

УДК 629.78:04(075.8)

К вопросу построения и решения уравнений колебаний криволинейных стержневых пространственных конструкций космического применения

С. В. Хорошилов, В. В. Шаповаленко

Институт технической механики НАНУ і НКАУ, Дніпропетровськ

Надійшла до редакції 01.02.99

Викладаються питання побудови рівнянь коливань криволинійних стержневих конструкцій космічного застосування. Розглядається метод розв'язання частотних рівнянь, який використовує властивості глобальної матриці жорсткості і мас конструкції. Ефективність цього методу підтверджується розрахунком динамічних характеристик для конкретної параболічної антени.

Многие из современных космических аппаратов (КА) имеют большие линейные размеры, причем аппараты, как правило, состоят из основного тела (корпуса) и присоединенных к нему элементов, таких как стержни (штанги) различного назначения, панели солнечных батарей, параболические антенны и др.

Полнота учета динамической взаимосвязи таких аппаратов как объектов управления и систем управления их ориентацией во многом определяет устойчивость и качество управления КА. Недооценка этого фактора неоднократно приводила к отрицательным последствиям. На современном этапе развития космической техники учет влияния упругости элементов конструкции стал необходимым.

Вращательное движение КА, представляющего собой твердый абсолютно жесткий корпус с присоединенными к нему нежесткими элементами, описывается известными динамическими уравнениями Эйлера и уравнениями, характеризующими движение присоединенных элементов. Для определения коэффициентов этих уравнений необходимо знание динамических характеристик (частот и форм собст-

венных колебаний) присоединенных элементов.

Методы расчета частот и форм колебаний стержней и панелей солнечных батарей разработаны достаточно хорошо. Однако для упругих криволинейных пространственных конструкций типа параболической антенны они практически неизвестны. Настоящая статья посвящена вопросам определения частот и форм собственных колебаний таких конструкций.

Для расчета собственных динамических характеристик больших нежестких трансформируемых конструкций используем метод конечных элементов [2]. Реальную конструкцию будем представлять моделью, состоящей из стержней, шарниров и точечных масс с соответствующими геометрическими, массовыми и диссипативными характеристиками.

Для описания деформаций узловых точек конструкции введем связанные с i -ми стержнями локальные системы координат $O_i X_i Y_i Z_i$ с началами O_i в точках соединения стержней. Зададим для каждого узла соединений обобщенные координаты, характеризующие деформации конструкции: \tilde{v}_{xi} , \tilde{v}_{yi} , \tilde{v}_{zi} — перемещения узла конструкции в направлении

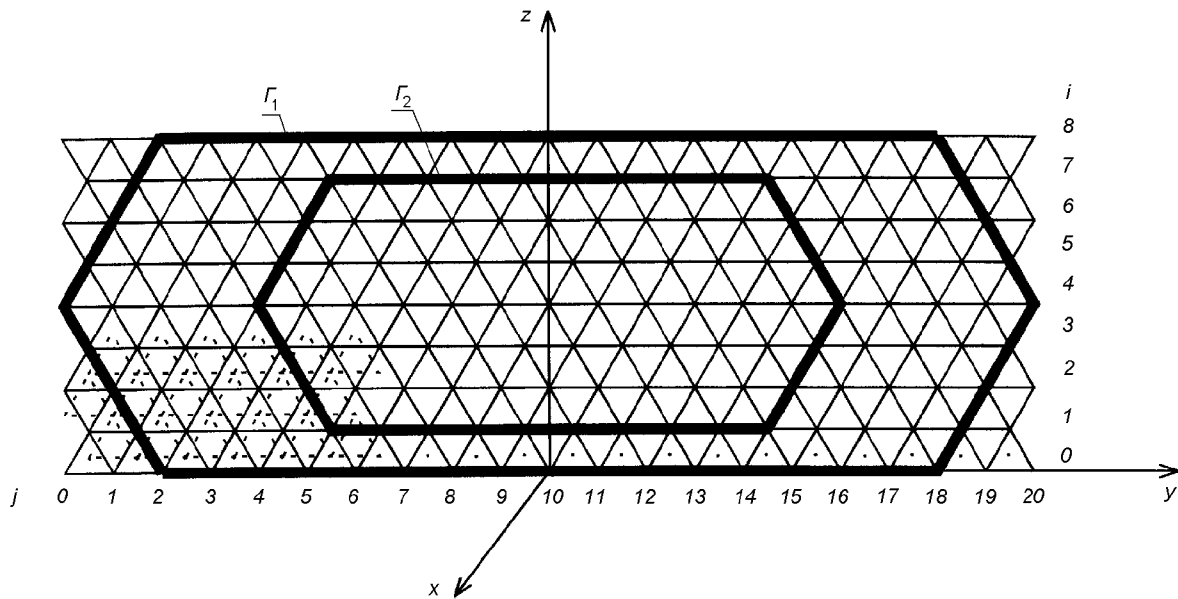


Рис. 1. Расчетная схема параболической антенны

осей O_1X_1 , O_1Y_1 , O_1Z_1 ; \tilde{p}_{x1} , \tilde{p}_{y1} , \tilde{p}_{z1} — повороты элементарного участка конструкции относительно соответственных осей.

Определим потенциальную энергию конструкции через обобщенные координаты перемещений в узлах конструкции.

Потенциальную энергию стержня можно представить в виде

$$\begin{aligned} \Pi_c = \frac{1}{2} \int_0^l \left[EJ_y \left(\frac{d^2 \tilde{v}_z(x)}{dx^2} \right)^2 + EJ_z \left(\frac{d^2 \tilde{v}_y(x)}{dx^2} \right)^2 + \right. \\ \left. + ES \left(\frac{d^2 \tilde{v}_x(x)}{dx^2} \right)^2 + GJ_p \left(\frac{d^2 \tilde{p}_x(x)}{dx^2} \right)^2 \right] dx, \quad (1) \end{aligned}$$

где l — длина стержня, E — модуль Юнга материала стержня, G — модуль сдвига, S — площадь поперечного сечения материала стержня, J_y , J_z — моменты инерции сечения стержня относительно осей локальной системы координат, J_p — полярный момент инерции.

Выражение (1) можно переписать в виде

$$\Pi_c = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{X}}_1^T \tilde{\mathbf{A}}_c \tilde{\mathbf{X}}_1, \quad (2)$$

где $\tilde{\mathbf{X}}_1^T = (\tilde{v}_{x1}, \tilde{v}_{y1}, \tilde{v}_{z1}, \tilde{p}_{x1}, \tilde{p}_{y1}, \tilde{p}_{z1}, \tilde{v}_{xj}, \tilde{v}_{yj}, \tilde{v}_{zj}, \tilde{p}_{xj}, \tilde{p}_{yj}, \tilde{p}_{zj})$ — вектор обобщенных координат в локальной системе координат (i соответствует началу, а j — концу стержня); $\tilde{\mathbf{A}}_c$ — симметричная и положительно определенная матрица, ненулевые элементы которой определяются формулами

$$\begin{aligned} a_{1,1} = \alpha_4 l^2, & \quad a_{1,7} = -\alpha_4 l^2, & \quad a_{2,2} = 12\alpha_2, \\ a_{2,6} = 72\alpha_2 l, & \quad a_{2,8} = -12\alpha_2, & \quad a_{2,12} = 6\alpha_2 l, \\ a_{3,3} = 12\alpha_1, & \quad a_{3,5} = -6\alpha_1 l, & \quad a_{3,9} = -12\alpha_1, \\ a_{3,11} = -6\alpha_1 l, & \quad a_{4,4} = \alpha_3 l^2, & \quad a_{4,10} = -\alpha_3 l^2, \\ a_{5,6} = 4\alpha_1 l^2, & \quad a_{5,9} = 6\alpha_1 l, & \quad a_{5,11} = 2\alpha_1 l^2, \\ a_{6,6} = 6\alpha_2 l^2, & \quad a_{6,8} = -6\alpha_2 l, & \quad a_{6,12} = 2\alpha_2 l^2, \\ a_{7,7} = \alpha_4 l^2, & \quad a_{8,8} = 12\alpha_2, & \quad a_{8,12} = -6\alpha_2 l, \\ a_{9,9} = 12\alpha_1, & \quad a_{9,11} = 6\alpha_1 l, & \quad a_{10,10} = \alpha_3 l^2, \\ a_{11,11} = 4\alpha_1 l^2, & \quad a_{12,12} = 4\alpha_2 l^2, \end{aligned}$$

где

$$\alpha_1 = \frac{EJ_y}{l^3}, \quad \alpha_2 = \frac{EJ_z}{l^3}, \quad \alpha_3 = \frac{EJ_p}{l^3}, \quad \alpha_4 = \frac{ES}{l^3}.$$

Вектору $\tilde{\mathbf{X}}_1$ соответствует аналогичный вектор в глобальной системе координат $oxuz$ (см. рис. 1)

$$\mathbf{X}_1^T = (v_{x1}, v_{y1}, v_{z1}, p_{x1}, p_{y1}, p_{z1}, v_{xj}, v_{yj}, v_{zj}, p_{xj}, p_{yj}, p_{zj}).$$

Между вектором $\tilde{\mathbf{X}}_1$ и \mathbf{X}_1 существует связь

$$\tilde{\mathbf{X}}_1 = \mathbf{H} \mathbf{X}_1, \quad (3)$$

где \mathbf{H} — матрица перехода из локальной в глобальную систему координат.

С учетом соотношений (2) и (3) получаем выражение для потенциальной энергии стержня в обобщенных глобальных координатах:

$$\Pi_c = \frac{1}{2} \mathbf{X}_1^T \mathbf{A}_c \mathbf{X}_1,$$

где $\mathbf{A}_c = \mathbf{H}^T \tilde{\mathbf{A}}_c \mathbf{H}$ — глобальная матрица жесткости

стержня в терминах локальных обобщенных координат.

Потенциальную энергию шарнира можно записать в терминах глобальных обобщенных координат таким образом:

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{ш}} &= \frac{1}{2} [Q_x(p_{xi} - p_{xj})^2 + Q_y(p_{yi} - p_{yj})^2 + Q_z(p_{zi} - p_{zj})^2] = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{X}_2^T \mathbf{A}_{\text{ш}} \mathbf{X}_2, \end{aligned}$$

$$\mathbf{X}_2^T = (p_{xi}, p_{yi}, p_{zi}, p_{xj}, p_{yj}, p_{zj}),$$

где Q_x , Q_y , Q_z — упругие восстанавливающие моменты шарнира.

Полная потенциальная энергия конструкции равна сумме потенциальных энергий всех стержней и шарниров и может быть представлена в форме

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X}.$$

Матрица жесткости \mathbf{A} всей конструкции находится суммированием соответствующих матриц жесткости отдельных частей конструкции.

Определим кинетическую энергию конструкции через обобщенные скорости в узлах конструкции.

Кинетическую энергию стержня представим так:

$$K_c = \frac{1}{2} \int_0^l \rho [\dot{v}_x^2(x) + \dot{v}_y^2(x) + \dot{v}_z^2(x)] dx, \quad (4)$$

где ρ — линейная плотность стержня.

Выражение (4) можно переписать в виде

$$K_c = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{X}}_1^T \tilde{\mathbf{B}}_c \dot{\mathbf{X}}_1.$$

Матрица $\tilde{\mathbf{B}}_c$ симметричная и положительно определенная, ее ненулевые элементы вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} b_{1,1} &= \frac{1}{3} \rho l, & b_{1,7} &= \frac{1}{6} \rho l, & b_{2,2} &= \frac{13}{35} \rho l, \\ b_{2,5} &= \frac{11}{210} \rho l^2, & b_{2,8} &= \frac{9}{70} \rho l, & b_{2,12} &= -\frac{13}{420} \rho l^2, \\ b_{3,3} &= \frac{13}{35} \rho l, & b_{3,5} &= -\frac{11}{210} \rho l^2, & b_{3,9} &= \frac{9}{70} \rho l, \\ b_{3,11} &= \frac{13}{420} \rho l^2, & b_{5,5} &= \frac{1}{105} \rho l^3, & b_{2,9} &= -\frac{13}{420} \rho l^2, \\ b_{5,11} &= \frac{1}{140} \rho l^3, & b_{6,6} &= \frac{1}{105} \rho l^3, & b_{6,8} &= \frac{13}{420} \rho l^3, \\ b_{5,12} &= -\frac{1}{140} \rho l^3, & b_{7,7} &= \frac{1}{3} \rho l, & b_{8,8} &= \frac{13}{35} \rho l, \end{aligned}$$

$$b_{8,12} = -\frac{11}{210} \rho l^2, \quad b_{9,9} = \frac{13}{35} \rho l, \quad b_{9,11} = \frac{11}{210} \rho l^2,$$

$$b_{11,11} = \frac{1}{105} \rho l^3, \quad b_{12,12} = \frac{1}{105} \rho l^3.$$

Запишем выражение для кинетической энергии в терминах глобальной системы координат в форме

$$K_c = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{X}}_1^T \mathbf{B}_c \dot{\mathbf{X}}_1,$$

где $\mathbf{B}_c = \mathbf{H}^T \tilde{\mathbf{B}}_c \mathbf{H}$ — глобальная матрица масс, выраженная в терминах локальной системы координат.

Кинетическую энергию точечной массы m_1 сразу запишем в терминах глобальной системы координат

$$K_M = \frac{1}{2} m_1 [\dot{v}_{xi}^2 + \dot{v}_{yi}^2 + \dot{v}_{zi}^2] = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{X}}_2^T \mathbf{B}_M \dot{\mathbf{X}}_2,$$

где $\dot{\mathbf{X}}_2^T = (\dot{v}_{xi}, \dot{v}_{yi}, \dot{v}_{zi})$.

Полная кинетическая энергия конструкции равна сумме кинетических энергий всех стержней и сосредоточенных масс. Матрица масс всей конструкции \mathbf{B} получается суммированием соответствующих элементов матриц масс отдельных частей конструкции. В матричной форме кинетическая энергия всей конструкции имеет вид

$$K = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{X}}^T \mathbf{B} \dot{\mathbf{X}}.$$

Для учета рассеивания энергии в стержнях и шарнирах по аналогии с матрицами жесткости \mathbf{A}_c и $\mathbf{A}_{\text{ш}}$ введем матрицы диссипации \mathbf{F}_c и $\mathbf{F}_{\text{ш}}$.

Матрица диссипации для стержня пропорциональна матрице жесткости:

$$\mathbf{F}_c = \frac{\psi_c}{2\pi} \mathbf{A}_c,$$

где ψ_c — коэффициент поглощения энергии материалом стержня; матрица диссипации для шарнира имеет вид

$$\mathbf{F}_{\text{ш}} = \frac{\psi_{\text{ш}}}{2\pi} \mathbf{A}_{\text{ш}},$$

где $\psi_{\text{ш}}$ — коэффициент поглощения энергии шарниром.

Для определения собственных динамических характеристик криволинейных стержневых конструкций необходимо решать систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\mathbf{B} \ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{A} \mathbf{X} + \frac{1}{\omega} \mathbf{F} \dot{\mathbf{X}} = 0, \quad (5)$$

где ω — частота собственных колебаний конструкции.

Будем искать решение уравнения (5) в виде

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{Z} \exp(i\omega t). \quad (6)$$

Подставив решение (6) в уравнение (5), получим задачу на собственные значения и собственные векторы

$$(\mathbf{A} + i\mathbf{F})\mathbf{Z} = \omega^2\mathbf{B}\mathbf{Z}. \quad (7)$$

Задача (7) отличается от классических задач линейной алгебры на собственные значения и векторы, и ее решение в общем случае затруднительно. Кроме того, размерности матриц \mathbf{A} и \mathbf{B} могут иметь высокий порядок.

Важнейшие из специальных свойств матриц \mathbf{A} и \mathbf{B} — симметрия относительно главной диагонали, положительная определенность и высокая степень разреженности. Последнее означает, что лишь незначительная часть элементов матриц отлична от нуля. Указанные особенности позволяют эффективно использовать специальное программное обеспечение, ориентированное на работу с такими матрицами.

Воспользуемся тем фактом, что элементы матрицы \mathbf{F} на два-три порядка меньше элементов матрицы \mathbf{A} . Тогда вместо задачи (7) имеем

$$(\mathbf{A} - \omega^2\mathbf{B})\mathbf{Z} = 0. \quad (8)$$

После нахождения собственных значений и векторов задачи (8) методом малого параметра определены собственные значения задачи (7).

Представляется эффективным применение для этой цели градиентного алгоритма, использующего экстремальные свойства отношения Релея

$$\mu(\mathbf{Z}) = \frac{(\mathbf{A}\mathbf{Z}, \mathbf{Z})}{(\mathbf{B}\mathbf{Z}, \mathbf{Z})}.$$

Этим методом довольно точно определяется собственное число, но с меньшей точностью вычисляется собственный вектор. А так как последующий собственный вектор ищется в подпространстве, ортогональном всем предыдущим собственным векторам, то накапливается погрешность задания ортогонального подпространства.

После вычисления собственного вектора градиентным методом его необходимо уточнить. Применим для этой цели метод обратной итерации со сдвигом. Пусть μ_0 и \mathbf{Z}_0 — собственное число и собственный вектор, полученные градиентным способом. Уточненный собственный вектор \mathbf{Z}_1 определяется из системы

$$\mathbf{K}\mathbf{Z}_1 = \mathbf{B}\mathbf{Z}_0, \quad (9)$$

где $\mathbf{K} = \mathbf{A} - \mu_0\mathbf{B}$. Так как обращать матрицу \mathbf{K} очень сложно ввиду ее большой размерности, то целесообразно представить ее в виде [1]

$$\mathbf{K} = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^T, \quad (10)$$

где \mathbf{L} — нижняя (левая) треугольная матрица с единичной диагональю, \mathbf{D} — диагональная матрица.

На основании разложения (10) система уравнений (9) запишется так:

$$\mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^T\mathbf{Z}_1 = \mathbf{B}\mathbf{Z}_0.$$

Введем вспомогательный вектор \mathbf{Y}

$$\mathbf{Y} = \mathbf{D}\mathbf{L}^T\mathbf{Z}_1.$$

Тогда система (9) распадается на две системы уравнений:

$$\mathbf{L}\mathbf{Y} = \mathbf{B}\mathbf{X}_0,$$

$$\mathbf{L}^T\mathbf{Z}_1 = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{Y},$$

последовательно решая которые определяем \mathbf{Z}_1 .

При разложении матрицы \mathbf{K} целесообразно использовать алгоритм внешних произведений. Основная арифметическая операция алгоритма внешних произведений — вычисление произведения двух элементов одного столбца с последующим вычитанием из соответствующего элемента другого столбца. Таким образом, происходит заполнение матрицы ненулевыми элементами, в результате чего увеличиваются затраты памяти ЭВМ. Если, например, матрица \mathbf{K} имеет отличные от нуля лишь первые столбец, строку и главную диагональ, соответствующий треугольный множитель \mathbf{L} целиком заполняется новыми ненулевыми элементами под главной диагональю.

Если в рассмотренной матрице \mathbf{K} выполнить симметричную перестановку, сделав первые строку и столбец последними, заполнения матрицы \mathbf{L} не произойдет.

Таким образом, рациональная симметричная перестановка строк и столбцов исходной симметричной матрицы \mathbf{K} может привести к уменьшению числа новых ненулевых элементов, возникающих в матрице \mathbf{L} в процессе разложения. Таких перестановок, очевидно, существует $N!$ (N — порядок матрицы \mathbf{K}), поэтому нельзя найти оптимальный вариант путем перебора (дающий минимальное число ненулевых элементов). На практике используют какой-либо эвристический алгоритм поиска перестановки, близкой к оптимальной.

Задача нахождения рациональной симметричной перестановки строк и столбцов (задача упорядочения матрицы) наиболее наглядно формулируется и решается в терминах теории графов.

Пусть дана некоторая симметричная матрица \mathbf{K} . Поставим ей в соответствие ненаправленный граф \tilde{G} согласно следующим правилам: 1) каждой строке (столбцу) соответствует одна вершина; 2) если некоторый внедиагональный элемент k_{ij} матрицы

отличен от нуля, вершины i и j соединены ветвью; в противном случае ветвь отсутствует. Тогда заполнение матрицы можно «про моделировать», рассматривая только граф. Действительно, появление новых ненулевых элементов в ячейке k_{lm} адекватно появлению в графе еще одной ветви, соответствующей вершинам l и m .

Симметричная перестановка строк и столбцов эквивалентна изменению порядка выбора (исключения) вершин графа в процессе моделирования разложения.

Существует несколько весьма удачных алгоритмов квазиоптимальной перенумерации вершин графа. Так, в данном случае целесообразно использовать алгоритм минимальной степени; на очередном шаге перенумерации из всех вершин выбирается та, которая в данный момент имеет наименьшую степень.

Пусть вычислены и уточнены n первых значений и векторов задачи (8):

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n,$$

$$Y_1, Y_2, \dots, Y_n.$$

Рассмотрим задачу на собственные значения

$$(A + \mu iF)Z = \omega^2 BZ, \quad (11)$$

где μ — малый параметр. Решение этой задачи запишем в виде разложения в ряд по малому параметру

$$Z_j = Z_{0j} + \mu Z_{1j} + \mu^2 Z_{2j} + \dots,$$

$$\omega_j^2 = \omega_{0j}^2 + \mu \omega_{1j}^2 + \mu^2 \omega_{2j}^2 + \dots \quad (12)$$

Подставляя представление (12) в уравнение (11) и приравнявая члены при одинаковых степенях μ , получим последовательность уравнений

$$AZ_{0j} - \omega_{0j}^2 BZ_{0j} = 0, \quad (13)$$

$$AZ_{1j} - \omega_{0j}^2 BZ_{1j} = (\omega_{1j}^2 B - iF)Z_{0j}. \quad (14)$$

Решение задачи (13) уже получено:

$$\omega_{0j}^2 = \lambda_j,$$

$$Z_{0j} = y_j.$$

Определитель системы (14) будет равен нулю. Поэтому, чтобы система (14) была разрешима, необходимо, чтобы ее правые части были ортогональными Z_{0j} :

$$((\omega_{1j}^2 B - iF)Z_{0j}, Z_{0j}) = 0.$$

Отсюда находим

$$\omega_{1j}^2 = i(FZ_{0j}, Z_{0j})$$

при условии, что $(BZ_{0j}, Z_{0j}) = 1$, после чего определяем Z_{1j} . В результате получаем собственные значения и векторы задачи (7)

$$\omega_j^2 = \omega_{0j}^2 + \omega_{1j}^2 = i(Fy_j, y_j),$$

$$Z_j = Z_{0j} + Z_{1j} = y_j + Z_{1j}.$$

Для иллюстрации изложенного метода расчета частот собственных колебаний сложных пространственных стержневых конструкций выбрана параболическая антенна космического применения типа КРТ-10.

Эта антенна имеет следующие характеристики:

габаритные размеры фермы	16 × 5.6 м
общее количество узловых соединений	302
общее количество складных стержней	840
количество складных стержней на выпуклой поверхности	456
количество складных стержней на вогнутой поверхности	384
общее количество диагональных стержней	432
общая длина труб	1000 м
длина складного стержня на выпуклой поверхности	0.8 м
длина складного стержня на вогнутой поверхности	0.757 м
длина диагонального стержня	0.8 м
толщина стенки стержня	$0.58 \cdot 10^{-3}$ м
жесткость стержня	20.2 Нм ²
площадь поперечного сечения трубы	$0.16 \cdot 10^{-4}$ м ²
момент инерции трубы	$0.11 \cdot 10^{-8}$ м ⁴
фокальный параметр	7.75 м

Для этих расчетов определялись координаты всех узлов вогнутой и выпуклой поверхностей антенны, а также множества стержней антенны.

Большое количество узлов антенны требует большого объема памяти для хранения элементов матриц, а также значительных затрат машинного времени при нахождении собственных векторов и собственных чисел. Поэтому вычисления проводились поэтапно.

На первом этапе рассчитывались частоты усеченной конструкции антенны, обведенной на рис. 1 контуром Γ_2 .

На втором этапе производился поиск эквивалентной по жесткости однослойной конструкции. Жесткость однослойной конструкции определялась из условия равенства первых частот собственных

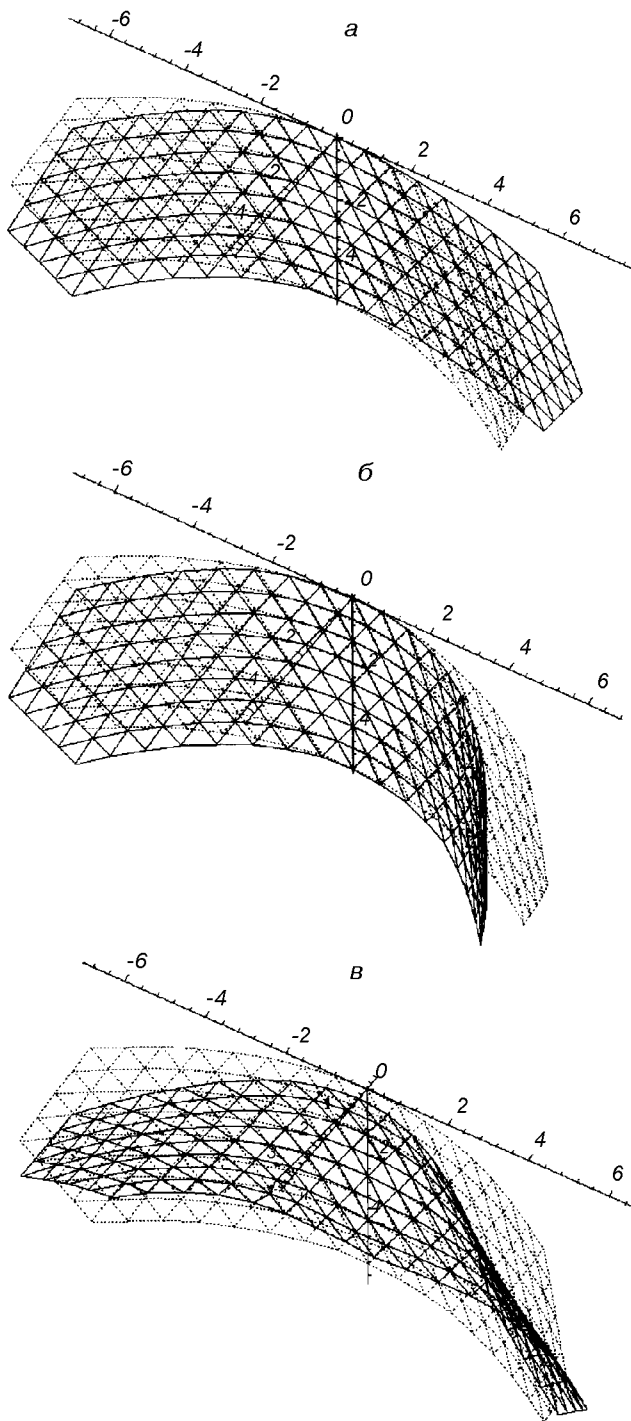


Рис. 2. Три формы собственных колебаний параболической антенны

Частоты и декременты собственных колебаний параболической антенны

	Первая форма собственных колебаний	Вторая форма собственных колебаний	Третья форма собственных колебаний
Частота, Гц	0.416265	0.418875	1.06289
Частота (-), Гц	0.416307	0.418917	1.063
Декремент	0.125445	0.125465	0.125639

колебаний пространственной и однослойной конструкций.

На третьем этапе частоты и формы собственных колебаний антенны рассчитывались по эквивалентной однослойной модели.

На рис. 2 приведены три формы собственных колебаний антенны, соответствующие первым трем частотам.

В таблице представлены результаты расчетов частот и декрементов собственных колебаний антенны. Величина «частота (-)» соответствует частоте колебаний без учета диссипации энергии.

1. Джордж А., Лю Дж. Численное решение больших разреженных систем уравнений. — М.: Мир, 1984.—333 с.
2. Хог Э., Чой К., Комков В. Анализ чувствительности при проектировании конструкций. — М.: Мир, 1988.—428 с.

ON SETTING UP AND SOLVING THE EQUATIONS OF OSCILLATIONS IN CURVILINEAR THREE-DIMENSIONAL ROD CONSTRUCTIONS DESTINED FOR SPACE APPLICATION

S. V. Khoroshilov, V. V. Shapovalenko

We consider the problem of setting up the equations of oscillations in curvilinear rod constructions destined for space application. The method of solving the frequency equations using the properties of the global stiffness and mass matrices of the construction is described. The efficiency of this method is confirmed by calculations of the dynamic characteristics for a specific parabolic antenna.