ISSN 1561-8889. *Космічна наука і технологія.* 1999. Т 5. № 2/3. С. 103—107.

УДК 628.78

К построению новых форм уравнений возмущенного кеплерова движения

А. В. Пироженко

Інститут технічної механіки НАН України і НКА України, Дніпропетровськ

Надійшла до редакції 17.03.98

Запропонована методика побудови рівнянь збуреного кеплерового руху. Показані можливості застосування методики та нові форми рівнянь для випадків руху супутників на круговій або близькій до кругової орбіті і руху супутників на сусідніх орбітах.

ВВЕДЕНИЕ

Небесная механика, разрабатываемая столетиями, содержит большое многообразие форм уравнений возмущенного кеплерова движения [6]. Эти уравнения охватывают практически все случаи орбитального движения спутников, и в большинстве задач механики космического полета используются в готовом виде. Однако для некоторых задач механики космического полета, постановка которых отлична от задач небесной механики, классические формы уравнений представляются излишне сложными, и введение новых переменных, описывающих орбитальное движение, может быть эффективным. Вместе с тем известные схемы вывода уравнений возмущенного кеплерова движения: схема, основанная на вычислении скобок Лагранжа для эллиптических элементов орбиты (см. курс небесной механики Тиссерана [7]), схема Дубошина [3], основанная на геометрических построениях, и схема Лурье [4], основанная на фиксировании векторных выражений невозмущенного движения, — представляются чрезмерно громоздкими, что затрудняет введение новых переменных, удобных для конкретной задачи.

Ниже будут показаны преимущества новой схемы вывода уравнений возмущенного кеплерова движения и ее возможности для построения новых форм уравнений.

СХЕМА ВЫВОДА УРАВНЕНИЙ

Рассматривается движение материальной точки в ньютоновском поле сил при воздействии возмущений. Исходные уравнения движения есть

$$\ddot{\mathbf{R}} = -\frac{\mu \mathbf{R}}{R^3} + \mathbf{F}, \qquad (1)$$

где $\mathbf{R}$ — радиус-вектор материальной точки относительно ньютоновского притягивающего центра, μ — гравитационный параметр, $\mathbf{F}$ — возмущающие ускорения.

Введем правые системы координат с началом в притягивающем центре C: $CXYZ$ — абсолютная система координат, $Cxyz$ — подвижная система координат, ось Cx — направлена по $\mathbf{R}$, ось Cz — по вектору кинетического момента движения материальной точки. Ориентация $Cxyz$ в $CXYZ$ определяется эйлеровыми углами Ω, i, u, где Ω — долгота восходящего узла, i — наклонение, u — аргумент широты.

Первую группу уравнений возмущенного движения получим на основе теоремы изменения кинетического момента

$$\mathbf{L}' + \omega \times \mathbf{L} = \mathbf{M} = \mathbf{R} \times \mathbf{F}, \qquad (2)$$

где ω — угловая скорость $Cxyz$ относительно $CXYZ$, $\mathbf{L} = \mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}} = L\mathbf{e}_3$; $\mathbf{e}_3$ — орт оси Cz, штрихом обозначена производная по времени в системе $Cxyz$,

L — удельный кинетический момент (для кеплерова движения $L = \sqrt{\mu p}$, p — фокальный параметр орбиты).

Проекции уравнения (2) на оси подвижной системы координат имеют вид

$$\dot{L} = M_3\,,$$

$$\omega_2 L = M_1 = 0, \qquad \omega_1 L = -M_2. \tag{3}$$

Здесь индексами 1, 2, 3 обозначены проекции на оси Cx, Cy, Cz соответственно.

Используя соотношения между компонентами угловой скорости и производными эйлеровых углов

$$\omega_1 = \dot{\Omega}\sin i\,\sin u + \frac{di}{dt}\cos u,$$

$$\omega_2 = \dot{\Omega}\sin i\,\cos u - \frac{di}{dt}\sin u,$$

$$\omega_3 = \dot{\Omega}\cos i + \dot{u},$$

из (3) получим первую группу уравнений возмущенного движения

$$\frac{di}{dt} = -\frac{M_2\cos u}{L} = \frac{RF_3\cos u}{L} = \frac{R}{p}\cos u\widetilde{F}_3\,,$$

$$\dot{\Omega} = -\frac{M_2\sin u}{L\sin i} = \frac{RF_3\sin u}{L\sin i} = \frac{R}{p}\frac{\sin u}{\sin i}\widetilde{F}_3\,, \tag{4}$$

$$\dot{L} = RF_2\,,\quad \dot{p} = 2R\widetilde{F}_2\,,$$

где $\widetilde{F}_i = \sqrt{p/\mu}\;F_i$

Уравнение изменения угла u найдем из равенства

$$\mathbf{L} = L\mathbf{e}_3 = \mathbf{R}\times(\mathbf{R}' + \omega\times\mathbf{R}) = R^2\omega_3\mathbf{e}_3. \tag{5}$$

Следовательно,

$$\dot{u} = \frac{L}{R^2} - \dot{\Omega}\cos i = \frac{\sqrt{\mu p}}{R^2} - \frac{R}{p}\sin u\,\mathrm{ctg}\,i\widetilde{F}_3\,. \tag{6}$$

Учитывая, что $\ddot{\mathbf{R}}\mathbf{e}_1 = \ddot{R} - \omega_3^2 R$, где $\mathbf{e}_1$ — орт оси Cx, получим, проектируя (1) на ось Cx, уравнение изменения R:

$$\ddot{R} - \frac{L^2}{R^3} = -\frac{\mu}{R^2} + F_1\,. \tag{7}$$

Поскольку в кеплеровом движении

$$R = \frac{p}{1 + e\cos\nu}\,,\quad \dot{R} = \sqrt{\mu/p}\;e\sin\nu, \tag{8}$$

где e — ексцентриситет, ν — истинная аномалия орбиты, то, фиксируя (8) и рассматривая эти выражения как формулы замены переменных, нетрудно получить уравнения изменения e и ν в возмущенном движении. Еще проще получить эти уравнения из очевидных равенств

$$h = \frac{1}{2}\left(\dot{R}^2 + \frac{\mu p}{R^2}\right) - \frac{\mu}{R}\,,\quad \dot{h} = \dot{R}F_1 + \frac{1}{2}\frac{\mu\dot{p}}{R^2}\,,$$

где h — постоянная удельной энергии невозмущенного движения, и учитывая, что

$$h = -\frac{\mu}{2a} = -\frac{\mu(1 - e^2)}{2p}.$$

Тогда

$$\dot{a} = \frac{2a^2 e\sin\nu}{p}\widetilde{F}_1 + \frac{2a^2\widetilde{F}_2}{R}\,,$$

$$\dot{e} = \widetilde{F}_1\sin\nu + \left[\cos\nu + (e + \cos\nu)\frac{R}{p}\right]\widetilde{F}_2\,, \tag{9}$$

$$\dot{\nu} = \frac{\sqrt{\mu p}}{R^2} + \frac{\widetilde{F}_1\cos\nu}{e} - \widetilde{F}_2\left(1 + \frac{R}{p}\right)\frac{\sin\nu}{e}\,,$$

где a — большая полуось орбиты. Следовательно,

$$\dot{\omega}_\pi = \dot{u} - \dot{\nu} = -\frac{\widetilde{F}_1\cos\nu}{e} + \widetilde{F}_2\left(1 + \frac{R}{p}\right)\frac{\sin\nu}{e} - $$
$$- \frac{r}{p}\sin u\,\mathrm{ctg}\,i\widetilde{F}_3\,, \tag{10}$$

где ω_π — аргумент перицентра.

Уравнение для времени прохождения через перигей определяется дифференцированием по времени равенства

$$t - \tau = \frac{p^{3/2}}{\sqrt{\mu}}\int_0^\nu \frac{d\nu}{(1 + e\cos\nu)^2}\,, \tag{11}$$

получаемого из

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{\sqrt{\mu p}}{R^2}\,.$$

Таким образом, получена обычная форма уравнений возмущенного кеплерова движения — уравнения Ньютона [6]. Схема их вывода основана на использовании теоремы изменения кинетического момента и на методике построения уравнений возмущенного движения нелинейного колебательного звена [5]. Основное отличие предлагаемой методики заключается в том, что при выводе уравнений возмущенного движения радиальных колебаний берутся за основу (фиксируются) не формы первых интегралов движения, а форма этих колебаний наиболее подходит для исследования конкретной задачи.

Отметим, что в [4] в качестве основы вывода уравнений возмущенного кеплерова движения использовались не первые интегралы, а формулы, непосредственно описывающие изменение переменных в невозмущенном движении. Это позволило значительно упростить вывод уравнений возмущенного кеплерова движения по сравнению с ранее известными. Однако громоздкое дифференцирование векторных величин, осуществляемое в [4], как видим, излишне.

Покажем, что разработанная методика позволяет достаточно просто строить новые формы уравнений возмущенного кеплерова движения.

СХЕМЫ ПОСТРОЕНИЯ НОВЫХ ФОРМ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим движение спутника на близкой к круговой орбите. Выведенные уравнения возмущенного движения имеют особенность при $e = 0$, поэтому их использование в случае эксцентриситетов, близких к нулю, затруднительно. Да и понятие эксцентриситета для близких к круговым орбитам спутников Земли часто не имеет особого смысла, поскольку учитываемые эксцентриситетом отклонения орбиты от круговой соизмеримы с отклонением орбит от кеплеровых, вносимых возмущениями, например, нецентральностью гравитационного поля Земли.

Классически в случае малых эксцентриситетов в уравнения, полученные для общего случая, вводятся новые переменные — переменные Лагранжа $\lambda_1 = e\sin\omega_\pi$ и $\lambda_2 = e\cos\omega_\pi$. При этом уравнения возмущенного движения не будут иметь особенностей при $e = 0$, но в качестве опорной траектории для почти круговой орбиты сохраняется кеплерово движение на эллиптической орбите. Поскольку движения на эллиптических и круговых орбитах имеют качественные отличия, то введение переменных Лагранжа приводит к усложнению уравнений, и, как представляется, за введение переменных Лагранжа приходиться «расплачиваться» излишней их громоздкостью. Так, например, λ_1 , λ_2, описывающие форму орбиты, в уравнениях зависят от нормальной составляющей возмущающих сил, хотя очевидно, что нормальная составляющая не должна влиять на форму орбиты. Конечно, разработанный в небесной механике аппарат исследований этих уравнений и полученные результаты с лихвой покрывают излишнюю громоздкость исходных уравнений.

В случае почти круговой орбиты движения спутника в качестве опорной орбиты невозмущенного движения естественно рассматривать круговую кеплерову орбиту.

Тогда вместо (8) положим

$$R = p(1 + b_1), \quad \dot{R} = b_2\sqrt{\mu/p} \tag{12}$$

и будем рассматривать (12) в качестве формул введения новых переменных b_1, b_2. В силу постановки задачи b_1, $b_2 << 1$.

Дифференцируя первое уравнение (12) по времени, получим

$$\dot{R} = \dot{p}(1 + b_1) + p\dot{b}_1 \Rightarrow \dot{b}_1 = b_2\sqrt{\mu/p^3} - 2(1 + b_1)^2\tilde{F}_2 .$$

Дифференцируя второе равенство (12) с учетом (4), (7), получим

$$\ddot{R} = \dot{b}_2\sqrt{\frac{\mu}{p}} - \frac{1}{2}b_2\sqrt{\frac{\mu}{p^3}}\,\dot{p} = \frac{\mu p}{R^3} - \frac{\mu}{R^2} + \tilde{F} \Rightarrow$$

$$\dot{b}_2 = b_2(1 + b_1)\tilde{F}_2 + \tilde{F}_1 - \sqrt{\frac{\mu}{p^3}}\,\frac{b_1}{(1 + b_1)^3} .$$

Таким образом, уравнения возмущенного кеплерова движения для орбит, близких к круговым, будут иметь вид

$$\begin{gathered}
\dot{\Omega} = z\frac{\sin u}{\sin i}\tilde{F}_3 , \quad \frac{di}{dt} = z\cos u\tilde{F}_3 , \\
\dot{\gamma} = 2zs\tilde{F}_2 , \\
\Delta\dot{u} = \sqrt{\frac{\mu}{p_0^3}}\left(\frac{1}{s^{3/2}z^2} - 1\right) - \dot{\Omega}\cos i, \\
\dot{b}_1 = b_2\sqrt{\mu/p^3} - 2z^2\tilde{F}_2 , \\
b_2 = b_2 z\tilde{F}_1 - \sqrt{\frac{\mu}{p^3}}\frac{b_1}{z^3} ,
\end{gathered} \tag{13}$$

где $z = 1 + b_1$, $s = 1 + \gamma$, $p = p_0(1 + \gamma)$, $\Delta U = u - u_0$, p_0, u_0 — соответственно фокальный параметр и аргумент широты опорной невозмущенной круговой орбиты, $\dot{u}_0 = \sqrt{\mu/p_0^3}$, γ, в силу постановки задачи, малая величина.

При замене переменных вида

$$R = p_0(1 + b_1), \quad \dot{R} = b_2\sqrt{\frac{\mu}{p_0}} , \tag{14}$$

уравнения движения будут иметь вид

$$\begin{gathered}
\dot{\Omega} = z\frac{\sin u}{\sin i}\tilde{F}_3 , \quad \frac{di}{dt} = z\cos u\tilde{F}_3 , \\
\dot{\gamma} = 2z\tilde{F}_2 , \\
\Delta\dot{u} = \sqrt{\frac{\mu}{p_0^3}}\left(\frac{\sqrt{s}}{z^2} - 1\right) - \dot{\Omega}\cos i, \\
\dot{b}_1 = b_2\sqrt{\frac{\mu}{p_0^3}} , \\
\dot{b}_2 = \sqrt{\frac{\mu}{p_0^3}}\frac{\gamma - b_1}{z^3} + \sqrt{\frac{p_0}{\mu}}F_1 ,
\end{gathered} \tag{15}$$

где сохранены те же обозначения, что и в (13).

Полученные новые формы уравнений (13), (15) могут эффективно использоваться в задачах быстрого численного анализа движений спутника на близких к круговым орбитах, когда результаты, полученные в небесной механике, не могут быть использованы. Например — в задачах разработки и анализа систем уравнения ориентации и стабилизации спутников относительно центра масс, когда необходим расчет параметров орбитального движения. Обычно этот расчет не требует высокой точности, но часто, например из-за действия аэродинамических сил, нельзя воспользоваться приближенными конечными формулами.

Отметим, что численное интегрирование уравнений (13), (15) лучше осуществлять по новой независимой переменной u_0 — аргументу широты невозмущенной орбиты.

Отметим также, что уравнения (13), (15) позволяют существенно упростить получение приближенных формул изменения параметров орбиты. Так, известные формулы возмущений орбитального движения от второй зональной гармонии [6] для круговых орбит для уравнения (15) получаются в результате первой итерации метода последовательных приближений.

Рассмотрим теперь движение двух тел на соседних орбитах. Эта задача актуальна для расчетов движений групп спутников и движения основного спутника и субспутника, например, в проекте «Предупреждение». В таких задачах движение других тел естественно описывать относительно орбиты основного спутника (основной орбиты). Поскольку наклонение орбиты субспутника к основной орбите мало, и выведенные уравнения имеют особенность при $i = 0$, то их использование затруднительно. Очевидно, что это связано с выбором тройки углов ориентации и вырождением кинематических уравнений при малых углах нутации. В небесной механике, для того чтобы избежать вырождения, в уравнения, полученные для общего случая, вводятся новые переменные — средняя долгота или переменные Лагранжа [6].

С точки зрения механика такой прием представляется несколько искусственным. Все выше сказанное о введении переменных Лагранжа в случае движения спутников на почти круговых орбитах имеет место и в этом случае. В случае малых наклонений, естественно использовать другую тройку углов ориентации, а именно углы, удобные при малых наклонениях основных плоскостей.

Введем правые системы координат с началом в притягивающем центре C. $CX^*Y^*Z^*$ — невращающаяся система координат. $CXYZ$ — система координат, связанная с основной орбитой, причем ось CZ направлена по бинормали к орбите. $Cxyz$ — система координат, связанная с движением субспутника. Ось Cx направлена от притягивающего центра к центру масс субспутника, ось Cz — по кинетическому моменту его орбитального движения (бинормали к орбите).

Возьмем в качестве углов ориентации $Cxyz$ в $CXYZ$ углы Брайнта φ_1, φ_2, φ_3 [2] (самолетные углы, φ_1, φ_2, φ_3 — соответственно углы рыскания, тангажа и крена).

Пусть ω есть вектор угловой скорости $Oxyz$ в $OXYZ$, а ω^* — вектор угловой скорости $OXYZ$ относительно $OX^*Y^*Z^*$. Тогда на основании теоремы изменения кинетического момента получим

$$\mathbf{L}' + (\omega + \omega^*) \times \mathbf{L} = \mathbf{R} \times \mathbf{F}^*. \tag{16}$$

Используя соотношения между проекциями угловой скорости на оси подвижной системы координат и производными углов Брайнта

$$\omega_1 = \dot\varphi_1\cos\varphi_2\cos\varphi_3 + \dot\varphi_2\sin\varphi_3\,,$$

$$\omega_2 = -\dot\varphi_1\cos\varphi_2\sin\varphi_3 + \dot\varphi_2\cos\varphi_3\,,$$

$$\omega_3 = \dot\varphi_1\sin\varphi_2 + \dot\varphi_3\,,$$

аналогично (4), (6) получим

$$\begin{gathered}\dot\varphi_1 = \frac{RF_3}{L}\frac{\cos\varphi_3}{\cos\varphi_2} + \frac{1}{\cos\varphi_2}(\omega_2^*\sin\varphi_3 - \omega_1^*\cos\varphi_3),\\ \dot\varphi_2 = \frac{RF_3}{L}\sin\varphi_3 - (\omega_1^*\sin\varphi_3 + \omega_2^*\cos\varphi_3),\\ \dot\varphi_3 = F_3\frac{L}{R^2} - \omega_3^* - \dot\varphi_1\sin\varphi_2\,.\end{gathered} \tag{17}$$

Или, выражая ω_1^*, ω_2^*, ω_3^* через проекции ω^* на оси $CXYZ$ ω_{01}^*, ω_{02}^*, ω_{03}^*, получим

$$\begin{gathered}\dot\varphi_1 = \frac{R}{p}\frac{\cos\varphi_3}{\cos\varphi_2}\widetilde{F}_3 - \omega_{01}^* - \mathrm{tg}\varphi_2(\omega_{02}^*\sin\varphi_1 - \omega_{03}^*\cos\varphi_1),\\ \dot\varphi_2 = \frac{R}{p}\sin\varphi_3\widetilde{F}_3 - \omega_{02}^*\cos\varphi_2 - \omega_{03}^*\sin\varphi_1\,,\\ \dot\varphi_3 = \frac{\sqrt{\mu p}}{R^2} + \\ + \frac{1}{\cos\varphi_2}\left[\omega_{02}^*\sin\varphi_1 - \omega_{03}^*\cos\varphi_1 - \frac{R}{p}\cos\varphi_3\sin\varphi_2\widetilde{F}_3\right].\end{gathered} \tag{18}$$

В зависимости от системы координат, связанной с орбитальным движением основного спутника, ω_{01}^*, ω_{02}^*, ω_{03}^* будут иметь разный вид. Для орбитальной системы координат:

$$\omega_{01}^* = \dot\Omega_a\sin i_a\sin u_a + \frac{di_a}{dt}\cos u_a\,,$$

$$\omega_{02}^* = \dot\Omega_a\sin i_a\cos u_a - \frac{di_a}{dt}\sin u_a\,,$$

$$\omega_{03}^* = \dot u_a + \dot\Omega_a\cos i_a\,.$$

Для «перигейной» системы координат [1] ось CX

направлена по радиусу-вектору перицентра основной орбиты:

$$\omega_{01}^* = \dot{\Omega}_a \sin i_a \sin\omega_{\pi a} + \frac{di_a}{dt}\cos\omega_{\pi a},$$
$$\omega_{02}^* = \dot{\Omega}_a \sin i_a \cos\omega_{\pi a} - \frac{di_a}{dt}\sin\omega_{\pi a},$$
$$\omega_{03}^* = \omega_{\pi a} + \dot{\Omega}_a \cos i_a .$$

Для полусвязной системы $CX^*Y^*Z^*$ ось CX^* лежит в экваториальной плоскости Земли и совпадает с направлением на восходящий узел основной орбиты:

$$\omega_{01}^* = \frac{di_a}{dt}, \qquad \omega_{02}^* = \dot{\Omega}_a \sin i_a, \qquad \omega_{03}^* = \dot{\Omega}_a \cos i_a .$$

Индексом *a* обозначены переменные, соответствующие движению на основной орбите (основного спутника).

Во всех случаях в силу постановки задачи φ_1, φ_2 — малые величины.

Для получения полных уравнений возмущенного относительного движения субспутника уравнения (18) должны быть дополнены уравнениями относительно изменения фокального параметра и расстояния от притягивающего центра.

Введем новые переменные γ_c, b_{c1}, b_{c2} следующим образом:

$$p_c = p_a(1+\gamma_c), \qquad R_c = R_a(1+b_{c1}),$$
$$\dot{R}_c = \dot{R}_a + b_{c2}\sqrt{\mu/R_a}. \tag{19}$$

Индексом *c* обозначены переменные орбитального движения субспутника.

Следуя методике, нетрудно получить следующие уравнения

$$\dot{\gamma}_c = 2\frac{R_a}{p_a}\left[(1+b_{c1})\widetilde{F}_{2c} - \widetilde{F}_{2a}(1+\gamma_c)\right],$$
$$\dot{b}_{c1} = b_{c2}\sqrt{\frac{\mu}{R_a^3}} - \frac{\dot{R}_a}{R_a} b_{c1},$$
$$\dot{b}_{c2} = \sqrt{\frac{\mu}{R_a^3}}\left[\frac{p_a}{R_a}\left(\frac{1+\gamma_c}{(1+b_{c1})^3} - 1\right) + 1 - \frac{1}{(1+b_{c1})^2}\right] +$$
$$+ \sqrt{R_a/\mu}\,(F_{1c} - F_{1a}) + \frac{1}{2} b_{c2}\frac{\dot{R}_a}{R_a}. \tag{20}$$

Уравнения (18), (20) возмущенного движения субспутника относительно изменяющейся орбиты основного спутника легко линеаризуются вдоль основной орбиты.

При движении по круговой орбите можно использовать следующую замену переменных:

$$p_c = p_a(1+\gamma_c), \qquad R_c = p_a(1+b_{c1}),$$
$$\dot{R}_c = b_{c2}\sqrt{\mu/p_a}. \tag{21}$$

Тогда

$$\dot{\gamma}_c = 2(1+b_{c1})\widetilde{F}_{2c} - 2(1+b_{a1})\widetilde{F}_{2a}(1+\gamma_c),$$
$$\dot{b}_{c1} = b_{c2}\sqrt{\mu/p_a^3} - 2(1+b_{c1})(1+b_{a1})\widetilde{F}_{2a}, \tag{22}$$
$$\dot{b}_{c2} = b_{c2}(1+b_{a1})\widetilde{F}_{2a} + \sqrt{\frac{\mu}{p_a^3}}\frac{\gamma_c - b_{c1}}{(1+b_{c1})^3} + \sqrt{\frac{p_a}{\mu}}\, F b_{c1},$$

где $\gamma_c \ll 1$ и $b_i \ll 1$ в силу постановки задачи. Уравнения (18), (22) с учетом (15) позволяют построить эффективную расчетную схему.

Работа выполнена при поддержке INTAS, грант N 94-0644.

1. Белецкий В. В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. — М.: Наука, 1965.—416 с.
2. Виттенбург Й. Динамика систем твердых тел: Пер. с англ. — М.: Мир, 1980.—292 с.
3. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. — М.: Наука, 1975.—800 с.
4. Лурье А. И. Аналитическая механика. — М.: Физматгиз, 1961.—824 с.
5. Пироженко А. Г. К расчету первого приближения систем с существенно нелинейными колебательными звеньями // ПММ.—1993.—57, вып. 2.—С. 50—55.
6. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике / Под ред. Г. Н. Дубошина. — М.: Наука, 1976.—864 с.
7. Tisserand F. Traite de mecanique celeste. — Paris, 1889.—Vol. 1.—648 p.

ON CONSTRUCTING NEW FORMS OF EQUATIONS OF PERTURBED KEPLERIAN MOTION

A. V. Pirozhenko

A method for constructing equations of perturbed Keplerian motion is presented. Opportunities of the use of the method are shown in the cases of satellite motion in circular orbits and motion of satellites in neighbouring orbits. New forms of equations of perturbed Keplerian motion are presented for these cases.