

УДК 629.78

О влиянии **диссипации** **энергии**
в материале **нити** **на** **эволюцию**
ротационного **движения**
космической **тросовой** **системы**

А. В. Пироженко

Институт технічної механіки НАНУ—НКАУ, Дніпропетровськ

Надійшла до редакції 30.03.98

На системі двох матеріальних точок, з'єднаних невагомою пружнодисипативною ниткою, як найпростішій моделі пружнов'язкої системи, досліджуються закономірності еволюції обертового руху в гравітаційному полі сил. Аналіз закономірностей руху системи на кеплеровій орбіті показав, що дисипація енергії в матеріалі нитки призводить до фізично ясної тенденції в еволюції параметрів відносного руху: система прагне до положення, що мінімізує зменшення енергії відносного руху. Аналіз поступально-обертового руху системи показав, що загальна картина дії дисипативних сил на рух системи складається з їхнього прагнення зменшити втрату енергії (збільшити її приймання) для кожного з рухів — обертового та відносного. Дію дисипативних сил направлено на збільшення ексцентриситету орбіти та перевод обертавання системи в пряме.

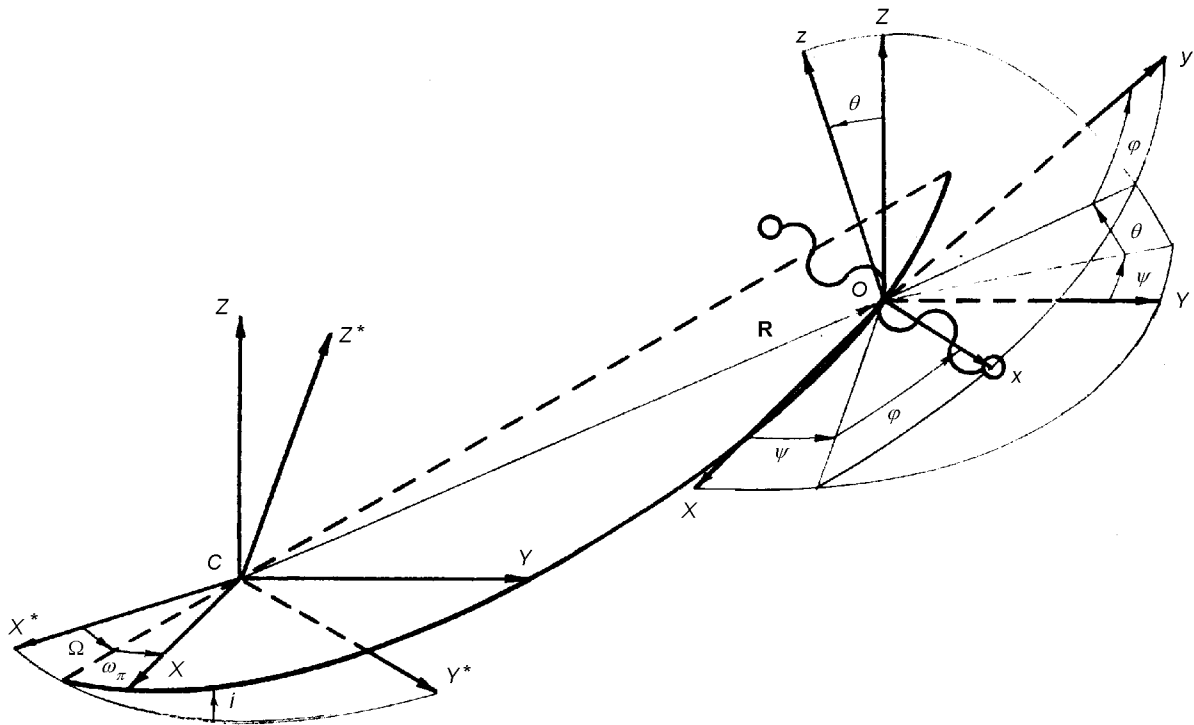
ВВЕДЕНИЕ

В первом приближении по малым параметрам внутреннее рассеивание энергии в упруговязких космических системах приводит лишь к монотонному затуханию собственных упругих колебаний и не изменяет качественно эволюцию движения систем. Поэтому влияние внутренней диссипации энергии на эволюцию ротационного движения (этап медленной эволюции) для большинства реальных космических систем пренебрежимо мало. Тем не менее, вопрос эволюции протяженных упруговязких систем в ньютоновском поле сил представляет интерес для небесной механики и для определения общих закономерностей движений и является постоянным предметом исследований (см. например [9]). Рассматриваемая простейшая модель упруговязкой системы позволила в рамках динамики сосредоточенных систем и под контролем численных расчетов описать основные закономерности эволю-

ции движения. Многие из этих закономерностей были ранее описаны для более сложных систем [5—8]. Вместе с тем, простота модели позволила провести более глубокий анализ относительного движения и рассмотреть в общем случае закономерности поступательно-вращательного движения. Один из основных результатов работы, как представляется, состоит в анализе закономерностей движения системы с точки зрения общих тенденций движения систем под действием диссипативных сил и выработке общих предположений.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается движение в ньютоновском поле сил системы двух материальных точек, соединенных невесомой упругодиссипативной нитью, упругие свойства которой описываются законом Гука, а диссипативные свойства — введением «эквивалент-



ного вязкого трения». Уравнения движения такой системы имеют вид [1, 10]

$$\ddot{\mathbf{r}} = -(c_m(r-d) + \zeta \dot{\mathbf{r}}) \delta \mathbf{e}_r + \mathbf{F},$$

$$c_m = c \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right), \quad (1)$$

$$\ddot{\mathbf{R}} = -\frac{\mu \mathbf{R}}{R^3} + \mathbf{F}^*, \quad \delta = \begin{cases} 0, & r < d, \\ 1, & r \geq d, \end{cases}$$

где $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r$, $r = |\mathbf{r}|$, $\mathbf{r} = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$ — радиус-векторы материальных точек относительно ньютоновского притягивающего центра, m_1, m_2 — массы материальных точек, c — коэффициент жесткости нити, d — ее номинальная длина, ζ — коэффициент, характеризующий вязкое трение в нити, \mathbf{R} — радиус-вектор центра масс системы, μ — гравитационный параметр, \mathbf{F}, \mathbf{F}^* — возмущающие ускорения ньютоновского поля сил. С точностью до $(r/R)^2$ включительно [10]

$$\mathbf{F} = \frac{\mu}{R^2} \frac{r}{R} \left[-\mathbf{e}_r + 3(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_R) \mathbf{e}_R + 3 \frac{m_1 - m_2}{M} \frac{r}{R} \times \right.$$

$$\left. \times \{(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_R) \mathbf{e}_r + 0.5(1 - 5(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_R)^2) \mathbf{e}_R\} \right], \quad (2)$$

$$\mathbf{F}^* = \frac{\mu}{R^2} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \frac{m_1 m_2}{M^2} \left\{ 3(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_R) \mathbf{e}_R + \frac{3}{2} (1 - 5(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_R)^2) \mathbf{e}_R \right\},$$

где $\mathbf{e}_R = \mathbf{R}/R$, $M = m_1 + m_2$.

Введем правые системы координат (рисунок). Невращающаяся система координат $CX^*Y^*Z^*$ имеет начало в ньютоновском притягивающем центре

C . Ось CZ^* направлена по постоянному вектору суммарного кинетического момента системы (он постоянен, так как центральная и внутренние силы не изменяют кинетический момент.) $CXYZ$ — «перигейная» система координат, связанная с мгновенной орбитой движения центра масс. Ось CX направлена из притягивающего центра к перигею орбиты, ось CZ — по вектору кинетического момента орбитального движения. $Oxuz$ — подвижная система координат с началом в центре масс системы. Ось Oz направлена по вектору кинетического момента относительного движения, ось Ox — по \mathbf{r} .

Взаимная ориентация систем $CX^*Y^*Z^*$ и $CXYZ$, $CXYZ$ и $Oxuz$ определяется эйлеровыми углами Ω, i, ω_π и ψ, θ, φ , где Ω, i, ω_π — долгота восходящего узла, наклонение и аргумент перицентра соответственно, и ψ, θ, φ — углы прецессии, нутации и чистого вращения.

Будем рассматривать режим ротационного движения системы и предполагать, что угловая скорость вращения системы относительно центра масс существенно превосходит угловую скорость орбитального движения, а именно, квадрат отношения второй к первой есть малая величина ε_2 . Будем предполагать также, что отношение длины нити к расстоянию от центра масс системы до притягивающего центра есть малая величина ε_1 .

Уравнения возмущенного движения системы в общем случае даны в [10].

В работе [1] показано, что в первом приближе-

нии по малым величинам диссипация энергии в материале нити приводит лишь к монотонному затуханию собственных упругих колебаний и не меняет качественно характера эволюции кинетического момента относительного движения. Процесс затухания собственных колебаний во многих случаях протекает относительно быстро, и поэтому его можно рассматривать как переходный режим к установившемуся движению, в котором амплитуда собственных колебаний нулевая. В установившемся режиме в первом приближении движение системы совпадает с движением гантели с длиной штанги, равной равновесной длине нити r_0 , а величина кинетического момента движения системы относительно центра масс постоянна.

В статье рассматривается влияние диссипации энергии в материале нити на эволюцию параметров движения системы в установившемся режиме с точностью до второго порядка малости по $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. В этом режиме движения $\delta = 1$, т. е. нить всегда натянута.

Алгоритм исследований традиционен для такого вида задач и состоит в следующем: строятся приближенные решения для вынужденных упругих колебаний нити как функции от переменных, описывающих движение системы, а затем с помощью метода усреднения строятся уравнения первого приближения, на основе которых и проводится анализ. Таким образом, здесь не строится второе приближение по малым параметрам для движения всей системы, а лишь во втором приближении исследуется влияние диссипации энергии в материале связи на эволюцию движения системы. Корректность такого алгоритма исследований требует, чтобы второе приближение по малым параметрам движения абсолютно жесткой системы (абсолютно твердое тело — гантель) пренебрежимо мало отличалось от движения, описываемого уравнениями первого приближения. Иными словами, необходимо, чтобы для абсолютно жесткой системы первое приближение описывало все основные закономерности движения. Положительный ответ нам дает теория Колмогорова—Арнольда—Мозера, ее приложение к движению симметричного твердого тела на круговой орбите [3] и многочисленные расчеты.

ПЕРВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЛЯ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Поскольку r_0 определяется равенством центробежных и упругих сил в невозмущенном движении [1], и в рассматриваемом режиме движения отношение амплитуды упругих колебаний к длине нити про-

порционально малой величине, то с точностью до первого порядка малости к введенным величинам уравнения упругих колебаний имеют вид [1]

$$\ddot{z} + k^2 z + \zeta \dot{z} = \frac{\mu}{R^3} r_0 [3(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_R)^2 - 1] + \frac{2L_0 L_1}{r_0^3}, \quad (3)$$

где $z = r - r_0$, $k^2 = c_m + 3L^2/r_0^4$, $L = |\mathbf{L}|$, $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ — удельный кинетический момент относительного движения, через $2L_0 L_1/r_0^3$ обозначена величина изменения центробежных ускорений при вращении системы в гравитационном поле, учитываемая с точностью до первого порядка малости из уравнения изменения L :

$$\dot{L} = 3 \frac{\mu}{R^3} r_0^2 (\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_R)(\mathbf{e}_y, \mathbf{e}_R), \quad (4)$$

где \mathbf{e}_y — орт оси Oy . Здесь L представляем в виде $L = L_0 + L_1 + L_2$, где L_0 — начальное значение, L_1 — величина, пропорциональная первой степени малых величин, L_2 — величина более высокого порядка малости.

Таким образом, в уравнении (3) учитываются колебания длины нити, обусловленные как изменением сил, действующих вдоль линии нити, так и моментами гравитационных сил, изменяющих скорость вращения связки.

Выделим в правых частях уравнений (3), (4) быструю переменную φ . Для этого используем представления

$$(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_R)(\mathbf{e}_y, \mathbf{e}_R) = 0.5(\alpha_2 \cos 2\varphi - \alpha_1 \sin 2\varphi),$$

$$3(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_R)^2 - 1 = 1.5(\alpha_1 \cos 2\varphi + \alpha_2 \sin 2\varphi + \alpha_3 - 2/3),$$

$$\alpha_1 = \cos^2(\nu - \psi) - \cos^2\theta \sin^2(\nu - \psi),$$

$$\alpha_2 = \cos\theta \sin 2(\nu - \psi),$$

$$\alpha_3 = \cos^2\theta \sin^2(\nu - \psi) + \cos^2(\nu - \psi),$$

где ν — истинная аномалия.

Формально определение продольных колебаний связки в первом приближении соответствует следующим механическим соображениям. Поскольку в рассматриваемом движении φ — единственная быстрая переменная, то для построения приближенного решения можно положить ψ, θ, L, ν постоянными за один период изменения φ , а

$$\varphi = \frac{L}{r_0^2}(t - t_0).$$

Действительно, решение уравнения (4) в первом приближении найдем в соответствии с методом усреднения (уравнения первого приближения даны в [1]). Тогда

$$\frac{2L_0 L_1}{r_0^3} = \frac{3}{2} \frac{\mu}{R^3} r_0 (\alpha_1 \cos 2\varphi + \alpha_2 \sin 2\varphi).$$

Первое приближение для вынужденных продоль-

ных колебаний системы, описываемых уравнением (3), строится на основании следующего утверждения.

Утверждение. Пусть упругие колебания системы описываются уравнениями

$$\begin{aligned} \ddot{x} + k^2x + 2\zeta\dot{x} &= \epsilon_1 F(y)\sin(\omega t + t_0), \\ \dot{y} &= \epsilon_2 Y(y, \omega t), \end{aligned} \quad (5)$$

где ϵ_1, ϵ_2 — малые параметры, $\epsilon_1/k^2 \ll 1$, $\epsilon_1/\omega^2 = \epsilon_2/\omega = \epsilon \ll 1$; величина $k^2 - \omega^2$ имеет порядок k^2 или ω^2 , т. е. система далека от резонанса 1:1; F, Y — достаточно гладкие функции своих переменных. Тогда вынужденные упругие колебания системы в первом приближении по малому параметру ϵ совпадают с колебаниями, описываемыми функцией $\epsilon_1 F(y)x_0$, где x_0 — вынужденные колебания линейной системы

$$\ddot{x} + k^2x_0 + 2\zeta\dot{x}_0 = \sin(\omega t + t_0). \quad (6)$$

Доказательство*. Перейдем в (5) к безразмерному «времени» $\tau = \omega t$:

$$\begin{aligned} x'' + \frac{k^2}{\omega^2}x + 2\frac{\zeta}{\omega}x' &= \epsilon F(y)\sin(\tau + t_0), \\ y' &= \epsilon Y(y, \tau), \end{aligned}$$

и произведем замену переменных

$$\begin{aligned} x &= \epsilon F(y)x_0 + s, \\ x' &= \epsilon F(y)x'_0 + s'. \end{aligned}$$

Тогда

$$s'' + \frac{k^2}{\omega^2}s + 2\frac{\zeta}{\omega}s' = -\epsilon^2 \frac{dF}{dy} Y x'_0.$$

Поскольку нас интересуют вынужденные колебания, то с учетом формул для решения линейной системы (6) утверждение доказано.

Также можно утверждать, что истинные вынужденные упругие колебания системы (5) будут отличаться от $\epsilon_1 F(y)x_0$ на условно периодическое слагаемое, амплитуда которого имеет порядок ϵ^2 .

Следовательно, нетрудно получить с точностью до первого порядка малости, что

$$z = 3 \frac{\mu}{R^3} \frac{r_0}{k_2^2} (A \cos 2\varphi + B \sin 2\varphi + D), \quad (7)$$

$$A = \alpha_1 - \zeta_1 \alpha_2, \quad B = \alpha_2 + \zeta_1 \alpha_1, \quad D = \frac{1}{2} \frac{k_2^2}{k^2} \left(\alpha_3 - \frac{2}{3} \right),$$

где $k_2^2 = k_1^2(1 + \zeta_1^2)$, $k_1^2 = \frac{c_m}{d} - \frac{L^2}{r_0^4}$, $\zeta_1 = 2 \frac{\zeta L}{r_0^2 k_1^2}$ и

предполагается, что k_1^2, k_2^2 имеют порядок k^2 или L^2/r_0^4 , т. е. система не находится в резонансе 1:2.

АНАЛИЗ ДВИЖЕНИЯ

В ОГРАНИЧЕННОЙ ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ

Предположим, что величина $(r/R)^2$ пренебрежимо мала ($\epsilon_1 \ll \epsilon_2$). Тогда траектория центра масс является невозмущенной кеплеровой орбитой, а возмущенное относительное движение связки описывается уравнениями [1]

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \frac{rF_3 \sin \varphi}{L \sin \theta}, & \dot{\theta} &= \frac{rF_3 \cos \varphi}{L}, & \dot{L} &= rF_2, \\ \dot{\varphi} &= \frac{L}{r^2} - \dot{\psi} \cos \theta, & \dot{v} &= \sqrt{\mu/p^3} (1 + e \cos v)^2, \end{aligned} \quad (8)$$

где F_2, F_3 — проекции F на оси Oz и Oy соответственно, p, e — фокальный параметр и эксцентриситет орбиты соответственно.

Подставляя в (8) найденное выражение $r = r_0 + z$ и усредняя уравнения по угловой переменной φ , получим уравнения первого приближения, описывающие влияние упругодиссипативных свойств нити с точностью до ϵ_2^2 включительно:

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= -N_1 \cos \theta \sin^2(v - \psi) - N_d \times \\ &\times [\cos \theta \sin^2(v - \psi)(\alpha_3 + 2D) + 0.5 \zeta_1 \sin 2(v - \psi) \alpha_3], \\ \dot{\theta} &= -0.5 N_1 \sin \theta \sin 2(v - \psi) - N_d \sin \theta \times \\ &\times [\sin 2(v - \psi)(0.5 \alpha_3 + D) - \zeta_1 \alpha_3 \cos \theta \sin^2(v - \psi)], \end{aligned} \quad (9)$$

$$\dot{L} = -N_d L \zeta_1 (\alpha_2^2 + \alpha_1^2), \quad \dot{v} = \sqrt{\mu/p^3} (1 + e \cos v)^2,$$

$$N_1 = \frac{3}{2} \frac{\mu}{R^3} \frac{r_0^2}{L}, \quad N_d = \frac{9}{2} \left(\frac{\mu}{R^3} \right)^2 \frac{r_0^2}{L k_2^2}.$$

Из уравнений (9) следует, что удельная скорость уменьшения L пропорциональна $\zeta \epsilon_2^2$ и ничтожно мала для большинства представляющих практический интерес случаев реализации вращающейся на орбите КТС двух тел. Нас же будет интересовать качественная сторона вопроса.

Рассмотрим воздействия на движение системы диссипативных сил. Для этого выпишем уравнения изменения кинетического момента с сохранением лишь членов уравнений (9), отражающих влияние диссипации энергии в материале нити на его эволюцию:

* В доказательстве используется замена переменных, предложенная рецензентом статьи Н. П. Плахтиенко, сокращающая необходимые выкладки в сравнении с авторским вариантом

$$\begin{aligned}\dot{\psi} &= -0.5N_d \xi_1 \sin 2(\nu - \psi) \alpha_3, \\ \dot{\theta} &= 0.5N_d \xi_1 \sin 2\theta \sin^2(\nu - \psi) \alpha_3, \\ \dot{L} &= -N_d L \xi_1 (\alpha_2^2 + \alpha_1^2),\end{aligned}\quad (10)$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned}\alpha_2^2 + \alpha_1^2 &= \alpha_3^2, \\ \frac{\partial \alpha_3^2}{\partial \theta} &= -\sin 2\theta \sin^2(\nu - \psi) \alpha_3, \\ \frac{\partial \alpha_3^2}{\partial \psi} &= 2\sin^2 \theta \sin 2(\nu - \psi) \alpha_3,\end{aligned}$$

делаем вывод, что воздействие диссипативных сил в каждый момент времени стремится расположить кинетический момент в положение, минимизирующее скорость его убывания. Причем направление воздействия диссипативных сил близко к направлению «наискорейшего спуска» для величины α_3^2 .

Поскольку

$$\begin{aligned}\gamma^2 &= (\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_R)^2 = \sin^2 \theta \sin^2(\nu - \psi), \\ \frac{\partial \gamma^2}{\partial \theta} &= \sin 2\theta \sin^2(\nu - \psi), \\ \frac{\partial \gamma^2}{\partial \psi} &= -\sin^2 \theta \sin 2(\nu - \psi),\end{aligned}$$

то в силу (10) воздействие диссипативных сил в каждый момент времени стремится совместить кинетический момент с вектором \mathbf{R} , т. е. перевести вращение системы в плоскость, перпендикулярную вектору \mathbf{R} . Эта ориентация вращения системы соответствует минимуму рассеивания энергии ее вращения.

Сравнение полученных результатов с выводами о воздействии на движение системы диссипативного аэродинамического момента [1] позволяет выдвинуть предположение, что воздействия диссипативных сил различной физической природы направлены на перевод движения системы в положение, соответствующее наименьшей потере энергии.

Эти предположение перекликается с известным принципом [2] о стремлении материальных систем избежать трения. Однако в [2] этот принцип рассмотрен как результирующая тенденция в движении систем: скорости движений, обуславливающих диссипацию энергии, под действием диссипативных сил обнуляются. Для рассматриваемой системы «избежать трения» можно лишь достигнув положения относительного равновесия, соответствующего расположению системы вдоль местной вертикали. Воздействие же диссипативных сил в рассматриваемом случае в каждый момент времени направлено на изменение параметров движения в соответствии с этим принципом, т. е., как ни парадоксально это звучит, на уменьшение рассеивания энергии.

Рассмотрим удельную мощность диссипативных

сил

$$N = -\xi_2^2.$$

Используя выражение (7), с точностью до ε_2^2 найдем среднюю за период обращения связки вокруг центра масс удельную мощность диссипативных сил:

$$\langle N \rangle_\varphi = -9 \left(\frac{\mu}{R^3} \right)^2 L \xi_1 \frac{\alpha_3^2}{k_2^2}. \quad (11)$$

Поскольку средняя удельная мощность диссипативных сил, как и скорость убывания кинетического момента, пропорциональна α_3^2 , то в силу предыдущего анализа можно сделать вывод, что воздействие диссипативных сил стремится уменьшить абсолютную работу этих сил и в конечном счете перевести систему в положение, соответствующее возможному минимуму абсолютной величины их работы.

Уравнения основных эволюционных эффектов движения системы получим, переходя в уравнениях (9) к дифференцированию по ν с последующим их усреднением по ν :

$$\begin{aligned}\frac{d\psi}{d\nu} &= N_0 \cos \theta - I_d \left[\cos \theta \left\{ \left(1 + \frac{k_2^2}{k^2} \right) \beta_1 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 4 \frac{k_2^2}{k^2} \left(\frac{2}{3} + 2e^2 - e^2 \cos 2\psi \right) \right\} - \right. \\ &\quad \left. - 3\xi_1 e^2 \sin 2\psi (1 + \cos^2 \theta) \right], \\ \frac{d\theta}{d\nu} &= I_d \sin \theta [3e^2 \sin 2\psi \beta_2 + \xi_1 \cos \theta \beta_2],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dL}{d\nu} &= -I_d L \xi_1 [(1 + 3e^2)(3\cos^4 \theta + 3 + 2\cos^2 \theta) + \\ &\quad + 6e^2 \cos 2\psi (1 - \cos^4 \theta)],\end{aligned}\quad (12)$$

$$\beta_1 = (1 + 3e^2)(3\cos^2 \theta + 1) - 6e^2 \cos^2 \theta \cos 2\psi,$$

$$\beta_2 = \left(1 + \frac{k_2^2}{k^2} \right) (1 + \cos^2 \theta) - \frac{4}{3} \frac{k_2^2}{k^2},$$

$$I_d = \frac{9}{16} \left(\frac{\mu}{p^3} \right)^{3/2} \frac{r_0^2}{L} \frac{1}{k_2^2},$$

$$N_0 = \frac{3}{4} \left(\frac{\mu}{p^3} \right)^{1/2} \frac{r_0^2}{L}.$$

Здесь опущены члены, пропорциональные e^4 , поскольку они не вносят каких-либо качественных отличий в решение уравнений.

Из уравнений (12) видно, что под действием диссипации энергии в материале нити кинетический момент системы стремится расположиться в плоскости орбиты ($\theta \rightarrow \pi/2$). Интересно отметить и тот факт, что при θ , близком к $\pi/2$, действие

диссипативных сил отслеживает эллиптичность орбиты и стремится расположить плоскость вращения связки перпендикулярно к радиусу-вектору перицентра орбиты ($\psi \rightarrow \pm \pi/2$). Этот эффект также соответствует тенденции системы уменьшить скорость убывания кинетического момента относительного движения.

Оценим среднюю удельную мощность диссипативных сил за один период орбитального движения. Для этого используем схему

$$\langle\langle N \rangle\rangle_\varphi = \frac{1}{T_\nu} \int_0^{T_\nu} \langle N \rangle_\varphi dt \approx \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle N \rangle_\varphi \frac{R^2}{\sqrt{\mu p}} d\nu,$$

где T_ν — период орбитального движения. Тогда

$$\begin{aligned} \langle\langle N \rangle\rangle_\varphi = & -\frac{9}{8} \left(\frac{\mu}{p^3}\right)^3 \zeta_1 \frac{L}{k_2^2} [(3\cos\theta + 3 + 2\cos^2\theta) \times \\ & \times (1 + 3e^2 + 3/8e^4) + \cos 2\psi(1 - \cos^4\theta)(6e^2 + e^4) + \\ & + 1/16e^4 \cos 4\psi(\cos^4\theta + \sin^2\theta)]. \end{aligned} \quad (13)$$

Полученная формула (здесь сохранены члены, пропорциональные e^4), как и (11), аналогична формуле скорости убывания кинетического момента. Другими словами, стремление системы уменьшить отдачу энергии совпадает со стремлением уменьшить абсолютную величину работы диссипативных сил в рассматриваемом случае.

Основываясь на полученных результатах, а также результатах [4, 6, 7], можно выдвинуть предположение [11], что стремление систем избежать трения есть действующая в каждый момент времени (текущая) тенденция, и воздействие диссипативных сил направлено на изменение параметров движения в соответствии с этой тенденцией.

Отметим, что эволюция орбиты, обусловленная, например, нецентральностью поля тяготения, во многих случаях качественно изменяет картину эволюции относительного движения. Действительно, уравнения векового движения относительно эволюционирующей орбиты имеют вид [1, 3]

$$\begin{aligned} \frac{d\tau_1}{d\nu} = & N_0 \cos\theta - I_d \cos\theta \times \\ & \times \left[\left(1 + \frac{k_2^2}{k^2}\right) (3\cos^2\theta + 1) - \frac{8}{3} \frac{k_2^2}{k^2} \right] - \\ & - \varepsilon_{or} \cos i [\text{ctg}\theta \sin i \cos \tau_1 + \cos i], \quad (14) \\ \frac{d\theta}{d\nu} = & \frac{1}{2} I_d \zeta_1 \sin 2\theta (\cos^2\theta + 1) + \varepsilon_{or} \cos i \sin i \sin \tau_1, \\ \frac{dL}{d\nu} = & -I_d L \zeta_1 (3\cos^4\theta + 3 + 2\cos^2\theta). \end{aligned}$$

Здесь опущены члены, пропорциональные e^2 , e^4 , и

принято, что в вековом движении изменяется лишь долгота восходящего узла орбиты $\dot{\Omega} = -\varepsilon_{or} \cos i$ и аргумент перицентра ω_π , $\tau_1 = \omega_\pi + \psi$, ε_{or} — малый параметр.

Поскольку ε_{or} обычно значительно превосходит I_d , то из уравнений (14) следует, что проявление диссипативных эффектов в движении системы возможно лишь для орбит, близких к экваториальным или полярным. Для других орбит плоскость орбиты эволюционирует быстрее, чем кинетический момент относительного движения стремится к ней.

ПОСТУПАТЕЛЬНО-ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Постоянство кинетического момента системы дает три первых интеграла движения [10]:

$$\omega_\pi = \pi - \psi,$$

$$\sqrt{\mu p} \cos i + \frac{m_1 m_2}{M^2} L \cos(\theta - i) = G_1, \quad (15)$$

$$\frac{m_1 m_2}{M^2} \frac{L}{\sin i} = \frac{\sqrt{\mu p}}{\sin(\theta - i)} = \frac{G_1}{\sin\theta}, \quad G_1 = \frac{G}{M},$$

где G — кинетический момент системы.

Вынужденные продольные колебания в первом приближении по малым параметрам ε_1 , ε_2 определяются формулой (7). Тогда с учетом (15) уравнения возмущенного движения системы суть уравнения возмущенного кеплерова движения и уравнение изменения угла φ [10]:

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{r^2} - \dot{\Omega} \cos(\theta - i).$$

Процедура построения уравнений первого приближения аналогична процедуре построения уравнений (12). Гравитационные воздействия учитываются с точностью до второго порядка малости по $(r/R)^2$ включительно. Тогда уравнения, описывающие основные эволюционные эффекты поступательно-вращательного движения системы, имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{di}{du} = & I_{d1} \sin\theta \{ 3e^2 \cos\theta \sin 2\omega_\pi \beta_2 + \\ & + \zeta_1 [(1 + 3e^2)(3 + \cos^2\theta) + 6e^2 \cos 2\omega_\pi] \}, \\ \frac{d\Omega}{du} = & N_0 \frac{\sin\theta \cos\theta}{\sin(\theta - i)} - I_d \frac{\sin\theta}{\sin(\theta - i)} \left[\cos\theta \left(1 + \frac{k_2^2}{k^2}\right) \beta_1 - \right. \\ & - \frac{4}{3} \cos\theta \frac{k_2^2}{k^2} (2 + 6e^2 - 3e^2 \cos\theta \cos 2\omega_\pi) + \\ & \left. + \zeta_1 e^2 (1 + \cos^2\theta) \sin 2\omega_\pi \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dp}{du} = & -2I_{d1}p\{3e^2\sin^2\theta\sin 2\omega_{\pi}\beta_2 - \\ & -4\zeta_1\cos\theta[(1+3e^2)(1+\cos^2\theta)+1.5+e^2\sin\theta\cos 2\omega_{\pi}]\}, \\ \frac{de}{du} = & eI_{d1}[\sin^2\theta\sin 2\omega_{\pi}\beta_2 + \\ & + 2\zeta_1(11+11\cos^2\theta+7\sin^2\theta\cos 2\omega_{\pi})], \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_{\pi}}{du} = & -\frac{d\Omega}{du}\cos i - \frac{3}{8}\frac{m_1m_2}{M^2}\frac{r_0^2}{p^2}(1-3\cos^2\theta) - \\ & - I_{d1}[\dots + 6\zeta_1\cos\theta\sin^2\theta\sin 2\omega_{\pi}(3+e^2)], \end{aligned}$$

$$I_{d1} = \frac{9}{16}\frac{m_1m_2}{M^2}\left(\frac{r_0}{p}\right)^2\frac{\mu}{p^3}\frac{1}{k_2^2}, \quad u = v + \omega_{\pi},$$

β_1, β_2, I_d — те же, что и в уравнениях (12).

Здесь опущены члены, пропорциональные e^4 , поскольку они не вносят никаких качественных отличий в движение системы. В уравнении изменения ω_{π} также опущено громоздкое выражение, не несущее в себе интересной информации.

Уравнения (16) совместно с соотношениями (15) полностью описывают эволюцию медленных переменных системы, однако неудобны для анализа, поскольку правые части зависят от параметров относительного движения L и θ , выражение которых через параметры орбитального движения излишне громоздко. Остается открытым и вопрос о преимуществах уравнений (16) по отношению к уравнениям (12).

Построим уравнения для L и θ . Дифференцируя по u в силу (16) соотношения треугольника, образованного кинетическими моментами:

$$\begin{aligned} \sqrt{\mu p}\cos i + \frac{m_1m_2}{M^2}L\cos(\theta - i) &= G_1, \\ \sqrt{\mu p}\cos i + \frac{m_1m_2}{M^2}L\sin(\theta - i) &= 0, \end{aligned}$$

получим уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d(\theta - i)}{du} &= I_d\sin\theta[-3e^2\sin 2\omega_{\pi}\beta_2 + \zeta_1\cos\theta\beta_1], \\ \frac{dL}{du} &= -I_dL\zeta_1[(1+3e^2)(3\cos^4\theta + 3 + 2\cos^2\theta) + \\ & + 6e^2\cos 2\omega_{\pi}(1 - \cos^4\theta)]. \end{aligned} \quad (17)$$

Уравнение изменения L совпадает с аналогичным уравнением в (12), а уравнение изменения $\theta - i$ совпадает с уравнением изменения θ в (12).

Из уравнений (16), (17) следует, что действие диссипативных сил (члены уравнений, содержащие множитель ζ_1) направлено на следующие изменения в движении системы. Кинетический момент относительного движения системы уменьшается,

перераспределяясь в кинетический момент орбитального движения; увеличивается эксцентриситет орбиты ($e \neq 0$); уменьшается до нуля наклонение орбиты. Здесь учтено, что

$$I_{d1}\zeta_1\sin\theta = \frac{9}{8}\frac{\mu}{p^3}\frac{G_1}{p^2}\frac{\zeta}{k_1^2k_2^2}\sin i_0. \quad (18)$$

Угол нутации θ стремится к некоторой величине $\pi/2 - \alpha_c$, $0 < \alpha_c < \pi/2$ и поскольку di/du стремится к нулю, в конечном счете стремится к $\pi/2$, т. е. воздействие диссипативных сил стремится перевести обратное вращение системы в прямое.

Рассмотрим закономерности эволюции системы, определяемые уравнениями первого приближения.

При $e = 0$ уравнения (16), (17) значительно упрощаются, и эволюция параметров полностью определяется воздействием диссипативных сил. Величина α_c определяется из уравнения

$$\sin\alpha_c(3\sin^2\alpha_c + 1) = \frac{\sin i}{\cos(\alpha_c + i)}(3 + \sin^2\alpha_c).$$

Здесь учтено (18) и соотношение

$$I_d\zeta_1\sin\theta = \frac{9}{8}\frac{\mu}{p^3}\frac{G_1}{p^2}\frac{\zeta}{k_1^2k_2^2}\sin(\theta - i).$$

В общем случае ($e \neq 0$), поскольку величины N_0, I_d, I_{d1} , характеризующие скорости эволюции параметров движения системы, имеют порядок $\sqrt{\varepsilon_2}, \varepsilon_2^{3/2}, \varepsilon_1^2\varepsilon_2$ соответственно, в зависимости от отношения малых величин ε_1 и ε_2 возможен различный характер движения системы.

Рассмотрим крайние случаи.

Предположим, что $(r/p)^2 \ll I_d$, т. е. $\varepsilon_1^2 \ll \varepsilon_2^{3/2}$, или, что то же самое $L/\sqrt{\mu p} \ll 1$ (случай дальних орбит). Тогда $i \ll 1$; θ стремится к $\pi/2$, и при θ , близком к $\pi/2$, перицентр орбиты стремится лечь в плоскость, образованную кинетическими моментами системы, т.е. движение системы соответствует рассмотренному выше случаю движения относительно невозмущенной траектории центра масс.

В другом крайнем случае, когда $\varepsilon_1 \gg \varepsilon_2^{1/2}$ (или $L/\sqrt{\mu p} \gg 1$), скорость и направление изменения аргумента перицентра орбиты носят иной характер и определяются вторым членом в уравнении для ω_{π} . Как показывает численное интегрирование уравнений (16), (17) и усредненных исходных уравнений, в случае, когда кинетический момент относительного движения превосходит по модулю кинетический момент орбитального движения, возможен «выброс» системы на гиперболическую траекторию ($e \rightarrow 1$). Для обратного вращения ($i > \pi/2$) такая возможность «выброса» реализуется для зна-

чительно более широкой области начальных параметров, чем для прямого вращения системы.

В общем случае, в отличие от движения на невозмущенной орбите, эффект остановки прецессионного движения и отслеживания эллиптичности орбиты, вообще говоря, пропадает (перицентр орбиты уходит значительно быстрее, чем кинетический момент стремится к нему). В зависимости от отношения величин кинетических моментов и отношения r_0/p характер движения системы может иметь значительные отличия от движения системы относительно невозмущенной орбиты. Исследование возможных движений системы выходит за рамки данных исследований.

В большинстве же случаев основной эффект эволюционного движения системы, как и для движения быстро вращающейся гантели [10], заключается во вращении плоскости, образованной кинетическими моментами орбитального и относительного движений вокруг суммарного кинетического момента. Причем, при θ , не близком к $\pi/2$ ($|\cos\theta| > \varepsilon_1^2$, $|\cos\theta| > \varepsilon_2^{3/2}$), ω_π является быстрой переменной в уравнениях (16), (17). Поэтому исследование эволюции параметров движения в этом случае может быть выполнено путем усреднения этих уравнений по ω_π . Нетрудно видеть, что уравнения, получающиеся в результате этой операции, отличаются от исходных лишь тем, что все члены уравнений, зависящие от ω_π , обнуляются.

Анализ усредненных по ω_π уравнений (16), (17), так же, как и их исследование численным интегрированием при θ , близком к $\pi/2$, показывает, что эволюция движения системы определяется воздействием диссипативных сил, т. е. изменение параметров движения системы происходит в соответствии с направлением воздействия диссипативных сил, и ранее определенные эффекты их воздействия реализуются в движении системы.

Рассмотрим возможность интерпретации движения системы под действием диссипативных сил. Нетрудно видеть, что выражение средней мощности диссипативных сил (13) не изменится. Но тогда воздействия диссипативных сил, направленные на увеличение эксцентриситета и перевод системы к прямому вращению, вообще говоря, направлены на увеличение мощности диссипативных сил, т. е. изменение параметров орбитального движения под воздействием диссипативных сил не может быть объяснено в рамках выдвинутого предположения о стремлении систем избежать трения, как текущей тенденции. Стремление диссипативных сил увеличить эксцентриситет орбиты и перевести вращение системы в прямое противоположно стремлению

уменьшить отдачу энергию относительного движения, которое имело место в случае неизменной орбиты.

Вместе с тем эти воздействия диссипативных сил соответствуют их стремлению уменьшить потери энергии или увеличить ее прием для орбитального движения. Действительно, этой тенденции соответствуют увеличение эксцентриситета. Анализируя изменения в движении системы в сравнении с движением системы относительно невозмущенной орбиты, можно сделать вывод, что этой тенденции соответствуют и привнесенные отличия в изменении угла θ . Действительно, увеличение скорости его убывания при $\theta > \pi/2$, замедление его увеличения при $\theta < \pi/2$ и стремление к прямому вращению можно интерпретировать как стремление уменьшить (увеличить) скорость уменьшения (увеличения) кинетического момента орбитального движения.

Таким образом, общая картина воздействия диссипативных сил на движение системы складывается из их стремления уменьшить отдачу энергии (увеличить ее прием) для каждого из движений — орбитального и относительного.

В рассматриваемом случае, поскольку эволюция движения системы определяется воздействием диссипативных сил, общая картина эволюции движения складывается из стремления каждого из движений «избежать трения», т. е. из стремления каждого из движений — орбитального и относительного — уменьшить отдачу энергии (увеличить ее прием) для своего движения.

Конечно, рассмотренное движение системы есть лишь частный пример. Здесь имеет место два слабо связанных движения (орбитальное и относительное), диссипация энергии описывается внутренней силой и происходит в результате относительного движения. Но отчетливо проявляющаяся тенденция в направлении воздействия диссипативных сил на уменьшение потери энергии (ее увеличение) для каждого из движений представляется весьма интересной, поскольку возникающие противоречия между формами движений оставляют шанс развитию движений, а не только для их тривиальных форм.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Использование модельных задач для исследования сложных динамических систем, когда в математической модели выделяются и сохраняются лишь существенные для исследуемого явления элементы, является удобным, а во многих случаях и единст-

венно возможным способом выработки представлений, определения и анализа закономерностей в их причинно-следственной взаимосвязи. В рассмотренной модельной задаче сохранены такие важные элементы динамики реальных космических тросовых систем, как возможность упругодиссипативных колебаний по внутренним степеням свободы и большая протяженность системы. Это позволило провести исследования в рамках классической механики сосредоточенных масс, и в частности, осуществить достаточно просто численную проверку полученных результатов.

Сделанные предположения о закономерностях ротационного движения систем под действием диссипативных сил на кеплеровой орбите относятся лишь к определенному классу систем в гравитационном поле сил, а выводы о воздействии диссипативных сил на поступательно-вращательное движение относятся лишь к рассматриваемой модельной задаче. Вместе с тем во многих случаях движения систем под действием диссипативных сил (см. например, [4]) можно наблюдать аналогичные закономерности, что говорит о возможной общности сделанных предположений.

Работа выполнена при поддержке INTAS, грант N 94-0644.

1. Алпатов А. П., Белоножко П. А., Пироженко А. В., Шабохин В. А. Об эволюции ротационного движения связки двух тел на орбите // Космич. исследования.—1990.—28, Вып. 5.—С. 692—701.
2. Аппель П. Теоретическая механика. — М.: Физматгиз, 1960.—Т. 2.—487 с.
3. Белецкий В. В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1975.—308 с.
4. Белецкий В. В., Грушевский А. В. Эволюция вращатель-

ных движений спутника под действием диссипативного аэродинамического момента // ПММ.—1994.—58, № 1.—С. 13—20.

5. Вильке В. Г., Марков Ю. Г. Эволюция поступательно-вращательного движения вязкоупругой планеты в центральном поле сил // Астрон. журн.—1988.—65, № 4.—С. 861—867.
6. Маркеев А. П. К динамике упругого тела в гравитационном поле // Космич. исследования.—1989.—27, Вып. 2.—С. 163—175.
7. Маркеев А. П. Эволюция быстрых вращений вязкоупругой цилиндрической оболочки в гравитационном поле // Изв. АН СССР. МТТ.—1990.—№ 5.—С. 139—146.
8. Сеницын Е. В. Эволюция кеплеровского движения вязкоупругой планеты // Астрон. журн.—1990.—67, № 3.—С. 630—635.
9. Сеницын Е. Н. О влиянии вязкоупругих свойств материала тела на его быстрые вращения в гравитационном поле // Изв. АН России. МТТ.—1993.—№ 1.—С. 31—38.
10. Пироженко А. В. Управление движением связки двух тел в гравитационном поле изменением длины связи // Космич. исследования.—1992.—30, Вып. 4.—С. 473—482.
11. Dranovskii V., Alpatov A., Khoroshilov V., Piroshenko A., Zakrzhevskii A. Research of dynamics of space cable systems stabilized by rotation // 48th Internat. Astronaut. Congress, Turin, Italy, 6—10 October, 1997.

EFFECT OF ENERGY DISSIPATION IN THRIED MATERIAL ON THE EVOLUTION OF ROTATIONAL MOTION IN SPACE CABLE SYSTEMS

A. V. Pirozhenko

Using a system of two mass points joined together by a weightless elastic dissipative thread as the simplest model of elastoviscous system, we investigated the evolution of rotational motion in the gravitational field. When such a system moves in a Keplerian orbit, energy dissipation in the thread material causes the system to tend to the position with the energy of relative motion. Under the effect of dissipative forces the energy loss decreases for both the orbital motion and the relative motion, the orbital eccentricity increases, and the system rotates in the direct sense.