delta l_k/c_{зв}^2)^{1/4} \times [\nu\omega_0/(c_{зв}^2)]^{1/4}$	$2 \frac{0.463\gamma}{\delta_M} S_M P_B$	$2 \frac{0.15\rho_r\delta_M}{\rho_0h}$	$f_0(1 + K_p P_B)^{1/2}, K_p = \frac{2k_p}{\omega_0^2\rho_0h\delta_M}, k_p = 0.67\gamma$	$\frac{f_0}{2} \frac{K_p}{\sqrt{1 + K_p P_B}}$
ВПРТ з кільцевим резонатором (рис. 6)	$\delta < 2.45\Delta R \times [\eta\omega_0/(\gamma P_0)]^{1/2}$	$\frac{\gamma}{\delta} S_{еф}P_B$	$\frac{0.35\rho_r(\delta + \delta^*)}{\rho_0h}$	$f_0[1 + D_i/(1 - D_n P_B)]^{1/2}, K_z = \frac{\gamma P_0}{\omega_0^2\rho_0h\delta_0}, D_i = K_z/[1 + z_0 P_0/(\delta_0 P_{max})], D_n = z_0/(\delta_0 P_{max} \times [1 + z_0 P_0/(\delta_0 P_{max})])$	$(f_0/2) D_i D_n / \{(1 - D_n P_B)^2 \times [1 + D_i/(1 - D_n P_B)]^{1/2}\}$

ЧИСЕЛЬНІ РОЗРАХУНКИ

Проведемо чисельні оцінки залежності окремих параметрів ПМР ВПТ від вимірюваного тиску P_B . Для цього задамося:

- частотою вільних коливань резонуючого елемента у вакуумі $f_0 = 4$ кГц, $\omega_0 = 2\pi f_0 \approx 2.51 \cdot 10^4$ с⁻¹;
- діапазонами вимірюваного тиску:
 - а) $P_{BM} = 1.3 \cdot 10^5$ Па, $P_0 = 0.5 \cdot 10^5$ Па;
 - б) $P_{BM} = 10^6$ Па, $P_0 = 10^5$ Па;
- типом газу — повітря при температурі 0°C з $\eta = 1.7 \cdot 10^{-5}$ кг/(м·с), $\gamma = 1.402$, $\rho_{HV} = 1.29$ кг/м³ (при $P_{HV} = 10^5$ Па), $c_{зв} = 332$ м/с²;
- матеріалом резонуючого елемента та мембрани 7 — сталь 36НХТЮ з $\rho_0 = 7.9 \cdot 10^3$ кг/м³, $E = 1.9 \cdot 10^{11}$ Па, $u = 0.28$;
- нижчою формою коливань резонуючого елемента: для мембрани — з коефіцієнтом форми $\alpha = 2.404$, для циліндра — з числом вузлових діаметрів $n = 2$;
- необхідними розмірами $R_2 = R_M = 2 \cdot 10^{-2}$ м, $R_1 = 0.5 \cdot 10^{-2}$ м, $R_0 = 6.85 \cdot 10^{-3}$ м, $\Delta R = 1.5 \cdot 10^{-2}$ м, $h = 2 \cdot 10^{-4}$ м, $\delta_M = 0.5 \cdot 10^{-4}$ м.

Величини допустимих параметрів ПМР для ВПТ та ВПРТ подані в табл. 2.

Результати розрахунків частоти $f(P_B)$ та чутливості $S(P_B)$ приведені на графіках рис. 7. Вплив приєднаної маси на частоту коливань ПМР $\Delta f_\eta/f_0 \approx \eta_M/2$ в означених діапазонах не перевищував 0.005 %.

АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ, ВИСНОВКИ І РЕКОМЕНДАЦІЇ

ВПТ з ПМР мають одноманітні характеристики у широкому діапазоні вимірюваного тиску. Наприклад, у діапазоні $1.3 \cdot 10^5$ Па дев'яці частоти складають 2–3 власні частоти коливань резонуючого елемента у вакуумі f_0 , чутливість ВПТ біля верхньої межі близько 0.04 Гц/Па і вища (до 0.075–0.18 Гц/Па) біля нижньої межі діапазону ($P_B \approx 0$). При проектуванні ВПТ величину допустимого щільного зазору ПМР потрібно вибирати за найбільшого тиску діапазону P_{BM} та найменшої температури подаваного газу. За таких умов згідно з виразом (6) допустимі зазори достатньо малими (табл. 2), і потрібно ставити більш жорсткі вимоги до чистоти та вологості газу.

ВПТ з ПМР доцільно використовувати як широкодіапазонні первинні перетворювачі барометричного висотоміра, а також для перевірки та градування інших ВПТ в лабораторних умовах.

Таблиця 2. Допустимі параметри ПМР ВПТ та ВПРТ

Верхня межа діапазону вимірювання, $P_{\text{ВМ}}, 10^5 \text{ Па}$	Базова функціональна схема			
	ВПТ з кільцевим резонатором (рис. 3)	ВПТ з резонуючим циліндром (рис. 4)	ВПРТ з кільцевим резонатором (рис. 6)	ВПТ з резонуючою мембраною (рис. 5)
	$[\delta], \text{ мкм}$			$[r_k], \text{ мкм}$
1.3	56	40	90	300
10	20	15	64	180

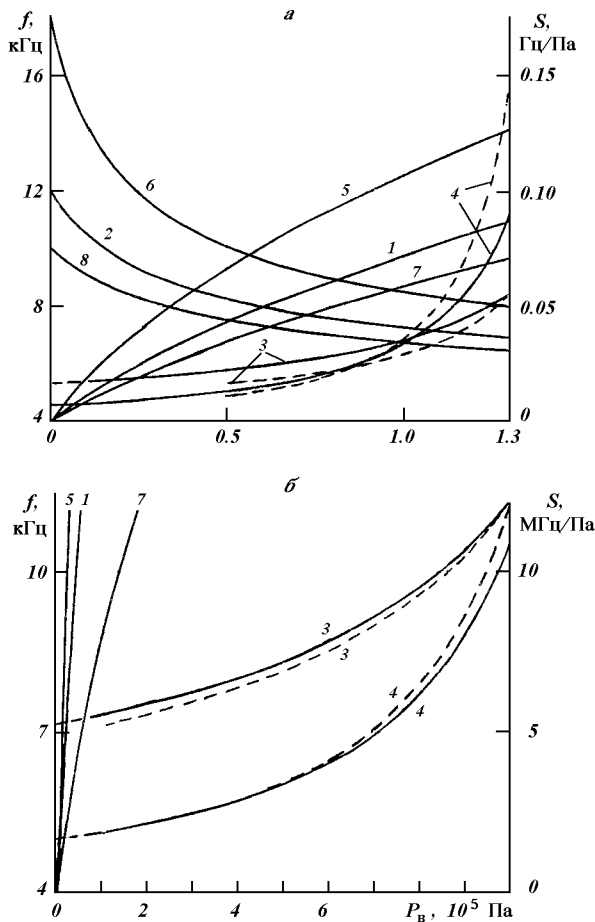


Рис. 7. Залежність частоти та чутливості від вимірюваного тиску $P_{\text{в}}$; криві 1 і 2 — частота f і чутливість S для ПМАС із кільцевим резонатором ВПТ; 3, 4 — з кільцевим резонатором ВПРТ відповідно; 5, 6 — для ВПТ із резонуючим циліндром; 7, 8 — для ВПТ із резонуючою мембраною

ВПРТ з пневмомеханічною автоколебальною системою малочутливий до малого тиску, меншого за внутрішній тиск у підмембранній порожнині ВПРТ P_0 , та має високу чутливість для $P_{\text{ВМ}} > P_0$. При проектуванні ВПРТ з метою підвищення корисної

девіації частоти та чутливості потрібно збільшувати величину вільного ходу z_0 , наприклад, виключаючи із вимірюваного діапазону ту область, до котрої ВПРТ малочутливий. Тоді максимальний прогин ППЕ знаходиться із умови $z_0 = [\delta] - \delta_{\text{мін}}$. Графічні залежності $f(P_{\text{в}})$ та $S(P_{\text{в}})$ для цього випадку мають вигляд, показаний на рис. 7, а та б штриховими лініями. Як бачимо, за $P_{\text{ВМ}} = 1.3 \cdot 10^5 \text{ Па}$ девіація частоти на ділянці $P_0 \dots P_{\text{ВМ}}$ збільшилась на 12 %, а чутливість біля верхньої межі — більш ніж на 60 %.

ВПРТ внаслідок наявності мембрани 7 практично не піддається впливу забруднень та вологості вимірюваного середовища, а вплив температури суттєво зменшується, що дозволяє врахувати зміну температури резонуючого елемента та газу у внутрішній порожнині ВПРТ за допомогою температурного вимірювача або другої пневмомеханічної автоколебальної системи. Тому ВПРТ з ПМР доцільно використовувати як первинний перетворювач тиску швидкісного потоку в системах вимірювання висотно-швидкісних параметрів або другого тиску, вищого ніж у підмембранній порожнині, у тому числі і тиску рідини.

ВПРТ з рухомими опорами має ту перевагу, що сили електростатичної дії електродів системи збурення, що знаходяться на нерухомому екрані 4, практично не впливають на мембрану 7 внаслідок малої жорсткості пружного елемента (рис. 6, а). У ВПРТ з рухомим екраном цю проблему можна розв'язати введенням додаткового нерухомого газонепроникного екрана 12 зі зворотного боку резонуючого елемента з малим щілинним зазором δ^* , за якого виконується умова роботоздатності ПМР (8) (рис. 6, б). Окрім цього, в електричному плані другий екран збільшує площу взаємодії резонуючого елемента з електродами системи реєстрації та системи збурення мембрани ПМР удвічі у порівнянні з ВПРТ з рухомими опорами. В механічному плані цей екран дозволяє підняти початкову частоту коливань резонуючого елемента до

$$f_{01} = f_0 \sqrt{1 + \frac{\gamma P_0}{\rho_0 h \delta^* (2\pi f_0)^2}},$$

тим самим збільшуючи величину вільного ходу мембрани 7 (допустимого зазору ПМР) і до певної межі збільшуючи корисну девіацію частоти. Завдяки цьому, а також механічній розв'язці мембрани та резонуючого елемента (кріпленню резонуючого елемента в нерухомій частині корпусу), ВПРТ, представлений схемою на рис. 6, б, набуває виключної технологічності виготовлення, а значить, найменшої собівартості та найбільшої перспектив-

ності його розробки у порівнянні з іншими розглянутими ВПТ з ПМР (рис. 3—6).

Отримані в статті теоретичні результати підтверджені експериментальними дослідженнями в роботах [1—3] і можуть бути використані розробниками прецизійних ВПТ для авіаційної та ракетно-космічної техніки.

1. А. с. 228992 СССР, МКИ⁴ G01L11/00. Датчик давления с частотным выходом / И. А. Горенштейн. — Оpubл. 17.10.68, Бюл. № 32.—2 с.
2. А. с. 748154 СССР, МКИ⁴ G01L11/00. Датчик абсолютного давления с частотным выходом / И. А. Горенштейн, В. Г. Кравцов. — Оpubл. 15.07.80, Бюл. № 26.—2 с.
3. А. с. 798523 СССР, МКИ⁴ G01L11/00. Частотный датчик давления / И. А. Горенштейн, В. Г. Кравцов. — Оpubл. 23.01.81, Бюл. № 3.—2 с.
4. Бессекерский В. А., Попов Е. А. Теория систем автоматического регулирования. — М.: Наука, 1972.—768 с.
5. Горенштейн И. А. Гидростатические частотные датчики первичной информации. — М.: Машиностроение, 1976.—184 с.
6. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1984.—832 с.

7. Ламб Г. Гидродинамика. — М.-Л.: ОГИЗ-Гостехиздат, 1947.—928 с.
8. Левшина Е. С., Новицкий П. В. Электрические измерения физических величин. Измерительные преобразователи. — Л.: Энергоатомиздат, 1983.—320 с.
9. Раков В. А., Тимошенко В. Г. Бортовые датчики давления: // Авиационная промышленность.—1990.—№ 10.—С. 88—99.
10. Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. — М.: Машиностроение, 1985.—472 с.

PHYSICOMATHEMATICAL MODELING OF TRANSDUSERS WITH PNEUMOMECHANICAL RESONATOR

M. G. Chernyak, O. M. Bondarenko, and T. V. Kovalenko

A physicomathematical model of the sensitivity of a pneumomechanical autovibrating system to the gas pressure is obtained. Basic functional diagrams for constructing pressure transducers based on this system are considered. Analytic expressions are obtained for the dependence of their vibrating frequency on the pressure measured and their sensitivity to pressure. Some recommendations on designing and improving of such devices are made.