

УДК 517.977

Исследование динамики быстродействующего упругого кинематически управляемого работа-манипулятора

Т. В. Завражина, Н. М. Завражина

Київський державний технічний університет будівництва і архітектури

Надійшла до редакції 04.12.97

Поставлено задачу кінематичного керування просторовими рухами гнучкого багатоланкового робота-манипулятора космічного призначення при високошвидкісному маневруванні. Побудована механічна модель динаміки системи враховує розподілені властивості пружності та інерції ланок манипулятора, які знаходяться в стані складного руху. Наведено приклад чисельного дослідження динамічних характеристик дволанкового робота при перенесенні ним корисного навантаження.

ВВЕДЕНИЕ

При проектировании высокоманевренных автономных роботов-манипуляторов космического базирования особую актуальность приобретают вопросы построения моделей их динамики, адекватно учитывающих наличие распределенной упругой податливости исполнительных органов и влияние сил инерции. Применение таких моделей может позволить существенно улучшить технические характеристики манипуляционных систем за счет возможности исследования и регулирования полей упругих перемещений их звеньев и добиться в конечном итоге повышения точности позиционирования транспортируемых объектов.

Возникающие при моделировании динамики автономных космических роботов теоретические трудности связаны с необходимостью учета подвижности несущей манипулятор платформы и обусловленного действием сил инерции Кориолиса гироскопического взаимодействия между жесткими вращательными и упругими линейными составляющими движений элементов его звеньев. Их преодоление требует разработки специальных методов построения решений получаемых при таком подходе эволюционных задач для систем взаимосвязан-

ных существенно нелинейных дифференциальных уравнений гибридного типа, содержащих обыкновенные и частные производные по временной и пространственным координатам, что представляет собой сложную вычислительную проблему.

Попытки построения упрощенных расчетных моделей динамики упругих космических роботов шарнирно-стержневой структуры предприняты в работах [10—13]. Они базируются на специальных предположениях об инерционных и жесткостных свойствах стержневых звеньев и формах их деформирования и получены либо приведением соответствующих механических моделей с распределенными параметрами к конечномерным моделям процедурой пространственной дискретизации упругих перемещений [10, 12], либо с применением формализма Лагранжа [11, 13].

Указанные подходы оказываются наиболее эффективными при анализе динамических характеристик роботов, включающих одно упругое звено [12]. При увеличении количества упругих звеньев, составляющих кинематическую цепь реального робота, наличие их взаимодействия и взаимного влияния значительно усложняет задачу динамического моделирования и затрудняет использование изложенных выше методов. Принятые в связи с этим в

работах [11, 13] упрощающие предположения существенно сужают область применимости полученных расчетных схем многозвенных роботов.

Вопросы построения математических моделей многозвенных динамически управляемых упругих роботов-манипуляторов, функционирующих в условиях, максимально приближенных к реальным, рассмотрена в монографии [1], где приведен обзор существующих подходов к исследованию динамических характеристик пространственных космических конструкций переменной конфигурации. Обсуждаются целесообразность и границы применимости каждой модели для описания динамических свойств манипуляторов с различными конструктивными параметрами при выполнении медленных маневров.

В настоящей работе построена механическая модель быстродействующего космического робота-манипулятора, конструкция которого состоит из абсолютно жесткой несущей платформы и укрепленного на ней упругого многозвенного манипулятора шарнирно-стержневой структуры, при перемещении груза, представляющего собой абсолютно твердое тело. Предполагается, что данная механическая система совершает в пространстве свободное движение. Для решения поставленной задачи кинематического управления движениями робота-манипулятора применяется методика, развитая ранее в работе [5] для случая динамического управления.

МЕХАНИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ КИНЕМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Пусть механическая система, моделирующая космический робот-манипулятор (рис. 1), состоит из подвижной платформы, представляющей собой абсолютно твердое тело, и присоединенной к ней цепи N прямолинейных упругих стержней длиной l_n ($n = 1, \dots, N$), соединенных с платформой и между собой посредством идеальных цилиндрических шарниров. На конце N -го стержня жестко прикреплено абсолютно твердое тело (груз), переносимое манипулятором. Пронумеруем входящие в систему абсолютно твердые и упругие тела в порядке их присоединения друг к другу, начиная с платформы, которой присвоим нулевой номер. Для построения механической модели данной системы введем инерциальную систему координат $OXYZ$ с ортами $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ и жестко свяжем с каждым n -м телом местную систему координат $O_n x_n y_n z_n$ с ортами $\mathbf{i}_n, \mathbf{j}_n, \mathbf{k}_n$ ($n = 0, \dots, N + 1$). При этом для абсолютно твердых тел ($n = 0; n = N + 1$) в качестве осей систем координат $O_n x_n y_n z_n$ будем выбирать их главные центральные оси инерции, а для упругих тел

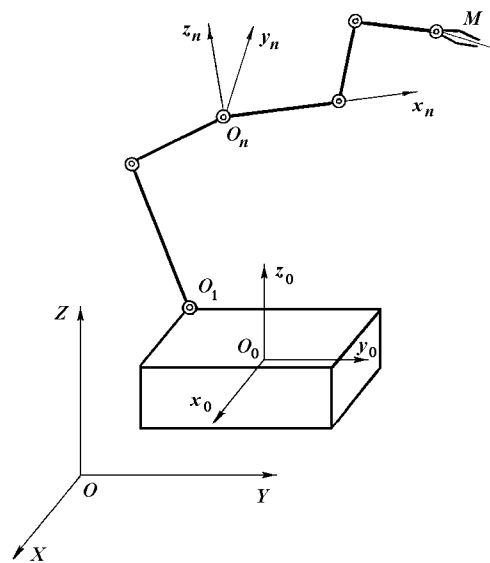


Рис. 1. Кинематическая схема многозвенного космического робота-манипулятора

($n = 1, \dots, N$) будем считать, что начало O_n соответствующей системы координат совпадает с началом n -го стержня, ось $O_n x_n$ совпадает с его осевой линией в недеформированном состоянии, а оси $O_n y_n$ и $O_n z_n$ всех звеньев параллельны, когда вся кинематическая цепочка манипулятора вытянута в одну прямую линию и оси $O_n x_n$ направлены вдоль одной прямой. Примем, что каждая из осей соединяющих звенья цилиндрических шарниров совпадает с какой-либо из осей местной системы координат. Угол поворота последующего n -го упругого звена по отношению к предыдущему вокруг одной из осей $O_n x_n, O_n y_n$ или $O_n z_n$ обозначим φ_n, ψ_n или θ_n соответственно. Он считается положительным, если с конца соответствующей оси вращения поворот виден происходящим против часовой стрелки. Кинематическое управление системой осуществляется путем задания N функций $\varphi_k = \varphi_k(t), \psi_l = \psi_l(t), \theta_m = \theta_m(t)$ ($k \neq l \neq m$). Внешние моменты $M_n^e = M_n^e(t)$, которые обеспечивают реализацию заданного закона программного управления, создаются независимыми приводами, расположенными в соединительных шарнирах, и считаются неизвестными.

Запишем дифференциальные уравнения свободного движения несущей платформы в векторной форме:

$$M_0 \mathbf{a}_{O_0} = \mathbf{A}_0 \mathbf{R}_{O_1}, \tag{1}$$

$$\frac{d\mathbf{L}_O}{dt} = \mathbf{A}_0 \mathbf{M}_{O_1} + \mathbf{r}_{O_1} \times (\mathbf{A}_0 \mathbf{R}_{O_1}).$$

Они получены на основе теорем о движении центра масс материальной системы и об изменении момента количества движения системы относительно неподвижного центра [7]. Здесь \mathbf{r}_{O_1} — радиус-вектор точки O_1 сочленения платформы с первым стержнем, вычисленный в системе координат $OXYZ$; $\mathbf{R}_{O_1} = N_{x,0}\mathbf{i}_0 - Q_{y,0}\mathbf{j}_0 - Q_{z,0}\mathbf{k}_0$, $M_{O_1} = M_{x,0}\mathbf{i}_0 - M_{y,0}\mathbf{j}_0 + M_{z,0}\mathbf{k}_0$ — реакция и реактивный момент начала $x_1 = 0$ первого стержня, возникающие в шарнире O_1 ; $\alpha_{ij}^0 = \alpha_{ij}^0(t)$ — компоненты матрицы \mathbf{A}_0 направляющих косинусов: $\alpha_{11}^0 = \cos(X, x_0)$, $\alpha_{12}^0 = \cos(X, y_0)$, ..., $\alpha_{33}^0 = (Z, z_0)$; \mathbf{a}_{O_0} — вектор ускорения центра масс O_0 платформы.

Вектор момента количества движения платформы относительно точки O определяется выражением

$$\begin{aligned} \mathbf{L} = & (I_{x,0}\omega_{x,0} - I_{xy,0}\omega_{y,0} - I_{xz,0}\omega_{z,0})\mathbf{i} + \\ & + (I_{y,0}\omega_{y,0} - I_{yz,0}\omega_{z,0} - I_{xy,0}\omega_{x,0})\mathbf{j} + \\ & + (I_{z,0}\omega_{z,0} - I_{xz,0}\omega_{x,0} - I_{yz,0}\omega_{y,0})\mathbf{k}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\omega_{x,0} = \omega_{x,0}(t)$, $\omega_{y,0} = \omega_{y,0}(t)$, $\omega_{z,0} = \omega_{z,0}(t)$ — проекции вектора угловой скорости $\omega_0(t)$ платформы на оси системы $OXYZ$; $I_{x,0}$, $I_{y,0}$, $I_{z,0}$, $I_{xy,0}$, $I_{xz,0}$, $I_{yz,0}$ — моменты инерции платформы относительно осей системы $OXYZ$. Последние связаны с моментами инерции платформы $I_{x,0}$, $I_{y,0}$, $I_{z,0}$, задаваемыми относительно осей системы $O_0x_0y_0z_0$, соотношениями

$$\begin{aligned} I_{x,0} &= I_{x,0}\alpha_{11}^0 + I_{y,0}\alpha_{12}^0 + I_{z,0}\alpha_{13}^0, \\ I_{y,0} &= I_{x,0}\alpha_{21}^0 + I_{y,0}\alpha_{22}^0 + I_{z,0}\alpha_{23}^0, \\ I_{z,0} &= I_{x,0}\alpha_{31}^0 + I_{y,0}\alpha_{32}^0 + I_{z,0}\alpha_{33}^0, \\ I_{xy,0} &= -(I_{x,0}\alpha_{11}^0\alpha_{21}^0 + I_{y,0}\alpha_{12}^0\alpha_{22}^0 + I_{z,0}\alpha_{13}^0\alpha_{23}^0), \\ I_{xz,0} &= -(I_{x,0}\alpha_{11}^0\alpha_{31}^0 + I_{y,0}\alpha_{12}^0\alpha_{32}^0 + I_{z,0}\alpha_{13}^0\alpha_{33}^0), \\ I_{yz,0} &= -(I_{x,0}\alpha_{21}^0\alpha_{31}^0 + I_{y,0}\alpha_{22}^0\alpha_{32}^0 + I_{z,0}\alpha_{23}^0\alpha_{33}^0). \end{aligned} \quad (3)$$

Проецируя векторные равенства (1) с учетом (2) на оси инерциальной системы координат $OXYZ$, получим скалярную форму дифференциальных уравнений свободного движения платформы:

$$\begin{aligned} dM_0 \frac{d^2X_0}{dt^2} &= N_{x,0}\alpha_{11}^0 - Q_{y,0}\alpha_{12}^0 - Q_{z,0}\alpha_{13}^0, \\ M_0 \frac{d^2Y_0}{dt^2} &= N_{x,0}\alpha_{21}^0 - Q_{y,0}\alpha_{22}^0 - Q_{z,0}\alpha_{23}^0, \\ M_0 \frac{d^2Z_0}{dt^2} &= N_{x,0}\alpha_{31}^0 - Q_{y,0}\alpha_{32}^0 - Q_{z,0}\alpha_{33}^0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & I_{x,0} \frac{d\omega_{x,0}}{dt} - I_{xy,0} \frac{d\omega_{y,0}}{dt} - I_{xz,0} \frac{d\omega_{z,0}}{dt} - \\ & - I_{xz,0}\omega_{x,0}\omega_{y,0} + (I_{z,0} - I_{y,0})\omega_{y,0}\omega_{z,0} + I_{xy,0}\omega_{x,0}\omega_{z,0} - \\ & - I_{yz,0}(\omega_{y,0}^2 - \omega_{z,0}^2) = M_{x,0}\alpha_{11}^0 - M_{y,0}\alpha_{12}^0 + M_{z,0}\alpha_{13}^0 + \\ & + N_{x,0}(Y_0\alpha_{31}^0 - Z_0\alpha_{21}^0 - y_{0,1}\alpha_{13}^0 + z_{0,1}\alpha_{12}^0) - \\ & - Q_{y,0}(Y_0\alpha_{32}^0 - Z_0\alpha_{22}^0 + x_{0,1}\alpha_{13}^0 - z_{0,1}\alpha_{11}^0) - \\ & - Q_{z,0}(Y_0\alpha_{33}^0 - Z_0\alpha_{23}^0 - x_{0,1}\alpha_{12}^0 + y_{0,1}\alpha_{11}^0), \\ & - I_{xy,0} \frac{d\omega_{x,0}}{dt} + I_{y,0} \frac{d\omega_{y,0}}{dt} - I_{yz,0} \frac{d\omega_{z,0}}{dt} + \\ & + I_{yz,0}\omega_{x,0}\omega_{y,0} + (I_{x,0} - I_{y,0})\omega_{x,0}\omega_{z,0} - I_{xy,0}\omega_{y,0}\omega_{z,0} - \\ & - I_{xz,0}(\omega_{x,0}^2 - \omega_{y,0}^2) = M_{x,0}\alpha_{21}^0 - M_{y,0}\alpha_{22}^0 + M_{z,0}\alpha_{23}^0 + \\ & + N_{x,0}(Z_0\alpha_{11}^0 - X_0\alpha_{31}^0 - y_{0,1}\alpha_{23}^0 + z_{0,1}\alpha_{22}^0) - \\ & - Q_{y,0}(Z_0\alpha_{12}^0 - X_0\alpha_{32}^0 + x_{0,1}\alpha_{23}^0 - z_{0,1}\alpha_{21}^0) - \\ & - Q_{z,0}(Z_0\alpha_{13}^0 - X_0\alpha_{33}^0 - x_{0,1}\alpha_{22}^0 + y_{0,1}\alpha_{21}^0), \\ & - I_{xz,0} \frac{d\omega_{x,0}}{dt} - I_{yz,0} \frac{d\omega_{y,0}}{dt} + I_{z,0} \frac{d\omega_{z,0}}{dt} - \\ & - I_{yz,0}\omega_{x,0}\omega_{z,0} + (I_{y,0} - I_{x,0})\omega_{x,0}\omega_{y,0} + I_{xz,0}\omega_{y,0}\omega_{z,0} - \\ & - I_{xy,0}(\omega_{x,0}^2 - \omega_{y,0}^2) = M_{x,0}\alpha_{31}^0 - M_{y,0}\alpha_{32}^0 + M_{z,0}\alpha_{33}^0 + \\ & + N_{x,0}(X_0\alpha_{21}^0 - Y_0\alpha_{11}^0 - y_{0,1}\alpha_{33}^0 + z_{0,1}\alpha_{32}^0) - \\ & - Q_{y,0}(X_0\alpha_{22}^0 - Y_0\alpha_{12}^0 + x_{0,1}\alpha_{33}^0 - z_{0,1}\alpha_{31}^0) - \\ & - Q_{z,0}(X_0\alpha_{23}^0 - Y_0\alpha_{13}^0 - x_{0,1}\alpha_{32}^0 + y_{0,1}\alpha_{31}^0), \end{aligned} \quad (4)$$

где $X_0 = X_0(t)$, $Y_0 = Y_0(t)$, $Z_0 = Z_0(t)$ — координаты центра масс O_0 платформы в системе $OXYZ$; $x_{0,1} = x_{0,1}(t)$, $y_{0,1} = y_{0,1}(t)$, $z_{0,1} = z_{0,1}(t)$ — координаты точки O_1 платформы в системе $O_0x_0y_0z_0$.

Дополним дифференциальные уравнения (4) кинематическими уравнениями Пуассона [8]:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_{11}^0}{dt} &= \omega_{y,0}\alpha_{31}^0 - \omega_{z,0}\alpha_{21}^0, \\ \frac{d\alpha_{21}^0}{dt} &= -\omega_{x,0}\alpha_{31}^0 + \omega_{z,0}\alpha_{11}^0, \\ \frac{d\alpha_{31}^0}{dt} &= \omega_{x,0}\alpha_{21}^0 - \omega_{y,0}\alpha_{11}^0, \\ \frac{d\alpha_{12}^0}{dt} &= \omega_{y,0}\alpha_{32}^0 - \omega_{z,0}\alpha_{22}^0, \\ \frac{d\alpha_{22}^0}{dt} &= -\omega_{x,0}\alpha_{32}^0 + \omega_{z,0}\alpha_{12}^0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_{32}^0}{dt} &= \omega_{x,0}\alpha_{22}^0 - \omega_{y,0}\alpha_{12}^0, \\ \frac{d\alpha_{13}^0}{dt} &= \omega_{y,0}\alpha_{33}^0 - \omega_{z,0}\alpha_{23}^0, \\ \frac{d\alpha_{23}^0}{dt} &= -\omega_{x,0}\alpha_{33}^0 + \omega_{z,0}\alpha_{13}^0, \\ \frac{d\alpha_{33}^0}{dt} &= \omega_{x,0}\alpha_{23}^0 - \omega_{y,0}\alpha_{13}^0. \end{aligned} \quad (5)$$

Выведем уравнения динамического равновесия звеньев манипулятора, описывая их упругие свойства в рамках линейной теории прямолинейных стержней. Рассмотрим произвольный элемент n -го звена манипулятора. Пользуясь принципом Даламбера, спроектируем на оси $O_n x_n, y_n, z_n$ действующие на него силы и моменты упругости и инерции:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{x,n}}{\partial x_n} - \rho_n F_n a_{xn} &= 0, \\ -\frac{\partial Q_{y,n}}{\partial x_n} + \frac{\partial}{\partial x_n} \left[N_{x,n} \frac{\partial v_n}{\partial x_n} \right] - \rho_n F_n a_{yn} &= 0, \\ -\frac{\partial Q_{z,n}}{\partial x_n} + \frac{\partial}{\partial x_n} \left[N_{x,n} \frac{\partial w_n}{\partial x_n} \right] - \rho_n F_n a_{zn} &= 0, \\ \frac{\partial M_{x,n}}{\partial x_n} - \rho_n J_{pn} \varepsilon_{xn} &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где ρ_n — плотность материала стержня; F_n, J_{pn} — площадь и полярный момент инерции поперечного сечения стержня; $a_{xn} = a_{xn}(x_n, t), a_{yn} = a_{yn}(x_n, t), a_{zn} = a_{zn}(x_n, t)$ — проекции вектора абсолютного ускорения $\mathbf{a}_n = \mathbf{a}_n(x_n, t)$ элемента стержня на оси $O_n x_n, y_n, z_n$; $\varepsilon_{xn} = \varepsilon_{xn}(x_n, t), \varepsilon_{yn} = \varepsilon_{yn}(x_n, t), \varepsilon_{zn} = \varepsilon_{zn}(x_n, t)$ — проекции вектора абсолютного углового ускорения $\boldsymbol{\varepsilon}_n = \boldsymbol{\varepsilon}_n(x_n, t)$ элемента стержня на оси $O_n x_n, y_n, z_n$.

Внутренние силовые факторы, возникающие в рассматриваемом поперечном сечении, определяются соотношениями

$$\begin{aligned} N_{x,n} &= E_n F_n \frac{\partial u_n}{\partial x_n}, & Q_{y,n} &= E_n J_{zn} \frac{\partial^3 v_n}{\partial x_n^3}, \\ Q_{z,n} &= E_n J_{yn} \frac{\partial^3 w_n}{\partial x_n^3}, \\ M_{x,n} &= G_n J_{pn} \frac{\partial \gamma_n}{\partial x_n}, & M_{y,n} &= E_n J_{yn} \frac{\partial^2 w_n}{\partial x_n^2}, \\ M_{z,n} &= E_n J_{zn} \frac{\partial^2 v_n}{\partial x_n^2}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $E_n F_n, E_n J_{yn}, E_n J_{zn}, G_n J_{pn}$ — жесткости при растяжении, изгибе в двух плоскостях и кручении; $u_n = u_n(x_n, t), v_n = v_n(x_n, t), w_n = w_n(x_n, t), \gamma_n = \gamma_n(x_n, t)$ — функции упругих перемещений стержня вдоль осей $O_n x_n, O_n y_n, O_n z_n$ и угла закручивания.

Будем считать, что каждый элемент стержня находится в состоянии сложного движения, тогда его абсолютное ускорение $\mathbf{a}_n = \mathbf{a}_n(x_n, t)$ можно представить в виде [6]:

$$\mathbf{a}_n = \mathbf{a}_n^e + \mathbf{a}_n^r + \mathbf{a}_n^c \quad (8)$$

где $\mathbf{a}_n^e = \mathbf{a}_n^e(x_n, t), \mathbf{a}_n^r = \mathbf{a}_n^r(x_n, t), \mathbf{a}_n^c = \mathbf{a}_n^c(x_n, t)$ — соответственно векторы переносного, относительно и кориолисового ускорений.

Ускорение \mathbf{a}_n^e вычисляется по формуле

$$\mathbf{a}_n^e = \mathbf{a}_n(0) + \omega_n(0) \times (\omega_n(0) \times \mathbf{r}_n) + \varepsilon_n(0) \times \mathbf{r}_n, \quad (9)$$

где $\mathbf{a}_n(0) = \mathbf{a}_n(0, t)$ — вектор абсолютного ускорения точки O_n ; $\omega_n(0) = \omega_n(0, t), \varepsilon_n(0) = \varepsilon_n(0, t)$ — векторы угловой скорости и углового ускорения подвижной системы координат $O_n x_n, y_n, z_n$ относительно системы $OXYZ$; $\mathbf{r}_n = (x_n + u_n)\mathbf{i}_n + v_n\mathbf{j}_n + w_n\mathbf{k}_n$ — радиус-вектор рассматриваемого элемента стержня.

Относительное ускорение \mathbf{a}_n^r представим выражением

$$\mathbf{a}_n^r = \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} \mathbf{i}_n + \frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} \mathbf{j}_n + \frac{\partial^2 w_n}{\partial t^2} \mathbf{k}_n. \quad (10)$$

Отметим, что при выполнении манипулятором быстрых маневров значения угловой скорости $\omega_n(0)$ и упругих смещений u_n, v_n, w_n могут оказаться достаточно большими и ускорением Кориолиса

$$\mathbf{a}_n^c = 2\omega_n(0) \times \left(\frac{\partial u_n}{\partial t} \mathbf{i}_n + \frac{\partial v_n}{\partial t} \mathbf{j}_n + \frac{\partial w_n}{\partial t} \mathbf{k}_n \right) \quad (11)$$

в этом случае пренебрегать нельзя.

Согласно работе [6] абсолютную угловую скорость $\omega_n = \omega_n(x_n, t)$ элемента стержня, участвующего в нескольких вращательных движениях, можно представить соотношением

$$\omega_n = \omega_n(0) + \frac{\partial \gamma_n}{\partial t} \mathbf{i}_n - \frac{\partial w_n}{\partial t} \mathbf{j}_n + \frac{\partial v_n}{\partial t} \mathbf{k}_n, \quad (12)$$

а абсолютное угловое ускорение

$$\boldsymbol{\varepsilon}_n = \boldsymbol{\varepsilon}_n(0) + \frac{\partial^2 \gamma_n}{\partial t^2} \mathbf{i}_n - \frac{\partial^2 w_n}{\partial t^2} \mathbf{j}_n + \frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} \mathbf{k}_n, \quad (13)$$

получить дифференцированием выражения (12) в системе координат $O_n x_n, y_n, z_n$, связанной со стержнем.

С учетом (7)—(11), (13) система (6) примет вид

$$\begin{aligned}
E_n F_n \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_n^2} &= \rho_n F_n \left[a_{xn}(0) - (\omega_{yn}^2(0) + \omega_{zn}^2(0))(x_n + u_n) + \right. \\
&+ \omega_{yn}(0)\omega_{xn}(0)v_n + \omega_{zn}(0)\omega_{xn}(0)w_n + \varepsilon_{yn}(0)w_n - \\
&\left. - \varepsilon_{zn}(0)v_n + \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} + 2\omega_{yn}(0) \frac{\partial w_n}{\partial t} - 2\omega_{zn}(0) \frac{\partial v_n}{\partial t} \right], \\
E_n J_{zn} \frac{\partial^4 v_n}{\partial x_n^4} - E_n F_n \frac{\partial}{\partial x_n} \left[\frac{\partial u_n}{\partial x_n} \frac{\partial v_n}{\partial x_n} \right] &= \\
&= -\rho_n F_n \left[a_{yn}(0) + \omega_{xn}(0)\omega_{yn}(0)(x_n + u_n) - \right. \\
&- (\omega_{xn}^2(0) + \omega_{zn}^2(0))v_n + \omega_{zn}(0)\omega_{yn}(0)w_n - \varepsilon_{xn}(0)w_n + \\
&\left. + \varepsilon_{zn}(0)(x_n + u_n) + \frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} - 2\omega_{xn}(0) \frac{\partial w_n}{\partial t} + 2\omega_{zn}(0) \frac{\partial u_n}{\partial t} \right], \\
E_n J_{yn} \frac{\partial^4 w_n}{\partial x_n^4} - E_n F_n \frac{\partial}{\partial x_n} \left[\frac{\partial u_n}{\partial x_n} \frac{\partial w_n}{\partial x_n} \right] &= \\
&= -\rho_n F_n \left[a_{zn}(0) + \omega_{xn}(0)\omega_{zn}(0)(x_n + u_n) - \right. \\
&- (\omega_{xn}^2(0) + \omega_{yn}^2(0))w_n + \omega_{yn}(0)\omega_{zn}(0)v_n + \varepsilon_{xn}(0)v_n - \\
&\left. - \varepsilon_{yn}(0)(x_n + u_n) + \frac{\partial^2 w_n}{\partial t^2} + 2\omega_{xn}(0) \frac{\partial v_n}{\partial t} - 2\omega_{yn}(0) \frac{\partial u_n}{\partial t} \right], \\
G_n J_{pn} \frac{\partial^2 \gamma_n}{\partial x_n^2} &= -\rho_n J_{pn} \left[\varepsilon_{xn}(0) + \frac{\partial^2 \gamma_n}{\partial t^2} \right], \\
\varepsilon_{xn}(0) = \frac{d\omega_{xn}(0)}{dt}, \quad \varepsilon_{yn}(0) = \frac{d\omega_{yn}(0)}{dt}, \quad \varepsilon_{zn}(0) = \frac{d\omega_{zn}(0)}{dt}, & \quad (14)
\end{aligned}$$

где $\omega_{xn}(0)$, $\omega_{yn}(0)$, $\omega_{zn}(0)$, $\varepsilon_{xn}(0)$, $\varepsilon_{yn}(0)$, $\varepsilon_{zn}(0)$ — проекции векторов угловой скорости $\omega_n(0)$ и углового ускорения $\varepsilon_n(0)$ на оси системы $O_n x_n y_n z_n$.

Таким образом, динамика робота-манипулятора описывается системой существенно нелинейных взаимосвязанных уравнений (4), (5), (14) гибридного типа, которая содержит обыкновенные и частные производные по временной и пространственным координатам. Дополним ее граничными уравнениями, вытекающими из способа соединения концов упругих стержней. Учтем при этом, что в указанной системе, общий порядок которой равен двенадцати, помимо неизвестных полевых переменных u_n , v_n , w_n , γ_n и функций времени $a_{xn}(0)$, $a_{yn}(0)$, $a_{zn}(0)$, $\varepsilon_{xn}(0)$, $\varepsilon_{yn}(0)$, $\varepsilon_{zn}(0)$ неизвестными являются также функции времени $N_{x,0}$, $Q_{y,0}$, $Q_{z,0}$, $M_{x,0}$, $M_{y,0}$, $M_{z,0}$. Поэтому для замыкания системы следует сформулировать $18N + 6$ граничных уравнений, из которых восемнадцать уравнений сочленения $n-1$ -го и n -го звеньев будут замыкать уравнения (14),

составленные для каждого n -го звена, и шесть уравнений будут выражать условия жесткого присоединения абсолютно твердого тела к концу $x_N = l_N$ последнего звена манипулятора.

Из условий жесткой связи местной системы координат $O_n x_n y_n z_n$ с началом $x_n = 0$ n -го стержня получим следующие граничные уравнения:

$$\begin{aligned}
u_n(0) = 0, \quad v_n(0) = 0, \quad w_n(0) = 0, \quad \gamma_n(0) = 0, \\
\frac{\partial v_n(0)}{\partial x_n} = 0, \quad \frac{\partial w_n(0)}{\partial x_n} = 0. \quad (15)
\end{aligned}$$

Как и в работе [5], не ограничивая общности постановки задачи, будем считать, что $n - 1$ -й и n -й стержни соединены цилиндрическим шарниром, ось которого совпадает с осью $O_n y_n$. Тогда условия шарнирного соединения конца $x_{n-1} = l_{n-1}$ $n - 1$ -го стержня с началом $x_n = 0$ n -го ($n = 2, \dots, N$) стержня представим векторными равенствами

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_{n-1}(l_{n-1}) + \mathbf{R}_n(0) &= 0, \\
\mathbf{M}_{n-1}(l_{n-1}) + \mathbf{M}_n(0) &= 0, \quad (16) \\
\mathbf{a}_{n-1}(l_{n-1}) + \mathbf{a}_n(0) &= 0, \\
\varepsilon_n(0) - \frac{d^2 \psi_n}{dt^2} \mathbf{j}_n &= \varepsilon_{n-1}(0) + \\
+ \frac{\partial^2 \gamma_{n-1}(l_{n-1})}{\partial t^2} \mathbf{i}_{n-1} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w_{n-1}(l_{n-1})}{\partial x_{n-1}} \right) \mathbf{j}_{n-1} + \\
+ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial v_{n-1}(l_{n-1})}{\partial x_{n-1}} \right) \mathbf{k}_{n-1} + \omega_n(0) \times \omega_{n-1}(l_{n-1}),
\end{aligned}$$

где $\mathbf{R}_{n-1}(l_{n-1}) = N_{x,n-1}(l_{n-1})\mathbf{i}_{n-1} - Q_{y,n-1}(l_{n-1})\mathbf{j}_{n-1} - Q_{z,n-1}(l_{n-1})\mathbf{k}_{n-1}$, $\mathbf{M}_{n-1}(l_{n-1}) = M_{x,n-1}(l_{n-1})\mathbf{i}_{n-1} - M_{y,n-1}(l_{n-1})\mathbf{j}_{n-1} + M_{z,n-1}(l_{n-1})\mathbf{k}_{n-1}$ — реакция и реактивный момент начала $x_n = 0$ n -го стержня; $\mathbf{R}_n(0) = -N_{x,n}(0)\mathbf{i}_n + Q_{y,n}(0)\mathbf{j}_n + Q_{z,n}(0)\mathbf{k}_n$, $\mathbf{M}_n(0) = -M_{x,n}(0)\mathbf{i}_n + M_{y,n}(0)\mathbf{j}_n - M_{z,n}(0)\mathbf{k}_n$ — соответственно реакция и реактивный момент конца $x_{n-1} = l_{n-1}$ $n - 1$ -го стержня. Первые два уравнения выражают условия равенства нулю геометрической суммы реакций и реактивных моментов в соединительном шарнире O_n , которое вытекает из закона о равенстве действия и противодействия. Третье соотношение представляет собой условие равенства векторов абсолютных ускорений соответствующих концов стержней. Четвертое выражение отражает соотношение между векторами угловых ускорений систем координат $O_{n-1} x_{n-1} y_{n-1} z_{n-1}$ и $O_n x_n y_n z_n$.

Скалярную форму граничных уравнений (16) получим, проецируя их на оси системы координат $O_n x_n y_n z_n$:

$$\begin{aligned}
 & \left\| \begin{array}{c} -N_{x,n}(0) \\ Q_{y,n}(0) \\ Q_{z,n}(0) \end{array} \right\| - \mathbf{B}_{n-1,n}^T \left\| \begin{array}{c} -N_{x,n-1}(l_{n-1}) \\ Q_{y,n-1}(l_{n-1}) \\ Q_{z,n-1}(l_{n-1}) \end{array} \right\| = 0, \\
 & \left\| \begin{array}{c} -M_{x,n}(0) \\ M_{y,n}(0) \\ -M_{z,n}(0) \end{array} \right\| - \mathbf{B}_{n-1,n}^T \left\| \begin{array}{c} -M_{x,n-1}(l_{n-1}) \\ M_{y,n-1}(l_{n-1}) \\ -M_{z,n-1}(l_{n-1}) \end{array} \right\| = 0, \\
 & \left\| \begin{array}{c} a_{x,n}(0) \\ a_{y,n}(0) \\ a_{z,n}(0) \end{array} \right\| - \mathbf{B}_{n-1,n}^T \left\| \begin{array}{c} a_{x,n-1}(l_{n-1}) \\ a_{y,n-1}(l_{n-1}) \\ a_{z,n-1}(l_{n-1}) \end{array} \right\| = 0, \\
 & \left\| \begin{array}{c} \varepsilon_{x,n} \\ \varepsilon_{y,n} - \frac{d^2\psi_n}{dt^2} \\ \varepsilon_{z,n} \end{array} \right\| - \\
 & - \frac{d\mathbf{B}_{n-1,n}^T}{dt} \left\| \begin{array}{c} \omega_{x,n-1} + \frac{\partial\gamma_{n-1}(l_{n-1})}{\partial t} \\ \omega_{y,n-1} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w_{n-1}(l_{n-1})}{\partial x_{n-1}} \right) \\ \omega_{z,n-1} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v_{n-1}(l_{n-1})}{\partial x_{n-1}} \right) \end{array} \right\| - \\
 & - \mathbf{B}_{n-1,n}^T \left\| \begin{array}{c} \varepsilon_{x,n-1} + \frac{\partial^2\gamma_{n-1}(l_{n-1})}{\partial t^2} \\ \varepsilon_{y,n-1} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w_{n-1}(l_{n-1})}{\partial x_{n-1}} \right) \\ \varepsilon_{z,n-1} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial v_{n-1}(l_{n-1})}{\partial x_{n-1}} \right) \end{array} \right\| = 0,
 \end{aligned} \tag{17}$$

где $\mathbf{B}_{n-1,n} = \mathbf{A}_n^T \mathbf{A}_{n-1}$ — матрица перехода от базиса $\mathbf{i}_{n-1}, \mathbf{j}_{n-1}, \mathbf{k}_{n-1}$ к базису $\mathbf{i}_n, \mathbf{j}_n, \mathbf{k}_n$; $\alpha_{ij}^n = \alpha_{ij}^n(t)$ — компоненты матрицы \mathbf{A}_n направляющих косинусов: $\alpha_{11}^n = \cos(X, x_n)$, $\alpha_{12}^n = \cos(X, y_n)$, ..., $\alpha_{33}^n = \cos(Z, z_n)$. Структура матрицы $\mathbf{B}_{n-1,n}$ такова, что при выбранной для данного соединения ориентации оси цилиндрического шарнира второе равенство во второй группе уравнений системы (17) приводится к двум равенствам

$$\begin{aligned}
 M_{y,n-1}(l_{n-1}) &= M_n^e, \\
 M_{y,n}(0) &= M_n^e,
 \end{aligned} \tag{18}$$

где M_n^e — неизвестный внешний момент в n -м шарнире.

Отметим, что окончательный вид граничных уравнений (17) может быть получен с учетом дифференциальных зависимостей (7) и выражений (8)—(11).

Граничные условия шарнирного сочленения платформы с началом $x_1 = 0$ первого стержня в

точке O_1 могут быть получены из тех же соображений, что и условия соединения смежных стержней (16):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_{O_1} + \mathbf{R}_1(0) &= 0, \\
 \mathbf{M}_{O_1} + \mathbf{M}_1(0) &= 0, \\
 \mathbf{a}_{O_1} &= \mathbf{a}_1(0), \\
 \varepsilon_1(0) - \frac{d^2\psi_1}{dt^2} \mathbf{j}_1 &= \varepsilon_0 + \omega_1(0) \times \omega_0,
 \end{aligned} \tag{19}$$

где $\mathbf{R}_1(0) = -N_{x,1}(0)\mathbf{i}_1 + Q_{y,1}(0)\mathbf{j}_1 + Q_{z,1}(0)\mathbf{k}_1$, $\mathbf{M}_1(0) = -M_{x,1}(0)\mathbf{i}_1 + M_{y,1}(0)\mathbf{j}_1 - M_{z,1}(0)\mathbf{k}_1$ — соответственно реакция и реактивный момент начала $x_1 = 0$ первого стержня; \mathbf{a}_{O_1} — вектор ускорения точки O_1 платформы; $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(t)$ — вектор углового ускорения платформы. Для определения скалярной формы уравнений (19) их следует спроецировать на оси системы координат $O_1x_1y_1z_1$.

В случае жесткого присоединения груза к концу $x_N = l_N$ N -го стержня соответствующие граничные условия представим в виде дифференциальных уравнений свободного движения твердого тела [7]

$$\begin{aligned}
 M_{N+1} \mathbf{a}_{O_{N+1}} &= \mathbf{R}_{O_N}, \\
 \frac{d\mathbf{L}_{O_{N+1}}}{dt} &= \mathbf{M}_{O_N} + \mathbf{r}_{O_N} \times \mathbf{R}_{O_N},
 \end{aligned} \tag{20}$$

где M_{N+1} — масса груза;

$$\mathbf{r}_{O_N} = x_{N,N+1}\mathbf{i}_{N+1} + y_{N,N+1}\mathbf{j}_{N+1} + z_{N,N+1}\mathbf{k}_{N+1}$$

— радиус-вектор точки O_N присоединения N -го стержня и груза, вычисленный в системе $O_{N+1}x_{N+1}y_{N+1}z_{N+1}$;

$$\mathbf{R}_{O_N} = -N_{x,N+1}\mathbf{i}_{N+1} + Q_{y,N+1}\mathbf{j}_{N+1} + Q_{z,N+1}\mathbf{k}_{N+1}$$

и

$$\mathbf{M}_{O_N} = -M_{x,N+1}\mathbf{i}_{N+1} + M_{y,N+1}\mathbf{j}_{N+1} - M_{z,N+1}\mathbf{k}_{N+1}$$

— реакция и реактивный момент конца $x_N = l_N$ N -го стержня; $\mathbf{a}_{O_{N+1}}$ — вектор ускорения центра масс O_{N+1} груза;

$$\begin{aligned}
 \mathbf{L}_{O_{N+1}} &= I_{x,N+1}\omega_{x,N+1}\mathbf{i}_{N+1} + I_{y,N+1}\omega_{y,N+1}\mathbf{j}_{N+1} + \\
 &+ I_{z,N+1}\omega_{z,N+1}\mathbf{k}_{N+1}
 \end{aligned}$$

— момент количества движения груза относительно точки O_{N+1} ; $I_{x,N+1}$, $I_{y,N+1}$, $I_{z,N+1}$ — главные центральные моменты инерции груза относительно осей системы $O_{N+1}x_{N+1}y_{N+1}z_{N+1}$; $\omega_{x,N+1}$, $\omega_{y,N+1}$, $\omega_{z,N+1}$ — проекции угловой скорости $\omega_{N+1} = \omega_{N+1}(t)$ груза.

Проецируя векторные равенства (20) на оси сис-

темы координат $O_{N+1}x_{N+1}y_{N+1}z_{N+1}$, получим:

$$\begin{aligned} M_{N+1}a_{x,N+1} &= -N_{x,N+1}, \\ M_{N+1}a_{y,N+1} &= Q_{y,N+1}, \\ M_{N+1}a_{z,N+1} &= Q_{z,N+1}, \\ I_{x,N+1}\frac{d\omega_{x,N+1}}{dt} + (I_{z,N+1} - I_{y,N+1})\omega_{y,N+1}\omega_{z,N+1} &= \\ &= -M_{x,N+1} + y_{N,N+1}Q_{z,N+1} - z_{N,N+1}Q_{y,N+1}, \\ I_{y,N+1}\frac{d\omega_{y,N+1}}{dt} + (I_{x,N+1} - I_{z,N+1})\omega_{x,N+1}\omega_{z,N+1} &= \\ &= M_{y,N+1} - x_{N,N+1}Q_{z,N+1} - z_{N,N+1}N_{x,N+1}, \\ I_{z,N+1}\frac{d\omega_{z,N+1}}{dt} + (I_{y,N+1} - I_{x,N+1})\omega_{x,N+1}\omega_{y,N+1} &= \\ &= -M_{z,N+1} + x_{N,N+1}Q_{y,N+1} + y_{N,N+1}N_{x,N+1}, \end{aligned} \quad (21)$$

где $a_{x,N+1}$, $a_{y,N+1}$, $a_{z,N+1}$ — проекции ускорения $\mathbf{a}_{N+1} = \mathbf{a}_{N+1}(t)$ точки O_N на оси системы $O_{N+1}x_{N+1}y_{N+1}z_{N+1}$.

Дополним систему (4), (5), (14), (15), (17)—(19), (21) начальными условиями при $t = 0$.

Начальная конфигурация точек системы:

$$\begin{aligned} X_0(0) &= X_{0,0}, \quad Y_0(0) = Y_{0,0}, \quad Z_0(0) = Z_{0,0}, \\ a_{ij}^0(0) &= a_{ij,0}^0 \quad (i, j = 1, \dots, 3), \\ \varphi_k(0) &= \varphi_{k,0}, \quad \psi_l(0) = \psi_{l,0}, \\ \theta_m(0) &= \theta_{m,0} \quad (k \neq l \neq m), \\ u_n(x_n, 0) &= u_{n,0}(x_n), \quad v_n(x_n, 0) = v_{n,0}(x_n), \\ w_n(x_n, 0) &= w_{n,0}(x_n), \quad \gamma_n(x_n, 0) = \gamma_{n,0}(x_n) \\ &(n = 1, \dots, N); \end{aligned} \quad (22)$$

начальное распределение скоростей:

$$\begin{aligned} \frac{dX_0(0)}{dt} &= \dot{X}_{0,0}, \quad \frac{dY_0(0)}{dt} = \dot{Y}_{0,0}, \quad \frac{dZ_0(0)}{dt} = \dot{Z}_{0,0}, \\ \omega_{x,0}(0) &= \omega_{x,0}^0, \quad \omega_{y,0}(0) = \omega_{y,0}^0, \quad \omega_{z,0}(0) = \omega_{z,0}^0, \\ \frac{d\varphi_k(0)}{dt} &= \dot{\varphi}_{k,0}, \quad \frac{d\psi_l(0)}{dt} = \dot{\psi}_{l,0}, \quad \frac{d\theta_m(0)}{dt} = \dot{\theta}_{m,0} \\ &(k \neq l \neq m), \\ \frac{\partial u_n(x_n, 0)}{\partial t} &= \dot{u}_{n,0}(x_n), \quad \frac{\partial v_n(x_n, 0)}{\partial t} = \dot{v}_{n,0}(x_n), \\ \frac{\partial w_n(x_n, 0)}{\partial t} &= \dot{w}_{n,0}(x_n), \quad \frac{\partial \gamma_n(x_n, 0)}{\partial t} = \dot{\gamma}_{n,0}(x_n) \\ &(n = 1, \dots, N). \end{aligned} \quad (23)$$

Таким образом, система разрешающих уравне-

ний (4), (5), (14) с граничными уравнениями (15), (17)—(19), (21) и начальными условиями (22), (23) при заданном законе кинематического управления $\varphi_k = \varphi_k(t)$, $\psi_l = \psi_l(t)$, $\theta_m = \theta_m(t)$ ($k \neq l \neq m$) однозначно определяет движения рассматриваемой механической системы.

Задачу кинематического управления системой (4), (5), (14), (15), (17)—(19), (21)—(23) поставим следующим образом. Пусть задан программный закон изменения N углов $\varphi_k(t)$, $\psi_l(t)$, $\theta_m(t)$ взаимного поворота звеньев. Требуется определить движение системы (переменные $X_0(t)$, $Y_0(t)$, $Z_0(t)$, $\dot{X}_0(t)$, $\dot{Y}_0(t)$, $\dot{Z}_0(t)$, $a_{ij}^0(t)$ ($i, j = 1, \dots, 3$), $\omega_{x,0}(t)$, $\omega_{y,0}(t)$, $\omega_{z,0}(t)$, описывающие движение несущей платформы, и функции упругих перемещений звеньев $u_n(x_n, t)$, $v_n(x_n, t)$, $w_n(x_n, t)$, $\gamma_n(x_n, t)$; $n = 1, \dots, N$), а также найти управляющие моменты $M_n^e(t)$, обеспечивающие реализацию N заданных зависимостей $\varphi_k = \varphi_k(t)$, $\psi_l = \psi_l(t)$, $\theta_m = \theta_m(t)$ ($k \neq l \neq m$).

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Для решения поставленной задачи кинематического управления использовалась развитая авторами в работе [5] методика, основанная на совместном применении метода начальных параметров [3], одношагового метода Рунге-Кутты 4-го порядка [9], процедуры дискретной ортогонализации Годунова [4] и многошагового метода предиктор-корректор Адамса-Башфорта [9] для интегрирования разрешающих уравнений по пространственным и временной координатам, а также неявной схемы Хуболта [2] представления частных производных по временной координате их конечно-разностными аналогами.

Рассмотрим результаты моделирования динамики робота-манипулятора для случая его движения в одной из координатных плоскостей. Примем, например, что движение робота происходит в плоскости OXY инерциальной системы координат из состояния покоя, в котором оси жестко связанной с платформой системы координат $O_0x_0y_0z_0$ совмещены с соответствующими осями системы $OXYZ$, а оси O_1x_1 ($i = 1, 2$) — с осью O_0x_0 . Точка O_1 шарнирного присоединения начала первого звена к платформе лежит на оси O_0x_0 и отстоит от точки O_0 на 0.5 м.

При расчетах принято, что несущая платформа имеет массу $M_0 = 5 \cdot 10^3$ кг и моменты инерции $I_{x,0} = 1.417 \cdot 10^4$ кг·м², $I_{y,0} = 4.167 \cdot 10^3$ кг·м², $I_{z,0} = 1.083 \cdot 10^4$ кг·м². Звенья манипулятора представляют собой трубчатые алюминиевые стержни дли-

ной $l_1 = 6$ м, $l_2 = 5$ м с одинаковыми наружными ($D_1 = D_2 = 10$ см) и внутренними ($d_1 = d_2 = 5$ см) диаметрами. Плотность материала обоих звеньев $\rho = 2.7 \cdot 10^3$ кг/м³, модуль упругости $E = 6.8 \cdot 10^{10}$ Па. Переносимый манипулятором груз представляет собой шарообразное тело с радиусом $r = 0.3$ м, массой $M_3 = 887.4$ кг и моментами инерции $I_{x,3} = I_{y,3} = I_{z,3} = 31.945$ кг·м².

Кинематически управляемое движение манипулятора осуществляется в результате изменения углов $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$ в течение 12 с по заданному закону. Графики изменения вторых производных $\ddot{\theta}_1(t)$, $\ddot{\theta}_2(t)$ представлены на рис. 2, а, б. Максимумы их абсолютных значений равны $|\ddot{\theta}_1(t)|_{\max} = 0.04361$ с⁻², $|\ddot{\theta}_2(t)|_{\max} = 0.02181$ с⁻², при этом полные углы поворотов составили $\theta_1(12) = 60^\circ$, $\theta_2(12) = 30^\circ$. Движение системы исследовалось на отрезке времени $0 \leq t \leq 15$ с.

Для анализа и тестирования полученных результатов дополнительно рассматривалась задача кинематического управления роботом-манипулятором с эквивалентными физическими и геометрическими характеристиками, звенья которого считались абсолютно жесткими. Построенная в таких предположениях система обыкновенных дифференциальных уравнений динамики жесткого робота обладает первыми интегралами движения, которые в настоящей работе использованы для контроля точности расчетов, выполненных в упругом случае (рис. 2).

Можно заметить (рис. 2, в, г, д, функции $X_0(t)$, $Y_0(t)$, $\theta_0(t)$), что влияние упругой податливости звеньев на движение платформы невелико и проявляется лишь на участках разгона и торможения системы.

При кинематическом управлении углы $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$ изменяются по заданному закону и от податливости звеньев не зависят. Однако углы поворота $\alpha_1(t) = \arccos(\alpha_{11}^1(t))$, $\alpha_2(t) = \arccos(\alpha_{11}^2(t))$ связанных со звеньями систем координат $O_1x_1y_1z_1$, $O_2x_2y_2z_2$ относительно инерциальной системы $OXYZ$ включают в себя и углы упругих поворотов. Графики функций этих углов (рис. 2, е, ж) свидетельствуют, что в режиме управляемого движения ($0 \leq t \leq 12$ с) влияние на них упругих искривлений звеньев заметно.

После прекращения управления движением ($t > 12$ с) упругие перемещения $v_1(l_1)$, $v_2(l_2)$ концов звеньев становятся относительно малыми и для заданных параметров управления их влияние на движение системы в целом оказывается слабо ощутимым.

Профили функций моментов $M_1^e(t)$, $M_2^e(t)$ в шар-

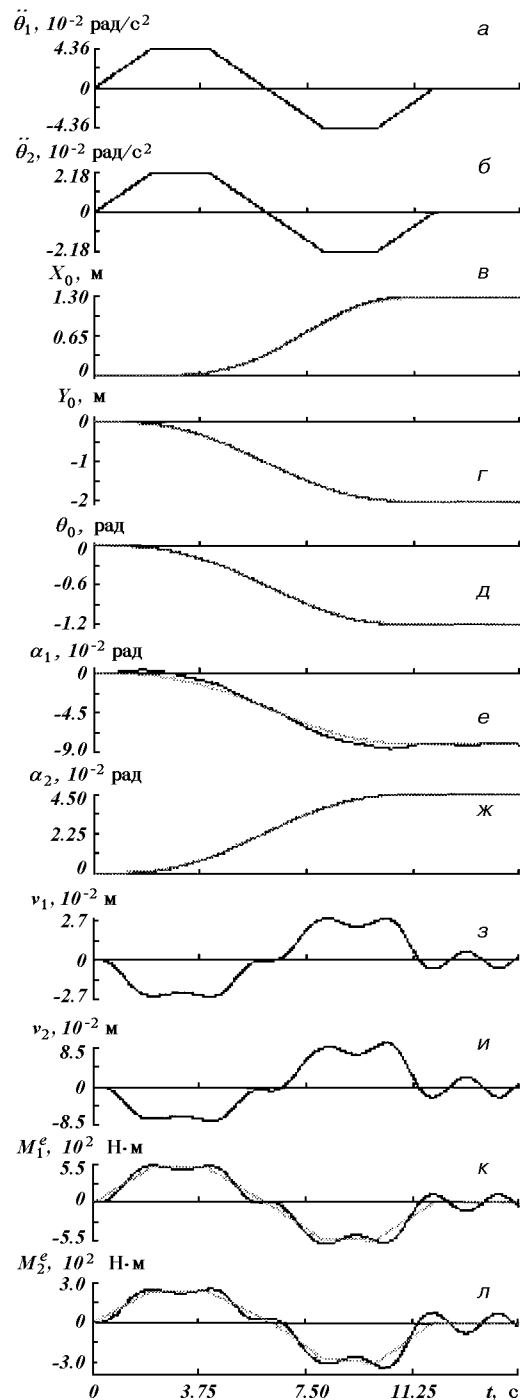


Рис. 2. Динамические характеристики двухзвенного робота-манипулятора при движении в плоскости OXY : а, б — угловые ускорения $\ddot{\theta}_1(t)$, $\ddot{\theta}_2(t)$ взаимного поворота звеньев; в, г, д, — функции $X_0(t)$, $Y_0(t)$, $\theta_0(t)$, характеризующие движение несущей платформы; е, ж — углы поворота $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$ звеньев манипулятора относительно инерциальной системы координат; з, и — упругие перемещения $v_1(l_1)$, $v_2(l_2)$ концов звеньев; к, л — управляющие моменты $M_1^e(t)$, $M_2^e(t)$ в соединительных шарнирах. Сплошные линии — упругая модель, пунктирные — жесткая

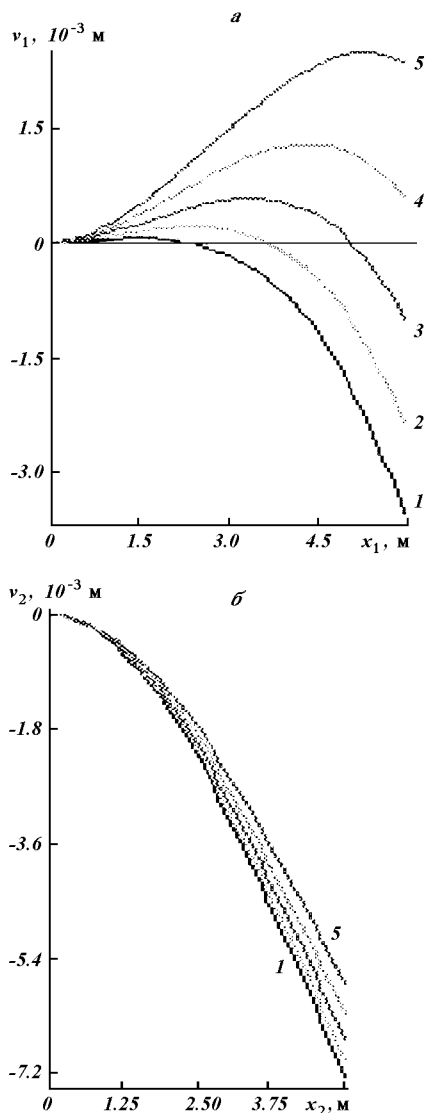


Рис. 3. Формы 1—5 изгиба $v_1(x_1)$ первого (а) и $v_2(x_2)$ второго (б) звеньев в последовательные моменты времени $t = 6.375, 6.4, 6.425, 6.45, 6.475$ с

нирах (рис. 2, к, л) для жесткого манипулятора близки к профилям функций угловых ускорений $\ddot{\theta}_1(t)$, $\ddot{\theta}_2(t)$. Учет гибкости звеньев манипулятора приводит к заметному изменению функций $M_1^e(t)$, $M_2^e(t)$, которые оказываются отличными от нуля и при $t > 12$ с.

На рис. 3 даны пять различных форм изгиба

первого (а) и второго (б) звеньев, полученные в последовательные моменты времени. Каждая из них представляет собой суперпозицию по меньшей мере двух первых форм собственных парциальных колебаний.

1. Алпатов А. П., Белоножко П. А., Горбунцов В. В. и др. Динамика пространственных развитых механических систем изменяемой конфигурации. — К.: Наук. думка, 1990.—256 с.
2. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. — М.: Стройиздат, 1982.—447 с.
3. Бидерман В. Л. Механика тонкостенных конструкций. — М.: Машиностроение, 1977.—488 с.
4. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук.—1961.—16, вып. 3 (99).—С. 171—174.
5. Гуляев В. И., Завражина Т. В. Динамика пространственных движений робота-манипулятора // Космічна наука і технологія.—1997.—3, № 3/4.—С. 90—95.
6. Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Курс теоретической механики. — М.: Наука, 1982.—Т. 1.—352 с.
7. Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Курс теоретической механики. — М.: Наука, 1983.—Т. 2.—640 с.
8. Лурье А. И. Аналитическая механика. — М.: Физматгиз, 1961.—827 с.
9. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. — М.: Мир, 1990.—512 с.
10. Damaren Chris, Sharf Inna. Simulation of flexible-link manipulators with inertial and geometric nonlinearities // Trans. ASME. J. Dyn. Syst., Meas. and Contr.—1995.—117, N 1.—P. 74—87.
11. Kirk C. L., Oria A., Hammer F. Slewing dynamics and vibration control of flexible space shuttle remote manipulator // AAS // AIAA Astrodynamics Specialist Conference, Halifax, Canada, 1995.—19 p.
12. Van Woerkom P. Th. L. M. Modified dynamics modelling for maneuvering flexible space manipulators // J. Sound and Vibr.—1995.—179, N 5.—P. 777—792.
13. Xu Jianke, Bainum Peler M. Dynamics of flexible multi-link robots arms with mass center offset // Acta astronaut.—1995.—36, N 2.—P. 99—111.

STUDYING THE DYNAMICS OF HIGH-SPEED ELASTIC KINEMATICALLY CONTROLLED ROBOT-MANIPULATOR

T. V. Zavrazhina and N. M. Zavrazhina

We set out the problem on controlling kinematically spatial motions of a flexible multi-link space robot-manipulator under conditions of its high-speed manoeuvring. The constructed mathematical model of the system dynamics takes into account the distributed properties of elasticity and inertia of the manipulator links, which are at the state of compound motion. We give an example of the numerical investigation of dynamical characteristics of a two-link robot when it is employed to carry a load.