

УДК 629.7.705

Синтез законов управления ориентацией космического аппарата с использованием кватернионов

В. В. Волосов, Л. И. Тютюнник

Институт космических исследований НАНУ та НКАУ, Київ

Надійшла до редакції 21.01.99

Розв'язуються задачі синтезу алгоритмів керування орієнтацією космічного апарата відносно орбітального та інерціального опорних базисів. Для розв'язку вказаних задач використовується відоме узагальнення теорем прямого методу Ляпунова на дослідження стійкості інваріантних множин динамічних систем. Ефективність отриманих алгоритмів ілюструється комп'ютерним моделюванням динаміки систем керування орієнтацією, в контурі яких використовуються ці алгоритми.

Системы управления ориентацией являются важной составной частью общей системы управления движением космических аппаратов (КА). Без высокоэффективных прецизионных систем управления ориентацией невозможны решения многих научных и прикладных задач, стоящих перед современными КА. Синтезу законов управления ориентацией КА посвящено трудно обозримое количество работ многих авторов. Эти работы отличаются видом используемых кинематических параметров, выбором опорного базиса, видом исполнительных органов, математическими методами решения задач синтеза и т. д. Отметим лишь работы [1, 2, 12, 13, 18] как наиболее близкие к данной работе по характеру рассматриваемых задач и методам их решения.

Методологической основой настоящей работы являются известные обобщения и развитие [7, 11] прямого метода Ляпунова исследования устойчивости решений дифференциальных уравнений на исследование устойчивости их инвариантных множеств. Получены новые, обобщающие известные, решения задач синтеза законов управления произ-

вольной ориентацией КА относительно орбитального и инерциального опорных базисов. Аналитические решения указанных задач сопровождаются их наглядной геометрической интерпретацией. Полученные законы управления представлены в компактной векторно-матричной форме, удобной для их реализации в бортовых компьютерах. Компьютерное моделирование показало эффективность предложенных законов управления, их нечувствительность к нарушению априорных предположений (робастность).

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ИССЛЕДОВАНИЯ

Рассматривается движение связанной с КА системы координат $Oxuz$ с началом в его центре масс (точка O) относительно орбитальной системы координат (ОСК) $Ox_0y_0z_0$ [14]. Ось Oy_0 этой системы направлена по линии O_1O , где O_1 — центр Земли, ось Ox_0 расположена в плоскости орбиты и направлена в сторону движения КА, Oz_0 образует с осями Ox_0 и

Оу₀ правую тройку. Орбита КА полагается круговой. Система $Ox_0y_0z_0$ вращается относительно инерциального пространства с угловой скоростью ω_0 . Вектор ω_0 в проекциях на оси $Ox_0y_0z_0$ имеет вид $\omega_0^T = (0, 0, -e)$, где e — орбитальная угловая скорость движения КА. Символ «т» здесь и далее означает операцию транспонирования. Изменения во времени текущего положения или ориентации КА (системы $Oxuz$) относительно $Ox_0y_0z_0$ описываются следующими уравнениями [1, 8]:

$$\frac{d\Lambda}{dt} = \frac{1}{2} \mathbf{A}(\omega)\Lambda, \quad (1)$$

$$\mathbf{J} \frac{d\omega}{dt} = \mathbf{M} - \widehat{\omega}\mathbf{J}\omega, \quad (2)$$

где $\Lambda^T = (\lambda_0, \lambda^T)$, $\lambda^T = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ — вектор, составленный из компонентов кватерниона и для краткости называемый далее также кватернионом; $\omega^T = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ — вектор угловой скорости КА, ω_1 — проекции на оси $Oxuz$; $\mathbf{M}^T = (M_1, M_2, M_3)$ управляющий момент, действующий на КА; $\mathbf{J} = \mathbf{J}^T > 0$ — матрица моментов инерции КА; $\mathbf{A}(\omega)$ — кососимметрическая матрица 4×4 :

$$\mathbf{A}(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & -\varepsilon^T \\ \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon & \dots & 2\widehat{\mathbf{b}} - \widehat{\varepsilon} \end{pmatrix},$$

$$\varepsilon = \omega + \mathbf{b}, \quad \mathbf{b}^T = (0, 0, e), \quad \varepsilon^T = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3).$$

Здесь и далее под символами $\widehat{\mathbf{x}}$, где \mathbf{x} — произвольный вектор $\mathbf{x}^T = (x_1, x_2, x_3)$ понимаются кососимметрические матрицы

$$\widehat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\mathbf{x}}^T = -\widehat{\mathbf{x}}.$$

Заметим, что при $e = 0$ вектор $\mathbf{b} = 0$ и система уравнений (1), (2) описывает движение связанной с КА системы $Oxuz$ относительно инерциальной системы координат (ИСК) $Ox_0y_0z_0$. При решении задач ориентации обычно используются нормированные кватернионы ($\|\Lambda\|^2 = \lambda_0^2 + \lambda^T\lambda = 1$), компонентами которых являются параметры Родрига—Гамильтона:

$$\lambda_0 = \cos \frac{\theta}{2}, \quad \lambda_1 = \gamma_1 \sin \frac{\theta}{2}, \quad (2')$$

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1.$$

Здесь γ_i — направляющие косинусы оси поворота КА (системы $Oxuz$) относительно системы $Ox_0y_0z_0$ с координатными осями систем $Oxuz$ и $Ox_0y_0z_0$, а θ — угол поворота КА относительно этой оси [1]. При

этом выражение для матрицы $\mathbf{S}(\Lambda)$ направляющих косинусов осей системы $Oxuz$ с осями $Ox_0y_0z_0$ из [1] приводится к виду $\mathbf{S}(\Lambda) = \mathbf{I} - 2\lambda_0\widehat{\lambda} + 2\lambda\lambda^T$, где \mathbf{I} — единичная матрица. Отсюда непосредственно видно, что заданием кватерниона $\Lambda = \Lambda_S$ полностью определяется матрица направляющих косинусов, а следовательно, и ориентация КА относительно системы $Ox_0y_0z_0$, причем одной и той же матрице $\mathbf{S}(\Lambda_S)$ соответствуют два кватерниона $\pm \Lambda_S$. Случаю совмещения осей $Oxuz$ с осями $Ox_0y_0z_0$, при котором $\mathbf{S}(\Lambda_S) = \mathbf{I}$, соответствует кватернион $\Lambda_S^T = (1, 0, 0, 0)$.

С целью удобства последующего изложения вместо системы (1), (2) будем использовать ее следующее эквивалентное представление

$$\frac{d\Lambda}{dt} = \frac{1}{2} [\mathbf{B}(\Lambda)\varepsilon + \mathbf{C}(\Lambda)\mathbf{b}], \quad (3)$$

$$\mathbf{J} \frac{d\varepsilon}{dt} = \mathbf{M} - (\widehat{\varepsilon} - \widehat{\mathbf{b}})\mathbf{J}(\varepsilon - \mathbf{b}); \quad (4)$$

где 4×3 -матрицы $\mathbf{B}(\Lambda)$ и $\mathbf{C}(\Lambda)$ имеют вид

$$\mathbf{B}(\Lambda) = \begin{pmatrix} -\lambda^T \\ \dots \\ \lambda_0\mathbf{I} + \widehat{\lambda} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}(\Lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \dots \\ -2\widehat{\lambda} \end{pmatrix}.$$

Пусть Λ_S — некоторый постоянный заданный нормированный кватернион $\|\Lambda_S\| = 1$. Решениям $\Lambda(t) \equiv \Lambda_S$ или $\Lambda(t) \equiv -\Lambda_S$ уравнения (3), при которых $d\Lambda(t)/dt = 0$, соответствует постоянный вектор $\varepsilon_S = \varepsilon(\Lambda_S)$, представляющий собой совпадающие друг с другом решения системы уравнений

$$\mathbf{B}(\Lambda)\varepsilon + \mathbf{C}(\Lambda)\mathbf{b} = 0 \quad (5)$$

при $\Lambda = \pm \Lambda_S$.

Ориентацию базиса $Oxuz$ относительно опорного базиса $Ox_0y_0z_0$, которой соответствуют стационарные решения $\Lambda(t) \equiv \Lambda_S$ или $\Lambda(t) \equiv -\Lambda_S$ и $\varepsilon(t) \equiv \varepsilon_S$ системы (3), (4), будем называть режимом ориентации или ориентированным положением КА. Рассмотрим задачи синтеза законов управления $M_C = M(\Lambda, \varepsilon, \Lambda_S)$, обеспечивающих приведение КА в заданный режим ориентации.

Режим ориентации КА, соответствующий кватерниону Λ_S , будем называть асимптотически устойчивым в целом, если при любых начальных условиях $\Lambda(0)$, $\|\Lambda(0)\| = 1$ и $\varepsilon(0)$ для решений уравнений (1), (2), или, что то же самое, уравнений (3), (4), выполняются соотношения $\Lambda(t) \rightarrow \Lambda_S$ или $\Lambda(t) \rightarrow -\Lambda_S$ и $\varepsilon(t) \rightarrow \varepsilon_S$ при $t \rightarrow \infty$. Заметим, что в данном определении речь идет об асимптотической устойчивости режима ориентации КА, а не об

асимптотической устойчивости (в смысле классических определений [5, 7, 9]) соответствующих решений указанных уравнений. В определении устойчивости режима ориентации начальные условия $\Lambda(0)$ являются не произвольными, а расположенными на сфере $\|\Lambda\| = 1$. Для характеристики свойств ограниченности решений дифференциальных уравнений при начальных условиях, расположенных на некоторых многообразиях их фазовых пространств, в [5] используется понятие условной устойчивости.

С учетом вышеизложенного рассматриваемые задачи представляют собой задачи синтеза законов управления $M_C = M(\Lambda, \varepsilon, \Lambda_S)$, обеспечивающих асимптотическую устойчивость в целом заданных режимов ориентации или, иными словами, условную асимптотическую устойчивость указанных решений системы уравнений (1), (2).

РЕШЕНИЕ ПОСТАВЛЕННЫХ ЗАДАЧ

Найдем вектор ε_S соответствующий установившейся угловой скорости базиса $Oxuz$ в режиме ориентации КА, определяемом произвольным заданным кватернионом $\Lambda_S^T = (\lambda_{0S}, \lambda_S^T)$, $\|\Lambda_S\| = 1$. Полагая $\Lambda = \Lambda_S$, запишем систему уравнений (5) в следующем виде:

$$-\lambda_S^T \varepsilon = 0, \quad (6)$$

$$(\lambda_{0S} \mathbf{I} + \hat{\lambda}_S) \varepsilon = 2\hat{\lambda}_S \mathbf{b}, \quad (7)$$

где $\det(\lambda_{0S} \mathbf{I} + \hat{\lambda}_S) = \lambda_{0S} \|\Lambda_S\| = \lambda_{0S}$. Умножая систему (7) слева на вектор λ_S^T и учитывая равенство $\lambda_S^T \hat{\lambda}_S = 0$, убеждаемся, что при $\lambda_{0S} \neq 0$ решение уравнения (7) удовлетворяет и уравнению (6). При этом вектор ε_S определяется выражением

$$\varepsilon_S = 2(\lambda_{0S} \mathbf{I} + \hat{\lambda}_S)^{-1} \hat{\lambda}_S \mathbf{b}, \quad \lambda_{0S} \neq 0. \quad (8)$$

Нетрудно убедиться, что при $\lambda_{0S} = 0$ решение системы (6), (7) имеет вид

$$\varepsilon_S = 2(\mathbf{I} - \bar{\mathbf{P}}_S) \mathbf{b}, \quad (9)$$

где $\bar{\mathbf{P}}_S = \lambda_S (\lambda_S^T \lambda_S)^{-1} \lambda_S^T$ — оператор ортогонального проектирования [4] векторов λ на одномерное подпространство (прямую), порожденное вектором λ_S .

Анализ выражений (8), (9) показывает, что при ориентации КА относительно орбитальной системы $Ox_0y_0z_0$ вектор $\varepsilon_S = 0$ при $\Lambda_S^T = (\lambda_{0S}, 0, 0, \lambda_{3S})$, $\|\Lambda_S\| = 1$. При этом в режиме ориентации оси Oz и Oz_0 совпадают, и ориентация КА осуществляется в плоскости Ox_0y_0 (в плоскости орбиты). Случай со-

вмещения осей $Oxuz$ и $Ox_0y_0z_0$, при котором $\Lambda_S^T = (1, 0, 0, 0)$, является частным случаем $\Lambda_S^T = (\lambda_{0S}, 0, 0, \lambda_{3S})$.

При $\mathbf{b} = 0$, т. е. при ориентации КА относительно инерциального опорного базиса, вектор $\varepsilon_S = 0$ при произвольном кватернионе Λ_S .

Рассмотрим некоторые необходимые для решения поставленных задач свойства фазовых траекторий системы (1), (2). Известно [1, 8], что подсистема (1) имеет интеграл движения $\|\Lambda(t)\| = c$, $c = \|\Lambda(0)\|$. С геометрической точки зрения это означает, что движение изображающей точки Λ подсистемы (1) в ее фазовом пространстве (пространстве векторов Λ) происходит по сфере радиуса $c = \|\Lambda(0)\|$. Начальным условиям с различными значениями $c = \|\Lambda(0)\|$ соответствуют движения по различным сферам из семейства концентрических (вложенных друг в друга и имеющих общий центр) сфер в подпространстве Λ . Движение же изображающей точки в фазовом пространстве всей системы (1), (2) (в пространстве векторов Λ, ε) осуществляется при этом по соответствующей поверхности из семейства концентрических цилиндрических поверхностей [6, 15]. Образующие этих поверхностей параллельные подпространству векторов ε , и для точек поверхности выполняются условия $\|\Lambda\| = c$ и $0 \leq \|\varepsilon\| < \infty$. Режиму ориентации КА соответствуют точки $\|\Lambda\| = \pm \Lambda_S$ и $\varepsilon = \varepsilon_S$ на цилиндрической поверхности с $\|\Lambda\| = 1$.

Введем в пространстве векторов Λ, ε состоящее из двух точек множество

$$\Omega_1 = \{\Lambda, \varepsilon: \Lambda = \Lambda_S, \Lambda = -\Lambda_S, \varepsilon = \varepsilon_S\}. \quad (10)$$

Из приведенного выше определения следует, что режим ориентации КА, соответствующий кватерниону Λ_S , будет асимптотически устойчивым в целом, если множество Ω_1 будет асимптотически устойчивым в целом инвариантным множеством системы (1), (2) в смысле определений [7, 11]. Однако из рассмотренных выше свойств фазовых траекторий системы (1), (2) следует, что выполнение условий притяжения $\Lambda(t) \rightarrow \Lambda_S$ или $\Lambda(t) \rightarrow -\Lambda_S$ и $\varepsilon(t) \rightarrow \varepsilon_S$ при $t \rightarrow \infty$ необходимо для асимптотической устойчивости в целом множества Ω_1 , возможно не для всех фазовых траекторий, а только для траекторий, которым соответствуют $\Lambda(0)$, принадлежащие многообразию (сфере) $\|\Lambda\| = 1$. Для получения условий существования у системы (1), (2) инвариантного множества Ω_1 с указанными притягивающими свойствами, а следовательно, и для решения задачи синтеза искомых законов управления $M_C = M(\Lambda, \varepsilon, \Lambda_S)$ воспользуемся обобщением [11]

прямого метода Ляпунова исследования устойчивости решений дифференциальных уравнений на исследование устойчивости их инвариантных множеств.

Выберем функцию Ляпунова (ФЛ) в виде

$$V_1(\Lambda, \varepsilon) = \alpha [(\Lambda_s^T \mathbf{P}_s \Lambda - 1)^2 + \Lambda^T (\mathbf{I} - \mathbf{P}_s) \Lambda] + 0.5(\varepsilon - \varepsilon_s)^T \mathbf{J} (\varepsilon - \varepsilon_s), \quad (11)$$

где $\alpha > 0$ и $\mathbf{P}_s = \Lambda_s \Lambda_s^T$ — оператор проектирования векторов на подпространство, порожденное вектором Λ_s (и представляющее собой прямую $\Lambda = \beta \Lambda_s$, $-\infty < \beta < \infty$). Эта функция является положительно определенной относительно множества Ω_1 функций: $V_1(\Lambda, \varepsilon) = 0$ при $\Lambda, \varepsilon \in \Omega_1$ и $V_1(\Lambda, \varepsilon) > 0$ при $\Lambda, \varepsilon \notin \Omega_1$. Нетрудно убедиться, что выражение в квадратных скобках в (11) представляет собой квадрат наименьшего расстояния от произвольной точки Λ до точек $\pm \Lambda_s$. Сама же функция $V_1(\Lambda, \varepsilon)$ при $\alpha = 1$ и $\mathbf{J} = 2\mathbf{I}$ является квадратом расстояния от произвольной точки Λ, ε фазового пространства системы (1), (2) до множества Ω_1 . Отметим также, что ФЛ (11) является негладкой функцией по переменной Λ . Негладкие ФЛ использовались в [17] для исследования устойчивости решений дифференциальных уравнений. Там же приведены способы вычисления производных по времени от таких функций. В частности, для производной от $|x(t)|$ приводится формула

$$\frac{d|x(t)|}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} \operatorname{sign} x, \quad (12)$$

где $\operatorname{sign} x = 1$ при $x \geq 0$ и $\operatorname{sign} x = -1$ при $x < 0$. Негладкая ФЛ, содержащая $|\lambda_0|$, использовалась для синтеза закона управления ориентацией КА относительно инерциальной системы координат в [12]. Краткая библиография работ, в которых используются негладкие ФЛ, содержится в [16].

Производная от ФЛ (11), вычисленная согласно уравнениям (3), (4) с использованием формулы (12), имеет вид

$$\dot{V}_1(\Lambda, \varepsilon) = (\varepsilon - \varepsilon_s)^T [-\alpha \mathbf{B}^T(\Lambda) \Lambda_s \operatorname{sign} \Lambda_s^T \Lambda + \mathbf{M} + \mathbf{M}_G + \mathbf{M}_R]. \quad (13)$$

Здесь и далее под \mathbf{M}_G и \mathbf{M}_R понимаются моменты

$$\mathbf{M}_G = -(\hat{\varepsilon} - \hat{\varepsilon}_s) \mathbf{J} (\varepsilon - \mathbf{b}), \quad \mathbf{M}_R = -(\hat{\mathbf{b}} - \hat{\varepsilon}_s) \mathbf{J} (\varepsilon - \mathbf{b}).$$

При этом очевидно, что для момента \mathbf{M}_G выполняется равенство $(\varepsilon - \varepsilon_s)^T \mathbf{M}_G = 0$. Положив в (13) $\mathbf{M} = \mathbf{M}_C$, где

$$\mathbf{M}_C = \alpha \mathbf{B}^T(\Lambda) \Lambda_s \operatorname{sign} \Lambda_s^T \Lambda - \mathbf{K} (\varepsilon - \varepsilon_s) - \mu \mathbf{M}_G - \mathbf{M}_R, \quad (14)$$

μ — коэффициент компенсации гироскопического момента \mathbf{M}_G , $0 \leq \mu \leq 1$ и \mathbf{K} — симметрическая положительно определенная матрица $\mathbf{K} = \mathbf{K}^T > 0$, получим

$$\dot{V}_1(\Lambda, \varepsilon) = -(\varepsilon - \varepsilon_s)^T \mathbf{K} (\varepsilon - \varepsilon_s).$$

Отсюда следует, что производная ФЛ является отрицательной знакопостоянной относительно множества Ω_1 функцией. Пусть при некотором значении t для решений системы (3), (4) выполняется условие $\Lambda(t), \varepsilon(t) \in \Omega_1$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что при этом правые части уравнений (3), (4) обращаются в нуль и производные $\dot{\Lambda} = 0$ и $\dot{\varepsilon} = 0$. Поэтому $\Lambda(t + \xi), \varepsilon(t + \xi) \in \Omega_1$ при всех $0 \leq |\xi| < \infty$, и множество Ω_1 является инвариантным множеством системы (3), (4). Так как производная ФЛ отрицательная знакопостоянная относительно Ω_1 функция, то согласно [11] множество Ω_1 будет устойчивым по Ляпунову (не асимптотически) инвариантным множеством системы (3), (4). Для выявления более подробных свойств множества Ω_1 проведем дополнительное исследование, основанное на идеях теоремы Барбашина—Красовского [9, 10] об асимптотической устойчивости решения (одноточечного инвариантного множества) автономной системы дифференциальных уравнений.

Из уравнения (5) с учетом сказанного выше следует, что при $\varepsilon = \varepsilon_s$ множество фазового пространства Λ, ε системы (3), (4), на котором правая часть (3) равна нулю, представляет собой прямую $\Lambda = \beta \Lambda_s$, $-\infty < \beta < \infty$. Покажем, что множеством векторов Λ , на котором при $\varepsilon = \varepsilon_s$ и законе управления (14) обращаются в нуль правые части уравнения (4), также является эта прямая $\Lambda = \beta \Lambda_s$, $-\infty < \beta < \infty$. Из (4) и (14) следует, что это множество определяется системой уравнений $\mathbf{V}^T(\Lambda) \Lambda_s = 0$. Запишем эту систему в виде трех уравнений

$$-\lambda \lambda_{0s} + \lambda_0 \lambda_s - \hat{\lambda} \lambda_s = 0,$$

эквивалентных векторному уравнению

$$-\lambda \lambda_{0s} + \lambda_0 \lambda_s - \lambda \times \lambda_s = 0, \quad (15)$$

где символ \times означает операцию векторного умножения. Очевидно, что уравнение (15) имеет решение только при $\lambda = \beta \lambda_s$, $|\beta| \geq 0$. Подставив значение $\lambda = \beta \lambda_s$ в (15), получим $\lambda_0 = \beta \lambda_{0s}$. Отсюда следует, что при произвольном кватернионе Λ_s искомого множество векторов Λ , на котором $\mathbf{V}^T(\Lambda) \Lambda_s = 0$, есть прямая $\Lambda = \beta \Lambda_s$, $|\beta| \geq 0$. Таким образом, множество $\Omega_{10} = \{\Lambda, \varepsilon: \Lambda = \beta \Lambda_s, \varepsilon = \varepsilon_s,$

$|\beta| \geq 0$ }, на котором производная $\dot{V}_1(\Lambda, \varepsilon) = 0$ содержит целые траектории системы (3), (4). Последнее означает, что постоянные векторы $\Lambda(t) \equiv \beta\Lambda_s$, $|\beta| \geq 0$ и $\varepsilon(t) \equiv \varepsilon_s$ являются решениями уравнений (3), (4). Множество же $\Omega_{11} = \{\Lambda, \varepsilon: \Lambda \neq \beta\Lambda_s, \varepsilon = \varepsilon_s, |\beta| > 0\}$, на котором так же $\dot{V}_1(\Lambda, \varepsilon) = 0$ не содержит целых траекторий системы (3), (4). Заметим, что множество Ω_{10} содержит в себе инвариантное множество $\Omega_1 \subset \Omega_{10}$.

Из монотонности производной

$$V_1(\Lambda, \varepsilon) = -(\varepsilon - \varepsilon_s)^T \mathbf{K} \times (\varepsilon - \varepsilon_s) \leq 0$$

и ограниченности снизу ФЛ $V_1(\Lambda, \varepsilon) \geq 0$ следует существование предела $\lim_{t \rightarrow \infty} V_1(t) = a$, $a \geq 0$.

Повторяя рассуждения из доказательства теоремы Барбашина—Красовского [10], убеждаемся, что $a = V(\Lambda^*, \varepsilon^*)$, где $\Lambda^*, \varepsilon^* \in \Omega_{10}$. При этом для решений $\Lambda(t), \varepsilon(t)$ системы (3), (4) имеют место предельные соотношения $\Lambda(t) \rightarrow \beta\Lambda_s, \varepsilon(t) \rightarrow \varepsilon_s$ при $t \rightarrow \infty$. При начальных условиях $\Lambda(0)$ с $\|\Lambda(0)\| = 1$ из существования интеграла движения $\|\Lambda(t)\| = 1$ следует, что β может принимать значения $\beta = \pm 1$. Таким образом, для решений $\Lambda(t), \varepsilon(t)$ системы (3), (4) с произвольными начальными условиями $\Lambda(0)$, для которых $\|\Lambda(0)\| = 1$ выполняются соотношения $\Lambda(t) \rightarrow \Lambda_s$ или $\Lambda(t) \rightarrow -\Lambda_s, \varepsilon(t) \rightarrow \varepsilon_s$, и в соответствии с принятым определением режим ориентации КА является асимптотически устойчивым в целом.

Сформулируем полученный результат в виде следующего утверждения.

Утверждение 1. Режимы ориентации КА относительно ОСК и ИСК, определяемые произвольным кватернионом $\Lambda_s, \|\Lambda_s\| = 1$ при законе управления (14) асимптотически устойчивы в целом.

При ориентации КА относительно инерциального базиса с кватернионом $\Lambda_s^T = (1, 0, 0, 0)$ при отсутствии компенсации гироскопического момента $\mu = 0$ из (14) непосредственно получаем закон управления $\mathbf{M}_C = -\alpha\lambda \text{sign}\lambda_0 - \mathbf{K}\omega$, совпадающий с полученным ранее законом управления из [12].

Рассмотрим отличный от вышеизложенного способ получения закона управления, также основанный на использовании ФЛ вида (11). При управлении КА относительно ОСК ограничимся случаем ориентации в плоскости орбиты $\Lambda_s^T = (\lambda_{0s}, 0, 0, \lambda_{3s})$. При управлении ориентацией относительно ИСК Λ_s полагается произвольным. Как отмечалось выше, обоим этим случаям соответствует $\varepsilon_s = 0$. По аналогии с [1, 3, 13] проведем декомпозицию системы (3), (4) и получим решение задачи синтеза закона управления $\mathbf{M}_C = \mathbf{M}(\Lambda, \varepsilon, \Lambda_s)$ в два этапа.

На первом из них рассмотрим кинематическую задачу ориентации [1]. При этом в уравнении (3) вектор ε полагается независимым управлением. Введем в рассмотрение множество

$$\Omega_C = \{\Lambda: \Lambda = \Lambda_s, \Lambda = -\Lambda_s\} \quad (16)$$

и выберем ФЛ в виде

$$V_C(\Lambda) = (|\Lambda_s^T \mathbf{P}_s \Lambda| - 1)^2 + \Lambda^T (\mathbf{I} - \mathbf{P}_s) \Lambda, \quad (17)$$

где, как и в (11), $\mathbf{P}_s = \Lambda_s \Lambda_s^T$. Функция $V_C(\Lambda)$ представляет собой квадрат расстояния от произвольной точки Λ до множества Ω_C и является положительно определенной относительно Ω_C . Производная от ФЛ (17), вычисленная согласно уравнению (3) с учетом равенства $\Lambda_s^T \mathbf{C}(\Lambda) \mathbf{b} = 0$, имеет вид

$$\dot{V}_C(\Lambda) = -\Lambda_s^T \mathbf{B}(\Lambda) \varepsilon \text{sign} \Lambda_s^T \Lambda. \quad (18)$$

Полагая в (18) $\varepsilon = \varepsilon^*(\Lambda)$, где

$$\varepsilon^*(\Lambda) = \mathbf{K} \mathbf{B}^T(\Lambda) \Lambda_s \text{sign} \Lambda_s^T \Lambda, \quad \mathbf{K} = \mathbf{K}^T > 0, \quad (19)$$

получим $\dot{V}_C(\Lambda) = -\Lambda_s^T \mathbf{B}(\Lambda) \mathbf{K} \mathbf{B}^T(\Lambda) \Lambda_s$. Функция $\dot{V}_C(\Lambda) = 0$ на множестве $\mathbf{B}^T(\Lambda) \Lambda_s = 0$ (прямой $\Lambda = \beta\Lambda_s, |\beta| \geq 0$) и $\dot{V}_C(\Lambda) < 0$ при $\Lambda \neq \beta\Lambda_s, |\beta| \geq 0$. Поскольку множество (16) состоит из двух точек прямой $\Lambda = \beta\Lambda_s$ при $\beta = \pm 1$, то производная $\dot{V}_C(\Lambda)$ является отрицательной знакопостоянной относительно этого множества функций. Так как при $\varepsilon = \varepsilon^*(\Lambda)$, где $\varepsilon^*(\Lambda)$ определяется формулой (19), правая часть уравнения (3) обращается в нуль на прямой $\Lambda = \beta\Lambda_s, |\beta| \geq 0$, то Ω_C есть инвариантное множество этого уравнения. Из знакопостоянства производной $\dot{V}_C(\Lambda)$ следует [11], что Ω_C является устойчивым по Ляпунову инвариантным множеством уравнения (3). Проводя рассуждения, аналогичные предшествующим получению утверждения 1, убеждаемся, что для решений уравнения (3) при $\varepsilon = \varepsilon^*(\Lambda)$, и начальных условиях $\Lambda(0)$ с $\|\Lambda(0)\| = 1$ имеют место предельные соотношения $\Lambda(t) \rightarrow \Lambda_s$ или $\Lambda(t) \rightarrow -\Lambda_s$ при $t \rightarrow \infty$.

Полагая в уравнении (3) при $\varepsilon = \varepsilon^*(\Lambda)$, где $\varepsilon^*(\Lambda)$ определяется формулой (19) при $\mathbf{K} = \mathbf{I}, \Lambda_s^T = (1, 0, 0, 0)$ и $\mathbf{b} = 0$, получим

$$\dot{\lambda}_0 = 0.5 \|\lambda\|^2 \text{sign} \lambda_0, \quad (20)$$

$$\dot{\lambda} = -0.5 |\lambda_0| \lambda. \quad (21)$$

Из уравнения (21) следует, что вектор λ не изменяет своего направления относительно опорного базиса. Это соответствует плоскому вращению КА относительно оси, определяемой вектором $\lambda(0)$. Из уравнения (20) с учетом сказанного выше следует,

что $\lambda_0(t) \rightarrow 1$ или $\lambda_0(t) \rightarrow -1$ без изменения знака $\text{sign}\lambda_0(t) \equiv \text{sign}\lambda_0(0)$. Следовательно, при $\varepsilon = \varepsilon^*(\Lambda)$ переход КА из произвольного начального состояния с $\|\Lambda(0)\| = 1$ к режиму ориентации, определяемому кватернионом $\Lambda_S^T = (1, 0, 0, 0)$ осуществляется плоским поворотом по кратчайшему пути.

Переходя ко второму этапу решения задачи, заметим, что при $\Lambda(t) \rightarrow \Lambda_S$ или $\Lambda(t) \rightarrow -\Lambda_S$ из формулы (19) следует предельное соотношение $\varepsilon^*(\Lambda(t)) \rightarrow \varepsilon_S$ при $t \rightarrow \infty$. Поэтому, если в уравнении (4) момент $\mathbf{M} = \mathbf{M}_C(\Lambda, \varepsilon, \Lambda_S)$ выбрать так, чтобы его решение $\varepsilon(t) \rightarrow \varepsilon^*(\Lambda(t))$ при $t \rightarrow \infty$, то для решений $\Lambda(t), \varepsilon(t)$ всей системы (3), (4) будут выполняться соотношения $\Lambda(t) \rightarrow \Lambda_S$ или $\Lambda(t) \rightarrow -\Lambda_S$ и $\varepsilon(t) \rightarrow \varepsilon_S$ при $t \rightarrow \infty$, а режим ориентации КА, соответствующий произвольному кватерниону Λ_S — асимптотически устойчив в целом. Положим в (4) $\mathbf{M} = \mathbf{M}_C$, где

$$\mathbf{M}_C = \tau^{-1} \mathbf{J}[\varepsilon^*(\Lambda) - \varepsilon] - \mu \mathbf{M}_G - \mathbf{M}_R, \quad \tau > 0 \quad (22)$$

и вектор $\varepsilon^*(\Lambda)$ определяется формулой (19). Покажем, что этот закон управления обеспечивает устойчивость режимов ориентации КА относительно орбитальной и инерциальной систем координат при $\Lambda_S^T = (\lambda_{0S}, 0, 0, \lambda_{3S})$ и произвольном Λ_S соответственно. Выберем положительно определенную относительно множества Ω_1 ФЛ

$$V_2(\Lambda, \varepsilon) = V_C(\Lambda) + 0.5\tau(\varepsilon - \varepsilon_S)^T \mathbf{K}^{-1}(\varepsilon - \varepsilon_S),$$

производная которой, вычисленная согласно уравнениям (3), (4) при $\mathbf{M} = \mathbf{M}_C$, где \mathbf{M}_C определяется формулой (22), имеет вид $\dot{V}_2(\Lambda, \varepsilon) = -(\varepsilon - \varepsilon_S)^T \mathbf{K}^{-1}(\varepsilon - \varepsilon_S)$ и является отрицательной знакопостоянной относительно Ω_1 функцией. Повторяя рассуждения, предшествующие получению утверждения 1, получим утверждение 2.

Утверждение 2. Режимы ориентации КА относительно ОСК при $\Lambda_S^T = (\lambda_{0S}, 0, 0, \lambda_{3S})$, $\|\Lambda_S\| = 1$ и относительно ИСК при произвольном Λ_S , $\|\Lambda_S\| = 1$ и законе управления (22) асимптотически устойчивы в целом.

Получим законы управления ориентацией, соответствующие ФЛ, отличным от использованных выше.

Рассмотрим ФЛ

$$V_3(\Lambda, \varepsilon) = \alpha \Lambda^T (\mathbf{I} - \mathbf{P}_S) \Lambda + 0.5(\varepsilon - \varepsilon_S)^T \mathbf{J}(\varepsilon - \varepsilon_S), \quad (23)$$

где $\alpha > 0$ и $\mathbf{P}_S = \Lambda_S \Lambda_S^T$. Эта функция является положительно определенной относительно множества

$$\Omega_3 = \{\Lambda, \varepsilon : \varepsilon = \varepsilon_S, \Lambda = \beta \Lambda_S^T, |\beta| \geq 0\}, \quad (24)$$

представляющего собой прямую в фазовом пространстве системы (3), (4). Поверхности уровня $V_3(\Lambda, \varepsilon) = c^2$ ФЛ (23) представляют собой цилиндрические поверхности, осью которых является множество-прямая (24) [6, 15]. Из приведенного выше описания структуры фазовых траекторий следует, что режим ориентации КА, определяемый кватернионом Λ_S , будет асимптотически устойчивым в целом, если Ω_3 будет асимптотически устойчивым в целом (т. е. при любых начальных условиях $\Lambda(0), \varepsilon(0)$ инвариантным множеством системы (3), (4). Соответствующие выкладки и рассуждения, аналогичные описанным выше, позволяют получить для искомого закона управления ориентацией следующие выражения:

$$\mathbf{M}_C = \begin{cases} \alpha \mathbf{B}^T(\Lambda) \Lambda_S (\Lambda_S^T \Lambda) - \mathbf{K}(\varepsilon - \varepsilon_S) - \mu \mathbf{M}_G - \mathbf{M}_R & \text{при } \delta(\Lambda, \varepsilon) \neq 0; \\ \alpha \mathbf{B}^T(\Lambda) \Lambda_S \text{sign} \Lambda_S^T \Lambda - \mathbf{M}_R & \text{при } \delta(\Lambda, \varepsilon) = 0, \end{cases} \quad (25)$$

где

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^T > 0, \quad 0 \leq \mu \leq 1, \\ \delta(\Lambda, \varepsilon) = \|\varepsilon - \varepsilon_S\| + |\Lambda_S^T \Lambda|.$$

При этом утверждение 1 справедливо и для закона управления (25).

В работах [2, 18] задача синтеза законов управления ориентацией КА решалась с непосредственным использованием теорем Ляпунова об устойчивости решения (одноточечного инвариантного множества) дифференциальных уравнений. При этом использовалась положительно определенная (относительно точки $\Lambda = \Lambda_S, \varepsilon = \varepsilon_S$) ФЛ вида

$$V_4(\Lambda, \varepsilon) = \alpha (\Lambda - \Lambda_S)^T (\Lambda - \Lambda_S) + 0.5(\varepsilon - \varepsilon_S)^T \mathbf{R}(\varepsilon - \varepsilon_S) \quad (26)$$

с $\alpha = 1$, $\Lambda_S^T = (1, 0, 0, 0)$, $\mathbf{R} = \rho_1 \mathbf{J}^2 + \rho_2 \mathbf{J}$, $\rho_1 \geq 0$, $\rho_2 \geq 0$, $\rho_1^2 + \rho_2^2 > 0$, $\varepsilon_S = 0$ и $\varepsilon = \omega$. Последнее (т. е. $\varepsilon = \omega$) означает, что рассматривалась ориентация КА относительно ИСК. Вычисляя производную ФЛ (26) с $\mathbf{R} = \mathbf{J}$ в силу системы (3), (4) и выбирая закон управления $\mathbf{M} = \mathbf{M}_C$ в виде

$$\mathbf{M}_C = \alpha \mathbf{B}^T(\Lambda) \Lambda_S - \mathbf{K}(\varepsilon - \varepsilon_S) - \mu \mathbf{M}_G - \mathbf{M}_R, \quad (27)$$

где $\alpha > 0$, $0 \leq \mu \leq 1$ и $\mathbf{K} = \mathbf{K}^T > 0$ получим

$$\dot{V}_4(\Lambda, \varepsilon) = -(\varepsilon - \varepsilon_S)^T \mathbf{K}(\varepsilon - \varepsilon_S).$$

Функция $\dot{V}_4(\Lambda, \varepsilon)$ является отрицательной знакопостоянной относительно точки $\Lambda = \Lambda_S, \varepsilon = \varepsilon_S$ и обращается в нуль на множестве $\varepsilon = \varepsilon_S, \Lambda = \beta \Lambda_S$, $|\beta| \geq 0$, содержащем целые траектории системы (3), (4). Поэтому решение $\Lambda(t) \equiv \Lambda_S, \varepsilon(t) \equiv \varepsilon_S$ этой

системы устойчиво по Ляпунову. Для начальных условий с $\|\Lambda(0)\| = 1$ система (3), (4) наряду с решением $\Lambda(t) \equiv \Lambda_S, \varepsilon(t) \equiv \varepsilon_S$ будет иметь стационарную точку $\Lambda(t) \equiv -\Lambda_S, \varepsilon(t) \equiv \varepsilon_S$. При этом вторая из этих точек является неустойчивой, и для решений (3), (4) с начальными условиями $\Lambda(0) \neq -\Lambda_S$ выполняются предельные соотношения $\Lambda(t) \rightarrow \Lambda_S, \varepsilon(t) \rightarrow \varepsilon_S$ при $t \rightarrow \infty$. Как отмечалось выше, кватернионам $\Lambda = \pm \Lambda_S$ соответствует одна и та же ориентация КА. Из описанных выше свойств решений системы (3), (4) с законом управления (27) следует, что из любого положения $\Lambda \neq \Lambda_S, \varepsilon = \varepsilon_S$, сколь угодно мало отличающегося от ориентированного положения с $\Lambda(t) = -\Lambda_S, \varepsilon(t) = \varepsilon_S$, КА только после совершения полного оборота перейдет в ориентированное положение, определяемое устойчивым решением $\Lambda(t) \equiv \Lambda_S, \varepsilon(t) \equiv \varepsilon_S$. Так как стационарная точка $\Lambda(t) \equiv -\Lambda_S, \varepsilon(t) \equiv \varepsilon_S$ также соответствует требуемой ориентации КА, то очевидно, что утверждение 1 остается справедливым и для закона управления (27).

Отмеченный недостаток закона управления (27), а также и законов управления [2], полученных на основе положительно определенных относительно точки $\Lambda = \Lambda_S, \varepsilon = \varepsilon_S$ фазового пространства (ФП) системы (3), (4) ФЛ вида (26), устранен в предложенных выше законах управления. Для их получения использовались ФЛ $V_i(\Lambda, \varepsilon), i = 1, 2, 3$, положительно определенные относительно соответствующих множеств в ФП системы (3), (4). Так, для получения законов управления (14) и (22) использовались ФЛ $V_i(\Lambda, \varepsilon), i = 1, 2$, представляющие собой кратчайшие расстояния от точек Λ, ε ФП с $\varepsilon = \varepsilon_S$ до множества $\Lambda = \pm \Lambda_S, \varepsilon = \varepsilon_S$. Поэтому из условий $\dot{V}_i(\Lambda, \varepsilon) \leq 0, i = 1, 2$ следует, что при $\varepsilon = \varepsilon_S$ и произвольном $\Lambda(0), \|\Lambda(0)\| = 1$ система (3), (4) переходит в устойчивое состояние к ближайшей из точек $\Lambda = \pm \Lambda_S, \|\Lambda_S\| = 1$.

Это свойство законов управления (14), (22), а также и (25), обеспечивается входящими в них функциями $\text{sign}\sigma$ и $\sigma, \sigma = \Lambda_S^T \Lambda$. Аналогичным свойством обладает и закон управления ориентацией КА относительно инерциальной системы координат, предложенный в [12] для $\Lambda_S^T = (1, 0, 0, 0)$. В этот закон также входит функция $\text{sign}\sigma, \sigma = \lambda_0$. В законе же управления (27) такая функция отсутствует.

Очевидно, что в законах управления (14), (25) и (27) вместо постоянной матрицы K может использоваться матричная функция $K = K(\Lambda, \varepsilon)$. Эта функция должна удовлетворять условию положительной определенности $K(\Lambda, \varepsilon) > K_0$, где K_0 —

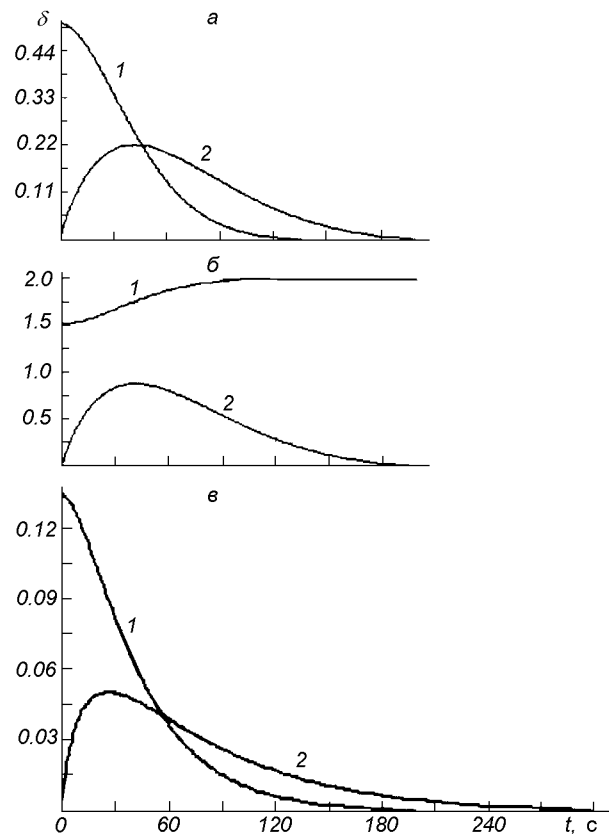


Рис. 1. Переходные процессы в системе с законом управления (14): а — $m = 10$ с, б — $m = 40$ с, в — $m = 5$ с. Кривые 1, 2 — функции δ_1 и δ_2 соответственно (см. текст)

постоянная матрица $K_0 = K_0^T > 0$.

Эффективность предложенных законов управления ориентацией КА иллюстрируется с помощью компьютерного моделирования. Как и в работе [2], предполагается, что матрица моментов инерции

$$J = \begin{pmatrix} 1200 & 100 & -200 \\ 100 & 2200 & 300 \\ -200 & 300 & 3100 \end{pmatrix} \text{ (кг} \cdot \text{м}^2\text{)}.$$

Предполагается, что орбитальная угловая скорость $e = \pi/2700 \text{ с}^{-1}$, что соответствует круговой орбите с периодом обращения 90 мин. Начальная угловая скорость КА соответствует $\varepsilon^T(0) = (0, 0, 0)$. Система уравнений (1), (2) интегрировалась методом Рунге—Кутта четвертого порядка точности с шагом $\Delta t = 0.05$ с. В целях визуализации процессов установления заданных ориентаций КА и оценивания их качества на приведенных рис. 1—2 представлены графики функций $\delta_1(t) = 1 - \Lambda_S^T \Lambda(t)$ (кривые 1) и $\delta_2(t) = m \|\varepsilon(t) - \varepsilon_S\|$ (кривые 2). Очевидно, что ориентированному положению КА, при котором $\Lambda = \pm \Lambda_S$, соответствуют значения

$\delta_1(t) = 0$ или $\delta_1(t) = 2$. Масштабный коэффициент m , имеющий размерность времени, введен для наглядности представления на одном рисунке графиков функций с существенно разными диапазонами изменения своих значений.

Пример 1. В этом примере моделировался закон управления (14) с $\alpha = 5$, $\mu = 1$, $\mathbf{K} = \text{diag}\{150, 150, 150\}$ и $\Lambda_S^T = (1, 0, 0, 0)$. При этом установившейся угловой скорости ω_S КА соответствует вектор $\varepsilon_S = 0$ ($\omega_S = \varepsilon_S - \mathbf{b} = -\mathbf{b}$). Начальные условия полагались равными $\Lambda_1^T = (1/2, 0, 0, \sqrt{3}/2)$ и $\Lambda_2(0) = -\Lambda_1(0)$, что соответствует поворотам КА относительно совпадающих друг с другом осей Oz_0 и Oz на углы $\theta_1 = 60^\circ$ и $\theta_2 = -300^\circ$ (см. формулы (2')) для параметров Родрига—Гамильтона λ_i , $i = 0, 1, 2, 3$). Графики функций $\delta_1(t)$ и $\delta_2(t)$ с $m = 10$ с, построенные для начального условия $\Lambda_1(0)$, представлены на рис. 1, а; графики тех же функций с $m = 40$ с, построенные для начального условия $\Lambda_2(0)$, представлены на рис. 1, б. Из указанных рисунков видно, что в зависимости от начальных условий КА приходит к режиму ориентации $\Lambda(t) \rightarrow \Lambda_S$ (при $\Lambda_1(0)$) или $\Lambda(t) \rightarrow -\Lambda_S$ (при $\Lambda_2(0)$) и $\varepsilon(t) \rightarrow \varepsilon_S$ по кратчайшему пути (к углам $\theta_S = 0^\circ$ или $\theta_S = -360^\circ$) соответственно.

Пример 2. В примере также моделировался закон управления (14) с параметрами $\alpha = 5$, $\mu = 1$, $\mathbf{K} = \text{diag}\{200, 200, 200\}$ и $\Lambda_S^T = (\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/6, \sqrt{3}/6, \sqrt{3}/6)$. Этому значению Λ_S соответствует вычисленный по формуле (8) вектор $\varepsilon_S^T = (e/3, -2e/3, e/3)$ и $\omega_S^T = \varepsilon_S^T - \mathbf{b}^T = (e/3, -2e/3, -2e/3)$. Начальное значение $\Lambda(0)$ полагалось равным $\Lambda^T(0) = (1, 0, 0, 0)$. Графики функций $\delta_1(t)$ и $\delta_2(t)$ с $m = 5$ с, иллюстрирующие процесс установления режима ориентации $\Lambda(t) \rightarrow \Lambda_S$ и $\varepsilon(t) \rightarrow \varepsilon_S$ показаны на рис. 1, в.

Для исследования чувствительности закона управления (14) к отличию фактической орбитальной угловой скорости e от ее расчетного значения моделировался также процесс управления ориентацией КА для случая, когда в (14) использовалось значение $\varepsilon_S = 0$, соответствующее расчетному значению орбитальной угловой скорости, равному нулю. Построенные для этого случая графики функций $\delta_1(t)$ и $\delta_2(t)$ с $m = 5$ с по своему виду не отличались от показанных на рис. 1, в, и ориентация КА в установившемся режиме (при выбранном масштабе построения графиков) совпадает с заданной $\Lambda(t) = \Lambda_S$, $\varepsilon(t) = \varepsilon_S$. Отсюда следует, что закон управления (14) обладает свойством нечувствительности к нарушению априорных предположений

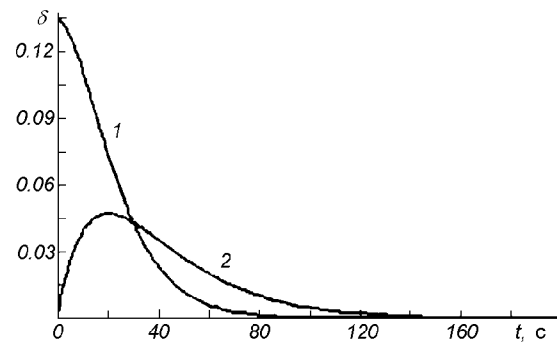


Рис. 2. Переходные процессы в системе с законом управления (22)

об объекте управления, а именно, к отклонению фактической орбитальной скорости e от используемой в этом законе расчетной. Указанное свойство закона управления (14), вообще говоря, позволяет использовать его для управления ориентацией КА не только на круговых, но и на эллиптических орбитах, для которых орбитальная угловая скорость является периодической функцией времени.

Было проведено исследование нечувствительности закона управления (14) к ошибкам в задании матрицы инерции \mathbf{J} . По аналогии с [2], вместо матрицы инерции \mathbf{J} , входящей в уравнение (2), в законе управления при моделировании использовалась матрица \mathbf{J}' , составленная из диагональных элементов \mathbf{J} , т. е. $\mathbf{J}' = \text{diag}\{1200, 2200, 3100\}$. При этом графики функций $\delta_1(t)$ и $\delta_2(t)$ с $m = 5$ с имели вид, аналогичный показанным на рис. 1, в, и ориентация КА в установившемся режиме также соответствовала заданной.

Пример 3. Моделировался закон управления (22) с $\tau = 10$ с, $\mathbf{K} = \text{diag}\{0.05, 0.05, 0.05\}$, $\Lambda_S^T = (\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/6, \sqrt{3}/6, \sqrt{3}/6)$ при $\Lambda^T(0) = (1, 0, 0, 0)$. Заметим, что хотя данное значение Λ_S не соответствует априорному предположению о виде задаваемых кватернионов ($\Lambda_S^T = (\lambda_{0S}, 0, 0, \lambda_{3S})$), при котором был получен закон (22), из приведенных на рис. 2 графиков функций $\delta_1(t)$ и $\delta_2(t)$ с $m = 2.5$ с видно, что установившаяся ориентация КА соответствует заданной и в этом случае.

Таким образом, результаты компьютерного моделирования проиллюстрировали эффективность предложенных алгоритмов управления, важную с практической точки зрения их нечувствительность к несоответствию между «истинными» свойствами объекта управления и свойствами его математической модели (робастность).

Работа выполнена при поддержке Украинского научно-технологического центра, проект 548.

1. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. — М.: Наука, 1973.—320 с.
2. Ви Б., Уэйс Х., Эрпостасис Э. Управление поворотом космического аппарата вокруг собственной оси с обратной связью по компонентам кватерниона // Аэрокосмическая техника.—1990.—№ 3.—С. 3—11.
3. Волосов В. В. Об управлении ориентацией космического аппарата в орбитальной системе координат с использованием эллипсоидальных оценок его вектора состояния // Пробл. управления и информатики.—1998.—№ 5.—С. 31—41.
4. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1967.—575 с.
5. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967.—472 с.
6. Ефимов Н. В., Розендорн Е. А. Линейная алгебра и многомерная геометрия. — М.: Наука, 1970.—528 с.
7. Зубов В. И. Устойчивость движения. — М.: Высшая шк., 1973.—272 с.
8. Кошляков В. Н. Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов. — М.: Наука, 1985.—288 с.
9. Красовский Н. Н. Некоторые задачи об устойчивости движения. — М.: Физматгиз, 1959.—211 с.
10. Красовский Н. Н. Обобщение теорем второго метода метода Ляпунова // Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. — М.: Наука, 1966.—С. 463—467.
11. Ла-Салль Ж., Левшеч С. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. — М.: Мир, 1964.—168 с.
12. Лебедев Д. В. Управление ориентацией твердого тела с использованием параметров Родрига—Гамильтона // Автоматика.—1974.—№ 4.—С. 29—32.
13. Лебедев Д. В., Ткаченко А. И., Штепа Ю. П. Магнитная система управления угловым движением микроспутника // Космічна наука і технологія.—1996.—2, № 5—6.—С. 17—25.
14. Раушенбах Б. В., Токарь Е. Н. Управление ориентацией космических аппаратов. — М.: Наука, 1974.—600 с.
15. Розенфельд Б. А. Многомерные пространства. — М.: Наука, 1966.—647 с.
16. Филимонов А. Б., Филимонов Н. Б. Негладкий анализ и синтез систем регулирования на основе прямого метода Ляпунова // Приборостроение.—1994.—37, № 7—8.—С. 5—15.
17. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. — М.: Наука, 1985.—224 с.
18. Mortensen R. E. A globally stable linear attitude regulator // Internat. J. Control.—1968.—8, № 3.—P. 297—302.

SYNTHESIS OF SPACECRAFT ATTITUDE CONTROL ALGORITHMS USING QUATERNIONS

V. V. Volosov and L. I. Tyutyunnik

The problem are solved in the synthesis of algorithms for spacecraft attitude control relative to orbital and inertial bases. The known generalizations of the direct Lyapunov method to the investigation of the stability of invariant sets of dynamic systems are used to solve the above problems. The efficiency of the algorithms obtained is illustrated by computer modelling of attitude system dynamics in whose loops these algorithms are used.