Космічна наука і технологія. 1998. Т. 4, № 4. С. 151–155.

УДК 518.5+518.62

Представлення функцій у системах керування

Б. О. Попов

Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів

Надійшла до редакції 16.03.98

Запропоновано підхід до обчислення математичних функцій у системах керування космічними апаратами, що дозволяє значно прискорити обчислення. Підхід базується на рівномірному наближенні функцій раціональними чебишовськими сплайнами. Для основних елементарних функцій одержані вирази для величин похибок та границь ланок.

ВСТУП

При розв'язанні багатьох технічних задач значна частина часу витрачається на обчислення математичних функцій. Так, швидкодія систем керування космічними апаратами суттєво залежить від того, наскільки ефективно проводиться обчислення елементарних функцій. Тому методи обчислення елементарних функцій досі привертають значну увагу дослідників [6, 8].

Один з методів прискорення обчислень — поділ усього проміжку наближень $[a,\ b]$ на r частин і використання на кожній з цих частин свого наближеного виразу

$$F(A_i,\,x)=F(a_0^{(i)},\,a_1^{(i)},\dots,\,a_m^{(i)};\,x),\quad i=1,\dots,r.$$

Позначимо через $Z=\{z_i\}_{i=0}^{r}$ $(a=z_0<z_1<K<$ $<z_r=b)$ вузли сплайна $S_m(x)$:

$$S_m(x)=\sum_{i=1}^{r}F(A_i,x)\,\Theta\big((x-z_{i-1})(z_i-x)\big),\qquad (1)$$

де

$$\Theta(u)=\begin{cases}1 & \text{зна}\ \ u\ge 0,\\ 0 & \text{зна}\ \ u<0.\end{cases}$$

Якщо максимальні похибки на підінтервалах $[z_{i-1},\,z_i]$

$$\mu_i=\max_{x\in[z_{i-1},z_i]}\Big|\big(f(x)-F(A_i,x)\big)\Big|\Big/w(x),$$

де $w(x)>0$ — вага наближення, рівні між собою ($\mu_i=\mu$) то маємо рівномірне наближення сплайнами.

Рівномірне наближення сплайнами є оптимальним у тому сенсі, що при заданій кількості ланок одержуємо найменшу похибку. Знаходження точного значення рівномірного наближення сплайнами — складна обчислювальна проблема. Тому використовуються алгоритми визначення параметрів наближень, що є близькі до рівномірних [3].

За основу знаходження параметрів рівномірних наближень можна прийняти вираз для похибки рівномірного наближення сплайнами із r ланками, який для чебишовських сплайнів (сплайнів із ланками — найкращими чебишовськими наближеннями) при $r\to\infty$ має вигляд [2]

$$\mu=\frac{r^{-m-1}}{2^{2m+1}(m+1)!}\left(\int_a^b\left|\eta(f,F)/w(x)\right|^{\frac{1}{m+1}}dx\right)^{m+1}\times$$

$$\times\left[1+O\left(\frac{b-a}{r}\right)\right],\qquad (2)$$

де $\eta(f,F)\equiv\eta(f(x),F)$ — ядро наближення, що залежить від наближуваної функції $f(x)$ та наближаючого виразу $F(A,\,x)$.

Найскладніша задача при визначенні параметрів рівномірного наближення сплайном (1) — визначення границь ланок. Тому переходимо до асимптотично рівномірного наближення, для якого при $r \to \infty$ справедливо $\mu_i = \mu\left[1 + O\left(\frac{b-a}{r}\right)\right]$ для усіх $i = 1, \dots, r$. Границі ланок такого наближення задовольняють рівняння

$$i\int_a^b \left|\eta(f, F)/w(x)\right|^{\frac{1}{m+1}} dx = r\int_a^{z_i} \left|\eta(f, F)/w(x)\right|^{\frac{1}{m+1}} dx,$$

$$i = 0, \dots, r. \tag{3}$$

Числові методи для визначення вузлів сплайну (1) з рівнянь (3) розглянуті у роботі [2]. Ясно, що усі вузли можна знаходити водночас при використанні розпаралелювання.

Якщо ланки сплайнів — раціональні многочлени

$$R_{k,l}(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i x^i \Bigg/ \left(1 + \sum_{i=1}^{l} b_i x^i\right), \quad k + l = m, \tag{4}$$

то ядро наближення виражається формулою [2]

$$\eta_{k,l}(f) = \eta(f, R_{k,l}) = (m+1)!\,\Delta_{k+1,l+1}(f)/\Delta_{k,l}(f), \tag{5}$$

де

$$\Delta_{k,l}(f) = \begin{cases} 1 \quad \text{при} \quad l = 0, \\ \begin{vmatrix} c_{k+1-l} & c_{k+2-l} & \dots & c_k \\ c_{k+2-l} & c_{k+3-l} & \dots & c_{k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_k & c_{k+1} & \dots & c_{k+l+1} \end{vmatrix} \quad \text{при} \quad l > 0, \end{cases}$$

$$c_v = c_v(x) = \begin{cases} 0 \ \text{при} \ v < 0, \\ f^{(v)}(x)/v! \ \text{при} \ v = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Для багатьох математичних функцій знаходження похибок та границь ланок можна спростити.

НАБЛИЖЕННЯ ПОКАЗНИКОВИХ ФУНКЦІЙ

Позначимо через $E_{k,l}(f, w; a, b)$ похибку рівномірного наближення функції за допомогою чебишовського раціонального сплайна із ланками виду (4) на проміжку $[a, b]$. Вага наближення — $w(x)$, кількість ланок — r.

Теорема 1. Ядро наближення функції $f(x) = c^{\alpha x}$ $(c > 1,\ \alpha \neq 0)$ за допомогою раціонального многочлена (4) має вигляд

$$\eta_{k,l}(c^{\alpha x}) = \frac{(\alpha \ln x)^{m+1} k!\,l!}{m!} c^{\alpha x}. \tag{6}$$

Доведення одержуємо при підстановці функції $f(x) = c^{\alpha x}$ у вираз (5).

Наслідок 1. Максимальна похибка асимптотично рівномірного наближення чебишовським сплайном із r ланками функції $f(x) = c^{\alpha x}$ при $w(x) = 1$ виражається формулою

$$\varepsilon_{k,l}(c^{\alpha x}) = E_{k,l}(c^{\alpha x}, 1; a, b) =$$

$$= \frac{(m+1)^{m+1} k!\,l!}{2^{2m+1} m!(m+1)!\, r^{m+1}} \left| c^{\frac{\alpha b}{m+1}} - c^{\frac{\alpha a}{m+1}} \right|^{m+1}. \tag{7}$$

Менш точні вирази для похибки (7) зустрічались у роботах [4, 7]. Ці вирази можна одержати із формули (7) при $r = 1$, $a = -1$, $b = 1$, $m \to \infty$.

Наслідок 2. Розміщення вузлів асимптотично рівномірного наближення функції $f(x) = c^{\alpha x}$ чебишовським сплайном із r ланками при $w(x) = 1$ визначаються за формулами

$$z_i = \frac{m+1}{\alpha \ln c} \ln\left| \frac{r-i}{i} c^{\frac{\alpha a}{m+1}} + \frac{i}{r} c^{\frac{\alpha b}{m+1}} \right|, \quad i = 0, \dots, r. \tag{8}$$

Наслідок 3. Максимальна похибка асимптотично рівномірного відносного наближення чебишовським сплайном із r ланками функції $f(x) = c^{\alpha x}$ виражається формулою

$$\delta_{k,l}(c^{\alpha x}) = E_{k,l}(c^{\alpha x}, f(x); a, b) =$$

$$= \frac{k!\,l!(\alpha \ln c)^{m+1}(b-a)^{m+1}}{2^{2m+1} m!(m+1)!\, r^{m+1}}. \tag{9}$$

Частковий випадок формули (9) при $k = l$, $a = -1$, $b = 1$, $r = 1$ одержано в роботі [1].

Наслідок 4. Розміщення вузлів асимптотично рівномірного наближення функції $f(x) = c^{\alpha x}$ чебишовським сплайном із r ланками при $w(x) = f(x)$ визначається за формулами

$$z_i = a + i(b-a)/r, \quad i = 0, \dots, r. \tag{10}$$

Похибка асимптотично рівномірних наближень функції $f(x) = c^{\alpha x}$ при $x \in [0, 1]$ практично не відрізняється від похибки рівномірних наближень. При $w(x) = 1$, $c = 10$ вже при $r = 1$ помилка формули (7) не більша за 3 %, при $w(x) = f(x)$, $c = 10$, $r = 1$ помилка формули (9) не більша 10 %. Із збільшенням r помилки цих формул швидко зменшуються.

Формули (7) та (9) показують, що при $k + l = m = \text{const}$ найменша похибка наближення буде при $k = l$ або $k = l + 1$. Із формул (8) та (10) випливає, що розміщення вузлів асимптотично рівномірного наближення показникових функцій за допомогою раціональних сплайнів не залежить від степеня чисельника та знаменника виразу (4), а лише від їх суми $m = k + l$. Більш того — асимптотично рівномірне відносне наближення у даному випадку збігається з таким же наближенням із ланками рівної довжини.

НАБЛИЖЕННЯ СТЕПЕНЕВИХ ФУНКЦІЙ

Теорема 2. Ядро наближення функції $f(x) = x^{\alpha}$ $(\alpha \neq 0, x > 0)$ за допомогою раціонального многочлена (4) має вигляд

$$\eta_{k,l}\left(x^{\alpha}\right) = \frac{k!l!}{m!}(\alpha - k)_{m+1} x^{\alpha - m - 1}, \tag{11}$$

де $(a)_m = a(a+1)\ldots(a+m-1)$ — символ Похгаммера.

Доведення одержуємо при підстановці функції $f(x) = x^{\alpha}$ у вираз (5).

Наслідок 1. Максимальна похибка асимптотично рівномірного наближення чебишовським сплайном із r ланками функції $f(x) = x^{\alpha}$ при $w(x) = 1$ виражається формулою

$$\varepsilon_{k,l}(x^{\alpha}) = E_{k,l}(x^{\alpha}, 1; a, b) =$$

$$= \frac{k!l!(m+1)^{m+1}\left|(\alpha - k)_{m+1}\right|}{2^{2m+1} m!(m+1)!(\alpha r)^{m+1}} \left| b^{\frac{\alpha}{m+1}} - a^{\frac{\alpha}{m+1}} \right|^{m+1}. \tag{12}$$

Можна показати, що відносна похибка формули (12) має вигляд

$$\delta_{\mu}\left(x^{\alpha}, 1\right) = \frac{\theta(\alpha - m - 1)}{2r} \ln\frac{b}{a} + O\left(\left(\frac{b-a}{r}\right)^2\right), \quad |\theta| < 1.$$

При близькому до нуля a помилка формули (12) зростає необмежено і використовувати її не можна. При $\alpha = m + 1$ з формули (12) маємо

$$\varepsilon_{m,0}\left(x^{m+1}\right) = E_{m,0}\left(x^{m+1}, 1; -1, 1\right) = 2^{-m}. \tag{13}$$

Вираз (13) є точним, що випливає із властивостей многочленів Чебишова [3].

Наслідок 2. Розміщення вузлів асимптотично рівномірного наближення функції $f(x) = x^{\alpha}$ чебишовським сплайном із r ланками при $w(x) = 1$ визначаються за формулами

$$z_i = \left(\frac{r-i}{r} a^{\frac{\alpha}{m+1}} + \frac{i}{r} b^{\frac{\alpha}{m+1}}\right)^{\frac{m+1}{\alpha}}, \quad i = 0, \ldots, r. \tag{14}$$

Наслідок 3. Максимальна похибка асимптотично рівномірного наближення чебишовським сплайном із r ланками функції $f(x) = x^{\alpha}$ при $w(x) = f(x)$ описується формулою

$$\delta_{k,l}(x) = E_{k,l}(x^{\alpha}, f(x); a, b) =$$

$$= \frac{k!l!(\ln b - \ln a)^{m+1}\left|(\alpha - k)_{m+1}\right|}{2^{2m+1} m!(m+1)!r^{m+1}}. \tag{15}$$

Можна показати, що відносна похибка формули (15) має вигляд

$$\delta_{\mu}(x^{\alpha}, 1) = \frac{\theta(m+1)}{2r} \ln\frac{b}{a} + O\left(\left(\frac{b-a}{r}\right)^2\right), \quad |\theta| < 1. \tag{16}$$

Отже формулу (15) не можна використовувати при a, близькому до нуля. При обчисленні функції x^{α} на ЕОМ звичайно використовують найкраще чебишовське наближення цієї функції на проміжку $[a, 1]$. Похибка асимптотично рівномірних наближень функції $f(x) = x^{\alpha}$ при $x \in [1/2, 1]$, $\alpha = 1/2$ та $w(x) = 1$ практично не відрізняється від похибки рівномірних наближень уже при $r = 1$. За тих же умов для $w(x) = f(x)$ різниця не більша 1 %.

Наслідок 4. Розміщення вузлів асимптотично рівномірного наближення функції $f(x) = x^{\alpha}$ чебишовським сплайном із r ланками при $w(x) = f(x)$ визначається за формулами

$$z_i = a(b/a)^{i/r}, \quad i = 0, \ldots r. \tag{17}$$

Із формул (12) та (15) для похибок легко знайти найменшу похибку наближення при фіксованому числі параметрів раціонального многочлена (4) $k + l = m = \text{const}$. Так, для $\alpha \in (0, 1)$ найменша похибка досягається при $k = l$ або $k = l + 1$. З формули (14) випливає, що розміщення вузлів асимптотично рівномірного абсолютного наближення степеневої функції раціональним сплайном залежить лише від суми $m = k + l$. Формула (17) показує, що розміщення вузлів асимптотично рівномірного відносного наближення степеневої функції раціональним сплайном те саме для будь-якого раціонального сплайна.

НАБЛИЖЕННЯ ЛОГАРИФМІЧНИХ ФУНКЦІЙ

Теорема 3. Ядро наближення функції $f(x) = \log_c x$ $(c > 1, x > 0)$ за допомогою раціонального многочлена (4) має вигляд

$$\eta_{k,l}\left(\log_c x\right) = \frac{x^{-m-1}(k!l!)^2}{m!\ln c}, \quad k \geq l. \tag{18}$$

Доведення одержуємо при підстановці функції $f(x) = \log_c x$ у вираз (5).

При $k < l$ не вдається отримати такого простого виразу для ядра наближення. Для неперевірених ядер $k > l$ виявилось, що $\eta_{k,l}(\log_c x) > \eta_{l,k}(\log_c x)$. Тому наближення логарифмічних функцій раціональними многочленами при $k < l$ практично не використовуються [3, 5].

Наслідок 1. Максимальна похибка асимптотично рівномірного наближення чебишовським сплайном із r ланками функції $f(x) = \log_c x$ при $w(x) = 1$ записується формулою

$$\varepsilon_{k,l}(\log_c x) = E_{k,l}(\log_c x, 1; a, b) =$$

$$= \frac{(k!l!)^2(\ln b - \ln a)^{m+1}}{r^{m+1}2^{2m+1}m!(m+1)!\ln c}, \quad k \ge l. \qquad (19)$$

Відносна похибка формули (19) має вигляд (16). Тому формулу (19) не можна використовувати при a, близькому до нуля. При обчисленнях на ЕОМ звичайно використовують найкраще абсолютне раціональне наближення на проміжку $[a, 1]$ при $a > 0$. При $a = 1/2$ формулою (19) можна користуватися уже при $r = 1$. Найменше значення похибки за формулою (19) при $k + l = m = \text{const}$ досягається при $k = l$ або $k = l - 1$.

Наслідок 2. Розміщення вузлів асимптотично рівномірного наближення функції $f(x) = \log_c x$ чебишовським сплайном із r ланками при $w(x) = 1$ знаходимо за формулами (17).

НАБЛИЖЕННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Усі тригонометричні та обернені їм функції є парними або непарними. При $|x| < R$ вони можуть бути представлені степеневими рядами

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i x^{ip+s}, \qquad (20)$$

де p та s – цілі числа. Тому такі функції зручно наближати сплайнами (1) із ланками

$$V_m(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^{ip+s}. \qquad (21)$$

Теорема 4. Ядро наближення функції $f(x)$ виду (20) за допомогою многочлена (21) при $|x| < R$ має вигляд

$$\eta(f, V_m) = x^{(p-1)(m+1)-s} p^{m+1} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(i+m+1)!}{i!} \alpha_{i+m+1} x^{ip}. \qquad (22)$$

Доведення теореми наведено у роботі [2].

Наслідок 1. Максимальна похибка ε_m асимптотично рівномірного наближення функції (20) чебишовським сплайном із r ланками (21) при $w(x) = 1$, $x \in [0, b]$, $b < R$ визначається за формулою

$$\varepsilon_m = \frac{\alpha_{m+1} b^{p(m+1)+s}}{2^{2m+1} r^{m+1}} \left[\frac{p(m+1)}{p(m+1)+s}\right]^{m+1} \times$$

$$\times \left[1 + \frac{\alpha_{m+2}}{\alpha_{m+1}} \frac{m+2}{m+1} \frac{p(m+1)+s}{2p(m+1)+s} b^p + \xi_m b^{2p}\right]^{m+1}, \qquad (23)$$

$$\lim_{m\to\infty} \xi_m = 0.$$

Наслідок 2. Розміщення вузлів асимптотично рівномірного наближення функції (20) чебишовським сплайном із r ланками виду (21) при $w(x) = 1$, $x \in [0, b]$ задовольняє квадратні відносно z_i^p рівняння

$$z_i^{2p} + 2Bz_i^p - b^p(b^p + 2B)(i/r)^{\frac{(m+1)p}{p(m+1)+s}} = 0,$$

$$i = 0, \ldots, r, \qquad (24)$$

де

$$B = \frac{m+1}{2(m+2)} \frac{\alpha_{m+1}}{\alpha_{m+2}} \frac{2p(m+1)+s}{p(m+1)}.$$

Так, для $f(x) = \sin x$, $p = 2$, $s = 1$, $\alpha_i = (-1)^i/(2i+1)!$, тому із виразів (23) та (24) випливає

$$\varepsilon_m(\sin x) \approx \frac{b^{2m+3} r^{-m-1}}{2^m(2m+3)!} \left(\frac{m+1}{2m+3}\right)^{m+1} \times$$

$$\times \left[1 - \frac{(2m+3)b^2}{2(m+1)(2m+5)(4m+5)}\right]^{m+1},$$

де

$$z_i = \sqrt{B - \sqrt{B^2 - b^2(2B - b^2)(i/r)^{(2m+2)/(2m+3)}}},$$

$$B = (2m+5)(4m+5)/2.$$

Наведені формули достатньо точні при $b \le \pi/2$.

Наслідок 3. Максимальна похибка δ_m асимптотично рівномірного наближення функції (20) чебишовським сплайном із r ланками (21) при $w(x) = f(x)$, $x \in [0, b]$, $b < R$ визначається за формулою

$$\delta_m = \frac{\alpha_{m+1} r^{-m-1}}{\alpha_0 2^{2m+1}} \left\{ b^p + \frac{1}{2(m+1)} \times \right.$$

$$\left. \times \left[\frac{\alpha_{m+2}}{\alpha_{m+1}} (m+2) - \frac{\alpha_1}{\alpha_0} \right] b^{2p} + \xi_m b^{3p} \right\}^{m+1}, \qquad (25)$$

$$\lim_{m \to \infty} \xi_m = 0 .$$

Наслідок 4. Розміщення вузлів асимптотично рівномірного наближення функції (20) чебишовським сплайном із r ланками виду (21) при $w(x) = f(x)$, $x \in [0, b]$ задовольняє квадратні відносно z_i^p рівняння

$$z_i^{2p} + 2Bz_i^p - b^p\left(b^p + 2B\right)i/r = 0, \quad i = 0, \dots, r, \quad (26)$$

де

$$B = \alpha_0 \alpha_{m+1} (m+1) / \left[\alpha_0 \alpha_{m+2} (m+2) - \alpha_1 \alpha_{m+1} \right].$$

Так, для $f(x) = \cos x$, $p = 2$, $\alpha_i = (-1)^i / 2i!$. Тому із виразу (25) та рівнянь (26) випливає, що $B = 2m + 3$,

$$\delta_m(\cos x) = \frac{r^{-m-1}}{2^{2m+1}(2m+2)!} \left[b^2 + b^4/2(2m+3) \right]^{m+1},$$

$$z_i = \sqrt{\sqrt{b^2 + ib^2 (b^2 + 2B)/r} - B}, \; i = 0, \dots, r$$

Наведені формули достатньо точні при $b \le \pi/2$. Виходячи із виразів (23) та (24), можна написати формули для похибок і рівняння для вузлів сплайнів для багатьох тригонометричних, гіперболічних, обернених їм функцій, а також для функції Бесселя.

ВИСНОВКИ

Викладене дає можливість будувати ефективні процедури із використанням розпаралелювання обчислень для одержання числових значень елементарних та спеціальних функцій. Такі процедури зручно використовувати у системах керування космічними апаратами, що дозволяє збільшити точність та прискорити прийняття рішень при керуванні.

1. Неметх Г. Об одном относительном рациональном приближении функции e^x // Мат. заметки. – 1977. – **21**, № 4. – С. 581 – 586.
2. Попов Б. А. Равномерное приближение сплайнами. – Киев: Наук. думка, 1989. – 272 с.
3. Попов Б. А., Теслер Г. С. Вычисление функций на ЭВМ. Справочник. – Киев: Наук. думка, 1984. – 600 с.
4. Braess D. On the conjecture of Meinardus on rational approximation to e^x // J. Approxim. Theory. – 1984. – **40**, N 4. – P. 375 – 379.
5. Computer approximation / Eds J. F. Hart, E. V. Cheney et al. – New York.: Wiley, 1968. – 334 p.
6. Kalantari B., Kalantari J. High order iterative methods for approximation square roots // BIT. – 1996. – **36**, N 2. – P. 395 – 396.
7. Meinardus G. Approximation of functions. Theory and numerical methods. – Berlin: Springer, 1967. – 198 p.
8. Schulte M. J., Omar J., Swartzlander E. E. Optimal initial approximations for the Newton-Rephson division algorithm // Computing. – 1994. – **53**, N 3-4. – P. 233 – 242.

REPRESENTATION OF FUNCTIONS IN CONTROL SYSTEMS

B. O. Popov

We propose a hardly efficient approach for calculating mathematical functions in space control systems. The approach is based on a balanced approximation of the functions by rational Chebyshev splines. Expressions are obtained for the errors and link borders for the main mathematical functions.