ISSN 1561-8889. Космічна наука і технологія. 1999. Т 5. № 4. С. 16—21.

УДК 539.3

Численный алгоритм определения спектральных характеристик неоднородных оболочечных конструкций

Д. В. Бабич[1], П. З. Луговой[1], Д. Т. Таращенко[2]

[1]Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ

[2]Інститут фізики НАН України, Київ

Надійшла до редакції 19.04.99

На основі принципу Остроградського—Гамільтона запропоновано единий алгоритм чисельного розрахунку частот вільних коливань, критичних значень статичного навантаження та областей динамічної нестійкості параметричних коливань неоднорідних оболонок обертання.

Оболочечные конструкции, используемые в ракетно-космической технике, подвергаются воздействию статических и вибрационных нагрузок. Поэтому решение задач о собственных колебаниях, статической и динамической устойчивости оболочек представляет интерес с точки зрения отстройки от частот внешнего возбуждения, устранения нежелательных вибраций, надежной эксплуатации оболочечных изделий в условиях статических и динамических воздействий. Определенный интерес в плане достижения этих целей представляет использование конструктивных оболочечных элементов с переменными геометрическими и механическими параметрами. Аналитическое решение задач для таких оболочек сопряжено с большими математическими трудностями. Поэтому для исследования указанных объектов применяются численные методы типа вариационно-разностных, основанных на использовании принципа Треффца [1], Остроградского—Гамильтона [8] и т. п. Применение последнего принципа позволяет построить единый алгоритм определения частот собственных колебаний, критических значений нагрузок бифуркационной устойчивости и областей динамической неустойчивости параметрических колебаний оболочек. Основанием для этого является динамический критерий устойчивости [5], в соответствии с которым критическое значение нагрузки статической устойчивости рассматривается как сила, при которой соответствующая ей по форме колебаний собственная частота оболочки становится равной нулю, а также то обстоятельство, что в случае параметрических колебаний оболочек области динамической неустойчивости приближенно определяются спектрами собственных колебаний и критических статических нагрузок [2, 3]. Поэтому исследование указанных явлений сводится к решению задач о собственных колебаниях оболочки относительно некоторого равновесного (основного) состояния. Для решения этой задачи привлекается принцип Остроградского-Гамильтона, формулируемый для предварительно напряженной оболочки, рассматриваемой как трехмерное тело

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}(Э - T)dt = 0, \tag{1}$$

где

$$Э = \frac{1}{2}\int_V(\sigma_{11}e_{11} + \sigma_{22}e_{22} + \sigma_{12}e_{12} + \sigma_{13}e_{13} + \\ + \sigma_{23}e_{23} + \sigma_{110}\widetilde{e}_{11} + \sigma_{220}\widetilde{e}_{22})H_2dx_1dx_2dx_3 \tag{2}$$

— потенциальная энергия оболочки в возмущенном состоянии,

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} \right)^2 H_2 dx_1 dx_2 dx_3 \qquad (3)$$

— кинетическая энергия оболочки.

Символами σ_{ij} обозначены компоненты тензора напряжений, определяемые линейными составляющими компонентов тензора деформаций e_{ij}, σ_{ii0} — компоненты тензора основного напряженного состояния, относительно которого совершаются колебания; $\widetilde{e}_{ii}$ — нелинейные слагаемые компонентов тензора конечных деформаций в возмущенном состоянии оболочки; U_i — компоненты вектора перемещений; ρ — плотность материала оболочки; H_2 — коэффициент Ламе, связанный с окружной координатой x_2, измеряемой центральным углом; x_1, x_3 — координаты, отсчитываемые соответственно в направлении меридиана оболочки и по нормали к срединной поверхности оболочки; t — текущее время; V — объем собственно оболочки.

Сведение трехмерного уравнения (1) к одномерному по пространственным координатам осуществляется на основе кинематических гипотез С. П. Тимошенко и разложения компонентов вектора перемещений в ряды Фурье:

$$\begin{aligned} U_1 &= \overline{u}(x_1, x_2, t) + x_3 \overline{\varphi}_1(x_1, x_2, t), \\ U_2 &= \overline{v}(x_1, x_2, t) + x_3 \overline{\varphi}_2(x_1, x_2, t), \qquad (4) \\ U_3 &= \overline{w}(x_1, x_2, t), \end{aligned}$$

где $\overline{\varphi}_1$, $\overline{\varphi}_2$ — полные углы поворота нормали к срединной поверхности оболочки;

$$\overline{u} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_1, t)\sin nx_2 , \qquad \overline{v} = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x_1, t)\cos nx_2 ,$$

$$\overline{w} = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x_1, t)\sin nx_2 , \quad \overline{\varphi}_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{1n}(x_1, t)\sin nx_2 , \quad (5)$$

$$\overline{\varphi}_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{2n}(x_1, t)\cos nx_2 .$$

После формального освобождения от координаты t посредством умножения на экспоненциальный множитель $e^{-i\omega_n t}$ и интегрирования в пределах от $t_0 = 0$ до $t_1 = 2\pi/\omega_n$ (ω_n — круговая частота) уравнение (1) распадается на систему независимых уравнений вида

$$\delta \left[\int_0^L (I_1^* + I_2^* - T^*) dx_1 \right] = 0, \qquad (6)$$

где

$$I_1^* = \frac{\pi}{2} \{ C_{11} u,_1^2 + C_{66} v,_1^2 + C_{55} w,_1^2 + D_{11} \varphi_1,_1^2 +$$

$$+ D_{33} \varphi_2,_1^2 + \left[2(C_{11} k_1 + C_{12} k_2) u,_1 + 2 \frac{A_{2,1}}{A_2} (C_{12} k_1 + \right.$$

$$+ C_{22} k_2) u - \frac{2}{A_1} (C_{12} k_1) + C_{22} k_2) nv + \frac{2}{A_1} C_{44} n \varphi_2 +$$

$$+ K_{11} k_1 \varphi_{1,1} + K_{22} \left(- \frac{nk_1}{A_2} \varphi_2 + \frac{k_1 A_{2,1}}{A_2} \varphi_1 \right) +$$

$$+ \left. \left(\frac{k_1 A_{2,1}}{A_2} \varphi_1 - \frac{nk_1}{A_2} \varphi_2 + k_2 \varphi_{1,1} \right) \right] w +$$

$$+ \left(C_{11} k_1^2 + 2 C_{12} k_1 k_2 + C_{22} k_2^2 + C_{44} \frac{N^2}{A_2^2} \right) w^2 +$$

$$+ \left[C_{12} \frac{A_{2,1}}{A_2} u,_1 + C_{66} \frac{n}{A_2} v,_1 - C_{22} \frac{A_{2,1}}{A_2^2} nv - \right.$$

$$- C_{55} k_1 (\varphi_1 + w,_1) + K_{22} \left(\frac{A_{2,1}}{A_2^2} \varphi_1 - \frac{nA_{2,1}}{A_2^2} \varphi_2 \right) +$$

$$+ \left. K_{12} \frac{A_{2,1}}{A_2} \varphi_{1,1} + K_{33} \left(\frac{n^2}{A_2^2} \varphi_2 + \frac{n}{A_2} \varphi_{2,1} - \frac{A_{2,1}}{A_2^2} \varphi_2 \right) \right] u +$$

$$+ \left(C_{22} \frac{A_{2,1}}{A_2^2} + C_{66} \frac{n^2}{A_2^2} + C_{55} k_1^2 \right) u^2 + \left(C_{22} \frac{n^2}{A_2^2} + \right.$$

$$\left. C_{66} \frac{A_{2,1}}{A_2^2} + C_{44} k_2^2 \right) v^2 - 2 \left[C_{66} \frac{A_{2,1}}{A_2} v,_1 + C_{12} \frac{n}{A_2} u,_1 + \right.$$

$$+ C_{66} \frac{A_{2,1}}{A_2^2} u + C_{44} k_2 \left(\varphi_2 + \frac{n}{A_2} w \right) +$$

$$+ K_{22} \left(\frac{n^2}{A_2^2} \varphi_2 - \frac{nA_{2,1}}{A_2^2} \varphi_1 \right) - K_{12} \frac{n}{A_2} \varphi_{1,1} +$$

$$+ \left. K_{33} \left(- \frac{A_{2,1}}{A_2} \varphi_{2,1} + \frac{A_{2,1}^2}{A_2^2} \varphi_2 - \frac{nA_{2,1}}{A_2^2} \varphi_1 \right) \right] v +$$

$$+ \left(C_{55} + D_{22} \frac{A_{2,1}^2}{A_2^2} + D_{33} \frac{n^2}{A_2^2} \right) \varphi_1^2 + \left(C_{44} + D_{22} \frac{n^2}{A_2^2} + \right.$$

$$\left. + D_{33} \frac{A_{2,1}^2}{A_2^2} \right)^2 \varphi_2^2 + 2 \left(D_{12} \frac{A_{2,1}}{A_2} \varphi_{1,1} + D_{33} \frac{n^2}{A_2} \varphi_{2,1} + C_{55} w,_1 + \right.$$

$$\left. + K_{12} \frac{A_{2,1}}{A_2} u,_1 + K_{33} \frac{n}{A_2} v,_1 \right) \varphi_1 - 2 \left(D_{12} \frac{n}{A_2} \varphi_{1,1} + \right.$$

$$\left. + D_{33} \frac{A_{2,1}}{A_2} \varphi_{2,1} - K_{12} \frac{n}{A_2} u,_1 - K_{33} \frac{A_{2,1}}{A_2} v,_1 \right) \varphi_2 - 2 \frac{nA_{2,1}}{A_2^2} \times$$

$$\times (D_{22} + D_{33}) \varphi_1 \varphi_2 + K_{11} u,_1 \varphi_{1,1} + K_{33} v,_1 \varphi_{2,1} \} A_2; \qquad (7)$$

$$I_2^* = \frac{\pi}{2} \left[T_{110} (w,_1^2 - 2k_1 u w,_1 + k_1^2 u^2) + \right.$$

$$\left. + T_{220} \left(\frac{n^2}{A_2^2} w^2 - \frac{2nk_2}{A_2} vw + k_2^2 v^2 \right) \right]; \qquad (8)$$

$$T^* = \frac{\pi}{2}\omega^2[\Gamma_{11}(u^2 + v^2 + w^2) + 2\Gamma_{22}(u\varphi_1 + v\varphi_2) + \\ + \Gamma_{33}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)]A_2. \quad (9)$$

В выражениях (7)—(9) индекс n опущен, а также с учетом $x_3 = z$ обозначено

$$C_{ii} = \int_{-h/2}^{h/2} B_{ii}dz, \quad i = 1, 2, \qquad C_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} B_{12}dz,$$

$$C_{44} = \int_{-h/2}^{h/2} B_{44}dz, \quad C_{55} = \int_{-h/2}^{h/2} B_{55}dz, \quad C_{66} = \int_{-h/2}^{h/2} B_{66}dz,$$

$$K_{ii} = \int_{-h/2}^{h/2} B_{ii}zdz, \quad i = 1, 2,$$

$$K_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} B_{12}zdz, \qquad K_{33} = \int_{-h/2}^{h/2} B_{66}zdz,$$

$$D_{ii} = \int_{-h/2}^{h/2} B_{ii}\, z^2dz, \qquad i = 1, 2,$$

$$D_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} B_{12}z^2dz, \qquad D_{33} = \int_{-h/2}^{h/2} B_{66}z^2dz,$$

$$T_{ii0} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ii0}dz, \quad i = 1, 2,$$

$$B_{ii} = \frac{E_i}{1 - \nu_1\nu_2}, \quad i = 1, 2,$$

$$B_{12} = \frac{\nu_2 E_1}{1 - \nu_1\nu_2} = \frac{\nu_1 E_2}{1 - \nu_1\nu_2},$$

$$B_{66} = G_{12}, \qquad B_{55} = G_{13}, \qquad B_{44} = G_{23},$$

$$\Gamma_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \rho dz, \quad \Gamma_{22} = \int_{-h/2}^{h/2} \rho zdz, \quad \Gamma_{33} = \int_{-h/2}^{h/2} \rho z^2dz.$$

Здесь E_i — модули Юнга; G_{ik} — модули сдвига в плоскостях, определяемых индексами; ν_1, ν_2 — коэффициенты Пуассона; B_{ij}, σ_{ii0}, ρ в общем случае являются функциями координат x_1, z; L — длина оболочки; $h(x_1)$ — толщина.

В случае неоднородных оболочек функционалы уравнения (6) представляют собой квадратичные формы с переменными коэффициентами относительно кинематических параметров и их первых производных. Источником переменности коэффициентов являются переменность толщины и неоднородность упругих свойств оболочек в направлении меридиана, зависимость от продольной координаты геометрических параметров срединной поверхности, также неоднородность основного напряженно-деформированного состояния. Это обстоятельство при решении задач на собственные значения для неоднородных оболочек вынуждает к применению дискретной аппроксимации функционалов вариационного уравнения (6). Для этой цели длина образующей разбивается на N одинаковых отрезков длиной $\bar{t} = L/N$, и функционал вариационного уравнения (6) представляется в виде конечной суммы

$$\int_0^L Idx \approx \sum_{k=0}^{N} \alpha_k \bar{t}(I_{1k}^* + I_{2k}^* - T_k^*), \quad (10)$$

где I_{1k}^*, I_{2k}^*, T_k^* — плотности функционалов в k-м узле. Через α_k обознаен весовой множитель, характеризующий степень заполнения телом оболочки расчетной области. В качестве конечно-разностных отношений для аппроксимации производных в k-м узле используются центральные разности шестого порядка

$$y_1^i = \frac{1}{60\bar{t}}(y_{k+3}^i - 9y_{k+2}^i + 45y_{k+1}^i - 45y_{k-1}^i + 9y_{k-2}^i - y_{k-3}^i), \\ i = 1, \ldots, 5, \quad (11)$$

где y_k^i — значения кинематических параметров уравнения (6) в k-м узле. Индексам $i = 1, 2, 3, 4, 5$ соответствуют переменные u, v, w, φ_1, φ_2.

Уравнения типа Ритца, определяющие решения, которые доставляют функционалу уравнения (6) стационарные значения, строятся путем приравнивания нулю результатов дифференцирования правой части выражения (10) по неизвестным во всех узлах, вводимых для аппроксимации функционала. В соответствии с этим уравнения типа Ритца для k-го узла имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial y_k^i}\left[\sum_{j=k-3}^{k+3} \alpha_j \bar{t}(I_{1j}^* + I_{2j}^* - T^*)\right] = 0 \quad (i = 1, \ldots 5). \quad (12)$$

Применение центральных разностей (11) приводит к появлению трех законтурных точек в приторцевых областях оболочки. Поэтому для замыкания конечно-разностного аналога системы уравнений типа Ритца к уравнениям, записанным во внутренних узлах, следует прибавить дополнительные уравнения, которые составляются с учетом физического доопределения задачи. В частности, в случае ограничений, накладываемых в определенном направлении на кинематические параметры на торцах оболочки, в граничных и законтурных узлах обнуляются соответствующие кинематические параметры. При податливых опорах, разрешающих перемещение и повороты торцевых сечений в определенных направлениях, в граничных и законтурных узлах составляются уравнения типа (12) в предположении исчезающей жесткости в законтурных узлах. Этому случаю опирания оболочки соответствуют естественные краевые условия, и замыкание конечно-разностного аналога вариационного уравнения (6) автоматически следует из процедуры построения системы уравнений типа Ритца в узлах (−3, −2, −1, 0, N; $N+1$; $N+2$; $N+3$)

$$\frac{\partial}{\partial y_k^j}\left[\sum_{j=0}^{k+3}\alpha_k \bar{l}(I_{1j}^* + I_{2j}^* - T_j^*)\right] = 0,$$

$$(k = 0, -1, -2, -3),$$

$$\frac{\partial}{\partial y_k^j}\left[\sum_{j=2N-k-3}^{N}\alpha_k \bar{l}(I_{1j}^* + I_{2j}^* - T_j^*)\right] = 0\,, \qquad (13)$$

$$(k = N, N+1, N+2, N+3).$$

Особенностью уравнений (12), (13) является то, что они формулируются с учетом геометрии, механических свойств и конструктивных особенностей оболочки в каждом аппроксимационном узле, что позволяет применить излагаемый подход для решения задач на собственные значения для оболочек с переменными геометрическими и механическими параметрами, а также учитывать дискретность различного рода конструктивных особенностей оболочек типа кольцевых ребер, дискретных утолщений и т. п. путем совмещения мест их расположения по длине оболочки с некоторым узлом разностной сетки посредством вариации шага конечно-разностной аппроксимации либо путем использования весовых множителей α_k. При таком подходе к решению задач сопряженные оболочки рассматриваются как единые механические системы, что устраняет необходимость выполнения условий сопряжения отдельных фрагментов составных оболочечных систем [6].

Задачи о статической устойчивости и собственных колебаниях оболочек вращения в результате дискретизации вариационного уравнения (6) сводятся к решению однородных систем алгебраических уравнений, в матричном виде имеющих представление

$$\|\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B} + \omega^2\mathbf{B}'\|\,|\mathbf{Y}| = 0. \qquad (14)$$

Здесь матрицы **A**, **B**, **B**′ определяются на основании соотношений (7)—(9); λ — параметр нагрузки, определяющий уровень нагружения в основном равновесном состоянии; ω — круговая частота; **Y** — вектор, компонентами которого являются перемещения и углы поворотов в точках координатной поверхности, совмещенных с аппроксимационными узлами.

Условием существования нетривиального решения системы уравнений (14) является равенство нулю ее определителя

$$|\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B} + \omega^2\mathbf{B}'| = 0. \qquad (15)$$

При заданном уровне нагружения $\lambda = P_0$ определение частот собственных колебаний предварительно нагруженных оболочек сводится, таким образом, к обобщенной задаче на собственные значения для симметричных ленточных матриц конечно-разностного аналога вариационного уравнения (6), вытекающего из принципа Остроградского-Гамильтона.

Критические величины нагрузки, определяемые параметром $\lambda = T_{110}^n$, будут соответствовать нулевым значениям частоты форм собственных колебаний, совпадающих с формами потери устойчивости. Корни определителя (15) находятся с использованием стандартного метода Гаусса.

Области динамической неустойчивости параметрических колебаний, вызываемые вибрационными осевыми погонными усилиями

$$T_{110} = -(P_0 + P_t\cos\theta t), \qquad (16)$$

определяются спектрами частот собственных колебаний и критических статических нагрузок [2, 3]. Границы главной области динамической неустойчивости, в пренебрежении тангенциальными силами инерции и инерцией вращения, приближенно определяются уравнениями [2]

$$\theta_1^{(1)} = 2\omega_n\sqrt{1+\delta_n},$$
$$\theta_2^{(1)} = 2\omega_n\sqrt{1-\delta_n}. \qquad (17)$$

Здесь ω_n — круговые частоты колебаний оболочки, загруженной осевой сжимающей силой P_0,

$$\delta_n = \frac{P_t}{2(T_{110}^n - P_0)}$$

— коэффициент возбуждения, T_{110}^n — критические осевые сжимающие усилия, соответствующие формам потери устойчивости, совпадающим с формами колебаний на частотах ω_n.

Изложенная процедура позволяет оценить влияние на спектральные характеристики оболочек проектной формы осесимметричных начальных геометрических несовершенств технологического и другого характера.

Отклонение образующей от исходной формы оболочек вращения $r = \phi(x_1)$ осуществляется заданием малых возмущений $\varphi(x_1)$ функции изменения радиуса параллели

$$r = \phi(x_1) + \varphi(x_1).$$

Кривизны и коэффициенты Ламе при таком задании радиуса параллели будут определяться выражениями

$$k_1 = -\frac{\phi_{,11} + \varphi_{,11}}{\sqrt{1 - (\phi_{,1} + \varphi_{,1})^2}},$$
$$k_2 = \frac{\sqrt{1 - (\phi_{,1} + \varphi_{,1})^2}}{A_2}, \qquad (18)$$
$$A_2 = \phi + \varphi.$$

В частности, в случае цилиндрической оболочки ($\phi(x_1) = R$) с синусоидальным отклонением от прямолинейной образующей

$$r = A_2 = R + a\sin\lambda_m x_1$$

кривизны оболочки с возмущенной формой в соответствии с (18) имеют вид

$$k_1 = \frac{a\lambda_m^2\sin\lambda_m x_1}{\sqrt{1 - (a\lambda_m\cos\lambda_m x_1)^2}},$$
$$k_2 = \frac{\sqrt{1 - (a\lambda_m\cos\lambda_m x_1)^2}}{A_2}. \qquad (19)$$

Здесь $\lambda_m = m\pi/l$, $l = L + \pi^2 m^2 a^2/4L$ — длина искривленной образующей оболочки; m — волновое число, определяющее форму отклонения образующей от прямолинейной формы; $|a|$ — амплитуда отклонения.

В качестве основного равновесного состояния в дальнейшем рассматривается безмоментное напряженное состояние, вызванное сжатием торцевыми осевыми усилиями P_0.

Погонные меридиональные и окружные усилия приближенно определяются формулами

$$T_{110} = -\frac{P_0 R}{A_2\sqrt{1 - (a\lambda_m\cos\lambda_m x_1)^2}},$$
$$T_{220} = -T_{110}\frac{k_1}{k_2}. \qquad (20)$$

Для иллюстрации возможностей изложенного алгоритма проведены расчеты спектральных характеристик для жестко защемленных неоднородных по толщине цилиндрических оболочек одинаковой массы с малыми искривлениями образующей. Относительные размеры оболочки составляли $L : R : h_c = 1.5 : 1 : 0.01$ ($h_c = 0.02$ м — средняя толщина). Материал оболочек предполагался идеально упругим с постоянными $E = 1.96 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0.3$, $\rho = 7.7 \cdot 10^3$ кг/м^3. В табл. 1 помещены отношения значений минимальных осевых критических усилий (T^*_{110}) для оболочек с малыми искривлениями образующей оболочки, к таковому для идеальной цилиндрической оболочки средней толщины ($T^*_{110} = 2.37 \cdot 10^7$ Н/м). Вариант A относится к оболочкам с постоянной средней толщиной h_c; вариант B — к оболочкам с толщинами: $h_1 = h_3 = 1.5h_c$ на участках $0 \le x_1 \le L/4$, $3L/4 \le x_1 \le L$ и $h_2 = 0.5h_c$ на участке $L/4 < x_1 < 3L/4$; вариант C соответствует оболочке с толщиной $h_1 = h_3 = 0.5h_c$ на участках $0 \le x_1 < L/4$, $3L/4 < x_1 \le L$ и $h_2 = 1.5h_c$ на участке $L/4 \le x_1 \le 3L/4$. В скобках указано количество волн форм потери устойчивости в окружном направлении.

Таблица 1. Критические значения осевых сжимающих нагрузок

a	Вариант A	Вариант B	Вариант C
$-0.5R \cdot 10^{-2}$	0.73(8)	0.29(7)	0.20(13)
0	1.00(9)	0.26(7)	0.27(10)
$0.5R \cdot 10^{-2}$	0.52(7)	0.22(7)	0.29(13)

В табл. 2 представлены безразмерные значения низших круговых частот ($\overline{\omega}_n = \omega_n R\sqrt{\rho/E}$). Буквой n обозначено количество волн в окружном направлении форм собственных колебаний.

В табл. 3 приведены значения статических критических нагрузок и круговых частот ω_n для рассмотренных вариантов оболочек при их осевом обжатии усилиями P_0.

Представленные в табл. 1—3 результаты свидетельствуют о существенном раздельном и совместном влиянии неоднородности толщины и начальных искривлений образующей оболочек на их спектральные характеристики. Как правило, это влияние неблагоприятно сказывается на запасе статической и динамической устойчивости оболочек.

Таблица 2. Безразмерные параметры круговой частоты собственных колебаний свободной оболочки

n	Вариант A			n	Вариант B			n	Вариант C		
	$a = 0$	$m = 3$, $a = 0.5R \cdot 10^{-2}$	$m = 3$, $a = -0.5R \cdot 10^{-2}$		$a = 0$	$m = 3$, $a = 0.5R \cdot 10^{-2}$	$m = 3$, $a = -0.5R \cdot 10^{-2}$		$a = 0$	$m = 3$, $a = 0.5R \cdot 10^{-2}$	$m = 3$, $a = -0.5R \cdot 10^{-2}$
5	0.23	0.19	0.27	7	0.24	0.19	0.30	3	0.26	0.24	0.27
6	0.21	0.17	0.25	8	0.23	0.18	0.29	4	0.20	0.18	0.22
7	0.21	0.18	0.24	9	0.24	0.21	0.31	5	0.18	0.17	0.20
8	0.23	0.22	0.26	10	0.25	0.22	0.32	6	0.20	0.19	0.21
9	0.27	0.26	0.29	11	0.27	0.25	0.33	7	0.24	0.23	0.24
10	0.32	0.32	0.34	12	0.29	0.28	0.35	8	0.28	0.29	0.28

Таблица 3. Критические статистические нагрузки и круговые частоты обжатых оболочек переменной толщины

n	Вариант A			Вариант B			Вариант C		
	$T_{110}^{n}\cdot 10^{-7}$ Н/м	$\omega_n\cdot 10^{-2}$		$T_{110}^{n}\cdot 10^{-7}$ Н/м	$\omega_n\cdot 10^{-2}$		$T_{110}^{n}\cdot 10^{-7}$ Н/м	$\omega_n\cdot 10^{-2}$	
		$P_0 = -0.19\cdot 10^{7}$ Н/м	$P_0 = -0.39\cdot 10^{7}$ Н/м		$P_0 = -0.19\cdot 10^{7}$ Н/м	$P_0 = -0.39\cdot 10^{7}$ Н/м		$P_0 = -0.19\cdot 10^{7}$ Н/м	$P_0 = -0.39\cdot 10^{7}$ Н/м
5	2.41	5.89	5.76	0.618	7.58	7.38	0.696	6.77	6.68
6	2.40	5.24	5.11	0.616	6.43	6.12	0.689	5.21	5.08
7	2.39	5.27	5.13	0.615	5.79	5.38	0.681	4.64	4.49
8	2.38	5.85	5.72	0.614	5.55	4.96	0.673	4.92	4.79
9	2.37	6.83	6.72	0.612	5.56	4.79	0.665	5.84	5.71

Таблица 4. Критические статистические нагрузки и круговые частоты обжатых продольно подкрепленных оболочек

n	Вариант 1)			Вариант 2)			Вариант 3)		
	$T_{110}^{n}\cdot 10^{-7}$ Н/м	$\omega_n\cdot 10^{-2}$		$T_{110}^{n}\cdot 10^{-7}$ Н/м	$\omega_n\cdot 10^{-2}$		$T_{110}^{n}\cdot 10^{-7}$ Н/м	$\omega_n\cdot 10^{-2}$	
		$P_0 = -0.19\cdot 10^{7}$ Н/м	$P_0 = -0.39\cdot 10^{7}$ Н/м		$P_0 = -0.19\cdot 10^{7}$ Н/м	$P_0 = -0.39\cdot 10^{7}$ Н/м		$P_0 = -0.19\cdot 10^{7}$ Н/м	$P_0 = -0.39\cdot 10^{7}$ Н/м
10	0.74	4.23	3.81	0.65	4.27	3.79	0.68	4.29	3.91
11	0.73	4.89	4.52	0.64	4.89	4.45	0.67	4.95	4.62
12	0.74	5.68	5.38	0.63	5.69	5.27	0.66	5.73	5.43
13	0.76	6.59	6.34	0.63	6.59	6.21	0.70	6.62	6.36
14	0.80	7.59	7.38	0.65	7.59	7.22	0.72	7.62	7.38

Рассматривались также цилиндрические оболочки с продольным подкреплением переменной по длине жесткости. В табл. 4 представлены результаты расчета критических значений осевых усилий и круговых частот собственных колебаний обжатых цилиндрических оболочек для трех вариантов симметричного регулярного подкрепления восемью стрингерами переменной высоты $h(x_1)$:

1) $h_1 = h_2 = h_3 = 2h$ при $0 \le x_1 \le L$;

2) $h_1 = h_3 = 3h$ при $0 \le x_1 \le L/4$ и $3L/4 \le x_1 \le L$;

$h_2 = h$ при $L/4 < x_1 < 3L/4$;

3) $h_1 = h_3 = h$ при $0 \le x_1 \le L/4$ и $3L/4 < x_1 \le L$,

$h_2 = 3h$ при $L/4 \le x_1 \le 3L/4$.

Ширина подкреплений во всех случаях равнялась толщине оболочки. Материал оболочки принимался тем же, что и в первом примере. Относительные размеры собственно оболочки составляли $L : R : h = 3 : 2 : 0.01$. Подкрепленная оболочка моделировалась конструктивно-ортотропной оболочкой [7] и условно-слоистой оболочкой [4].

Результаты, полученные в рамках этих моделей, практически совпадают. Как и в случае оболочек ступенчато-переменной толщины, с точки зрения запаса статической и динамической устойчивости продольное подкрепление переменной по длине оболочки жесткости при осевом силовом воздействии неэффективно.

1. Бабич Д. В. Метод дискретной аппроксимации функционала в задачах устойчивости оболочек вращения // Прикл. механика.—1983.—19, № 2.—С. 38—44.
2. Богданович Ф. Е. Нелинейные задачи динамики цилиндрических композитных оболочек. — Рига: Зинатне, 1987.—295 с.
3. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. — М.: Гос. изд. техн.-теор. лит., 1956.—600 с.
4. Васильев В. В. Мехфник конструкций из композиционных материалов. — М.: Машиностроение, 1987.—269 с.
5. Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем. — М.: Физматгиз, 1963.—879 с.
6. Гайдайчук В. В., Савченко А. Т. Устойчивость тороцилиндрических оболочек // Сопротивление материалов и теория сооружений.—1984.—Вып. 44.—С. 57—61.
7. Королев В. И. Упруго-пластические деформации оболочек. — М.: Машиностроение, 1971.—212 с.
8. Луговой П. З., Мейш В. Ф., Мукоид В. П. Динамика оболочечных конструкций при взрывных нагрузках. — Киев: Наук. думка, 1991.—280 с.

NUMERICAL ALGORITHM FOR THE DETERMINATION OF SPECTRAL CHARACTERISTICS OF NON-HOMOGENEOUS SHELL STRUCTURES

D. V. Babich, P. Z. Lugovoi, and D. T. Tarashchenko

A unified algorithm based on the Ostrogradsky-Hamilton principle was elaborated for the numerical calculation of free vibration frequencies, critical values of statical loads, and domains of dynamical instability of parametric vibrations of non-homogeneous rotary shells widely used in the aerospace technology.