Космічна наука і технологія. 1998. Т 4. № 1. С. 83—86.

УДК 629.78

Математическая модель динамики большой космической конструкции

В. П. Делямуре, Д. А. Храмов

Інститут технічної механіки НАН та НКА України, Дніпропетровськ

Надійшла до редакції 23.12.97

Подається новий підхід до математичного опису динаміки великої космічної конструкції як деформованого тіла. Вводиться поняття кінематичних параметрів для руху деформованого тіла. Враховується скінченна швидкість поширення механічної взаємодії. Тривимірна модель динаміки замінюється еквівалентною чотиривимірною моделлю статики, для якої наведені умови рівноваги сил і моментів.

ВВЕДЕНИЕ

Перспективы развития космической техники связаны с созданием качественно новых космических объектов — больших космических конструкций (БКК). Одной из основных проблем, возникающих в процессе проектирования таких объектов, является разработка адекватной модели их динамики. Несмотря на значительные достижения в области вычислительных процессов, до сих пор не удалось создать математическую модель, адекватно описывающую динамику БКК.

В настоящее время преимущественно применяются модели БКК в виде систем твердых тел [4], эквивалентных балок [2] и т. п. Такого рода модели не учитывают существенных особенностей, определяющих характер движения БКК.

Для полного и детального описания динамики БКК как деформируемого тела необходимы кинематические параметры, подобные углам Эйлера в кинематике абсолютно твердого тела, но описывающие, помимо поворотов, также сдвиги и растяжения (сжатия) и позволяющие получить кинематические уравнения движения БКК. В рамках существующих методов кинематика БКК не рассматривается вообще. В рассматриваемой здесь математической модели введены все необходимые кинематические параметры.

В упругом теле, каковым является БКК, механическое взаимодействие распространяется со скоростью звука. Усилие, приложенное в некоторой точке БКК, начинает воздействовать на другую ее точку, удаленную от первой, только спустя некоторое время. По этой причине динамика реальной БКК должна существенно отличаться от динамики конструкции, составленной из абсолютно твердых тел или балок, в которых скорость распространения механического взаимодействия по умолчанию принимается бесконечно большой.

Учет конечной скорости распространения механического взаимодействия при построении модели динамики БКК естественным образом приводит к четырехмерному математическому формализму.

При использовании четырехмерной модели исчезает разница между статикой и динамикой. Точнее, классическая трехмерная динамика рассматривается как четырехмерная статика. Четырехмерные уравнения равновесия сил и моментов, будучи по форме аналогичными соответствующим уравнениям трехмерной статики, описывают динамику БКК и позволяют определить все характеристики движения.

КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ

В каждой точке конструкции в каждый момент времени определен подвижный четырехмерный векторный базис. Локальная деформация конструкции рассматривается как изменение этого базиса по сравнению с абсолютным базисом, характеризующим натуральное состояние конструкции, и описывается кинематическими параметрами Λ_i^j $(i,\ j = 0,\ \dots,\ 3)$, которые могут быть объединены в матрицу

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_0^0 & \Lambda_1^0 & \Lambda_2^0 & \Lambda_3^0 \\ \Lambda_0^1 & \Lambda_1^1 & \Lambda_2^1 & \Lambda_3^1 \\ \Lambda_0^2 & \Lambda_1^2 & \Lambda_2^2 & \Lambda_3^2 \\ \Lambda_0^3 & \Lambda_1^3 & \Lambda_2^3 & \Lambda_3^3 \end{bmatrix}.$$

Кинематические параметры имеют смысл квазикоординат и описывают поворот, сдвиг, растяжение (сжатие) и скорость движения подвижного базиса по отношениею к абсолютному базису во всех точках БКК во все моменты времени.

Частные производные кинематических параметров имеют смысл квазискоростей и в совокупности образуют объект связности

$$\Omega_{ki}^j = \partial_k \Lambda_i^j, \qquad (i,\ j,\ k = 0,\ \dots,\ 3).$$

Здесь ∂_k — символ частной производной по координате x^k, индекс ноль соответствует временной координате.

ТЕНЗОР ДЕФОРМАЦИИ

Четырехмерный тензор деформации имеет вид

$$D_k^i = \nabla_k \xi^i, \qquad (i,\ k = 0,\ \dots,\ 3),$$

где ξ^i — четырехмерный вектор, соединяющий две различные точки тела в два различных момента времени; ∇_k — символ абсолютной производной по координате x^k. Более подробно

$$D_k^i = \partial_k \xi^i + \Omega_{kp}^i \xi^p.$$

Введенный таким образом тензор деформации D_k^i в общем случае нелинеен. Нелинейность обусловлена наличием связности.

Физическое истолкование элементов тензора деформации D_k^i состоит в следующем.

Элементы D_k^i $(i,\ k = 1,\ \dots,\ 3)$ в линейном случае при $\Omega_{kp}^i = 0$ совпадают с элементами обычного линейного тензора деформации ε_k^i [3]:

$$D_k^i = \varepsilon_k^i, \qquad (i,\ k = 1,\ \dots,\ 3)$$

и описывают локальную деформацию, вызванную движением точки относительно неизменного базиса, то есть чисто относительным ее движением.

В нелинейном случае элементы тензора

$$D_k^i = \partial_k \xi^i + \Omega_{kp}^i \xi^p, \qquad (i,\ k,\ p = 1,\ \dots,\ 3)$$

описывают ту же деформацию, но уже с учетом движения базиса, т. е. с учетом переносного движения точки.

Элементы D_0^i $(i = 1,\ \dots,\ 3)$ в линейном случае имеют смысл скорости v^i поступательного движения частицы, отнесенной к скорости звука a, но без учета движения базиса:

$$D_0^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^0} = \frac{1}{a}\frac{\partial \xi^i}{\partial t} = \frac{v^i}{a}.$$

В нелинейном случае учитывается также скорость, вызванная движением базиса, аналогично скорости $v = \omega \times \mathbf{r}$ в механике абсолютно твердого тела, но включающая в себя скорость, вызванную, кроме вращения, также сдвигом и растяжением (сжатием) базиса.

Элемент D_0^0 имеет смысл относительного изменения температуры.

$$D_0^0 = -\frac{\Delta T}{T_*},$$

где T_* — температура в натуральном состоянии; ΔT — прирост температуры по отношению к натуральному состоянию.

Компоненты D_i^0 $(i = 1,\ \dots,\ 3)$ тензора деформации описывают диссипацию механической энергии посредством превращения ее в тепло и выравнивания температуры за счет теплопроводности, они пропорциональны градиенту температуры

$$D_i^0 = -\frac{\alpha}{\mu T_*}\frac{\partial T}{\partial x^i},$$

где α — коэффициент теплопроводности; μ — коэффициент вязкости.

ТЕНЗОР ВНЕШНИХ НАПРЯЖЕНИЙ

Внешние воздействия, приложенные к четырехмерному структурному элементу, можно описать четырехмерным тензором напряжений

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_0^0 & P_0^1 & P_0^2 & P_0^3 \\ P_1^0 & P_1^1 & P_1^2 & P_1^3 \\ P_2^0 & P_2^1 & P_2^2 & P_2^3 \\ P_3^0 & P_3^1 & P_3^2 & P_3^3 \end{bmatrix}.$$

Элементы тензора напряжений P_i^j $(i,\ j = 1,\ \dots,\ 3)$

имеют смысл классического тензора напряжений σ_i^j [3]

$$P_i^j = \sigma_i^j, \qquad (i, j = 1, ..., 3).$$

Остальные элементы тензора P_i^j имеют следующий смысл.

Пусть на конструкцию действует объемная сила f^j $(i,\ j = 1,\ ...,\ 3)$. Плотность импульса силы имеет вид:

$$p^j = \int f^j dt.$$

Элементы P_0^j тензора внешних напряжений выражаются через плотность импульса объемной силы:

$$P_0^j = ap^j, \qquad (j = 1, ..., 3).$$

Пусть q_i — вектор плотности потока тепла, характеризующий количество тепла, проходящего через единичную площадку в единицу времени в некотором направлении. Соответствующие элементы четырехмерного тензора напряжений определяются следующим образом:

$$P_i^0 = q_i / a, \qquad (i = 1, ..., 3).$$

Элемент P_0^0 тензора внешних напряжений выражается через удельное теплосодержание Q следующим образом:

$$P_0^0 = -Q.$$

Четырехмерный тензор внешних напряжений можно записать в виде

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -Q & ap^1 & ap^2 & ap^3 \\ q_1/a & \sigma_1^1 & \sigma_1^2 & \sigma_1^3 \\ q_2/a & \sigma_2^1 & \sigma_2^2 & \sigma_2^3 \\ q_3/a & \sigma_3^1 & \sigma_3^2 & \sigma_3^3 \end{bmatrix},$$

явно показывающем физическое содержание его компонентов.

УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

В трехмерной статике рассматриваются условия равновесия внешних и внутренних сил и моментов [1]. В четырехмерном случае гиперповерхность S трехмерна, ее элемент dS^i имеет следующие компоненты:

$$dS^0 = dx^1 dx^2 dx^3,$$

$$dS^1 = dx^0 dx^2 dx^3,$$

$$dS^2 = dx^0 dx^1 dx^3,$$

$$dS^3 = dx^0 dx^1 dx^2,$$

где x^0 — временная координата; x^1, x^2, x^3 — пространственные координаты.

Четырехмерная внешняя сила, действующая на элемент гиперповерхности, описывается следующим образом:

$$dF^j = P_i^j \sqrt{g}\, dS^i.$$

Здесь g — модуль детерминанта метрического тензора.

Четырехмерный главный вектор внешних сил есть интеграл по гиперповерхности:

$$F^j = \int_S P_i^j \sqrt{g}\, dS^i.$$

Четырехмерная внутренняя сила, действующая на элемент dS^i гиперповерхности описывается формулой

$$dR^j = ED_i^j \sqrt{g}\, dS^i,$$

где E — модуль упругости.

Четырехмерный главный вектор внутренних сил есть интеграл по гиперповерхности:

$$R^j = \int_S ED_i^j \sqrt{g}\, dS^i.$$

Уравнение равновесия сил имеет вид

$$\int_S ED_i^j \sqrt{g}\, dS^i = \int_S P_i^j \sqrt{g}\, dS^i.$$

Четырехмерный момент внешних сил, действующий на элемент dS^i гиперповерхности, равен

$$dM^{kj} = \xi^k dF^j,$$

или

$$dM^{kj} = \xi^k P_i^j \sqrt{g}\, dS^i.$$

Величина dM^{kj} кроме антисимметричной части

$$dM^{[kj]} = \frac{1}{2}(\xi^k dF^j - \xi^j dF^k),$$

описывающей момент силы в точном смысле и вызывающей крутильную деформацию, содержит в себе также симметричную часть

$$dM^{(kj)} = \frac{1}{2}(\xi^k dF^j + \xi^j dF^k),$$

которая описывает некую силовую характеристику, подобную моменту, но вызывающую сдвиг и растяжение.

Главный момент внешних сил имеет вид:

$$M^{kj} = \int_S \xi^k P_i^j \sqrt{g}\, dS^i.$$

Аналогичным образом можно получить выражение для главного момента внутренних сил:

$$L^{kj} = \int_S E\xi^k D_i^j \sqrt{g} dS^i.$$

Уравнение равновесия моментов имеет вид

$$\int_S E\xi^k D_i^j \sqrt{g} dS^i = \int_S \xi^k P_i^j \sqrt{g} dS^i.$$

Полученные уравнения равновесия описывают не только равновесие сил и моментов в смысле теории упругости, но и равновесие тепловых потоков.

ОСОБЕННОСТИ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Полученная математическая модель динамики БКК как деформируемого тела имеет общий характер и в принципе позволяет определить смещение, деформацию и температуру во всех точках конструкции во все моменты времени. Следует отметить, что при моделировании динамики конкретных конструкций возникают следующие проблемы.

Первая проблема заключается в обратном переводе содержания четырехмерных понятий на обычный язык динамики. Эта проблема вызывает наименьшие затруднения. Физическое содержание тензора деформации и тензора внешних воздействий известно. Для вычислительных целей достаточно описать во времени внешние воздействия (естественные или управляющие) в различных точках БКК. Трехмерная гиперповерхность, фигурирующая в модели — это обычная двумерная поверхность БКК, взятая во все моменты времени.

Вторая проблема связана с математическим описанием геометрии БКК. Реальная конструкция, например орбитальная станция, может иметь чрезвычайно сложные геометрические очертания. Математическая модель ее поверхности может оказаться практически бесполезной вследствие своей громоздкости и вытекающих отсюда вычислительных трудностей. Выход состоит либо в идеализации, упрощении геометрической модели БКК, либо в разбиении ее на поддающиеся простому описанию элементы и поэлементном расчете динамики с последующим сопряжением результатов. В этом случае необходимо разработать метод такого сопряжения.

Обе эти проблемы не вытекают из предложенного метода расчета динамики БКК, являясь самостоятельными и общими для любого метода.

Третья проблема связана с алгоритмом вычислений. Уравнения равновесия — это нелинейные интегральные уравнения над четырехмерной областью переменных, содержащие в подынтегральной функции частные производные. Регулярных численных методов решения таких уравнений нет. Поэтому для решения уравнений равновесия были разработаны проблемно-ориентированный численно-аналитический метод и реализующий его вычислительный алгоритм, допускающие прозрачное физическое истолкование. Алгоритм обладает максимально возможной общностью: переменная часть алгоритма включает в себя только описание геометрии конкретной конструкции и внешних воздействий, а вычислительное ядро алгоритма универсально.

С учетом первых двух проблем для численного анализа динамики были выбраны два класса объектов: БКК, имеющие достаточно простую форму (поле солнечных батарей, антенное поле) и элементы конструкции, которые требуют детального описания их формы (параболическая антенна, солнечный концентратор).

Результаты расчетов позволяют говорить о том, что разработанная математическая модель динамики БКК и соответствующий ей метод вычислений работоспособны и обеспечивают полный и точный расчет динамики БКК или ее элементов.

Подробное описание алгоритма выходит за рамки данной статьи.

Работа выполнена в рамках НИР «Динамика. Разработка теоретических и методических вопросов создания перспективных летательных аппаратов космической техники.» НКА Украины.

1. Лурье А. И. Теория упругости. — М.: Наука, 1970.—940 с.
2. Нур Г. С., Райан Р. С., Скофилд Х. Н., Симс Дж. Л. Динамика больших космических конструкций и управление ими // Аэрокосмическая техника.—1985.—**3**, № 6.—С. 129—147.
3. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. — М.: Наука, 1979.—744 с.
4. Haug E. Large scale computational issues in the dynamics of large space structures // Space-New Commun. Opportun. Proc. 34th Annu AAS Int. Conf. Houston, Tex., Nov. 3—5, 1987. — San Diego (Calif.), 1989.—P. 319—326.

MATHEMATICAL MODEL OF THE DYNAMICS OF A BIG SPACE STRUCTURE

V. P. Delamoure and D. A. Khramov

We propose a new approach to the mathematical description of the dynamics of a large space structure as a deformable body. The concept of kinematic parameters as applied to the motion of deformable body is proposed. The finite velocity of the propagation of mechanical interaction is taken into account. The three-dimensional model of dynamics is substituted by equivalent four-dimensional model of statics, and the equilibrium equations of forces and torques are given for the latter model.