

УДК 629.7.54

## О механизме взаимодействия акустического излучения с плоскими элементами конструкции

Е. Р. Потапова

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», Київ

Надійшла до редакції 23.06.97

Будується механічна модель взаємодії акустичного випромінювання з плоскими елементами конструкції. Отримані закономірності згинного руху і визначені особливості динаміки збудженого стану пластин.

Вопросы анализа упругого взаимодействия акустического излучения (в частности, высокого уровня — выше 150 дБ) с элементами конструкции летательных аппаратов приобретают все более важное значение, так как оказалось, что в этом случае в механических системах возникают колебания, закономерности формирования которых до настоящего времени полностью не установлены. Кроме того, в процессе перекачки энергии звукового воздействия в конструкции могут иметь место локальные особенности, структура которых позволяет сделать вывод о возможных нарушениях целостности материала и наступлении акустической усталости. Речь идет о явлении пространственного резонанса (волнового совпадения).

Рассмотрим плоский элемент конструкции. Считаем, что пластина является изотропной по всей площади, энергия изгибного ее движения вследствие воздействия акустической волны давления не передается сопряженным элементам конструкции и поглощение энергии звукового воздействия осуществляется только колеблющейся пластиной. Тогда в качестве расчетной механической модели может быть выбрана плоская пластина неограниченной протяженности, толщина которой не менее чем в 6 раз больше длины волны (Карачун, 1990).

Уравнения ее изгибного движения в форме Ламе имеют вид:

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu) \frac{\partial \xi}{\partial y} + \mu \nabla^2 V &= \rho_c \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}, \\(\lambda + \mu) \frac{\partial \xi}{\partial z} + \mu \nabla^2 W &= \rho_c \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}.\end{aligned}\quad (1)$$

Здесь

$$\xi = \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$V$  и  $W$  — смещения точек поверхности пластины в направлении осей  $y$  и  $z$  (рис. 1);  $\rho_c$  — плотность материала пластины;  $\lambda$  и  $\mu$  — упругие постоянные Ламе, которые выражаются через модуль Юнга и коэффициент Пуассона следующим образом:

$$\begin{aligned}\lambda &= E\sigma[(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)]^{-1}, \\ \mu &= E[2(1 + \sigma)]^{-1}.\end{aligned}$$

Для решения системы уравнений (1) положим

$$\begin{aligned}V &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial z}, \\ W &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial y}.\end{aligned}\quad (2)$$

После подстановки (2) в уравнения (1) последние распадаются на два независимых уравнения относительно функций  $\varphi$  и  $\psi$ :

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi &= c_1^{-2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \\ \nabla^2 \psi &= c_2^{-2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $c_1 = [\rho_c^{-1}(\lambda + 2\mu)]^{1/2}$  — скорость продольных волн;  $c_2 = [\rho_c^{-1}\mu]^{1/2}$  — скорость поперечных волн.

Решение уравнений (3) ищем в виде

$$\begin{aligned} \varphi(y, z, t) &= f_1(z) \exp i(\omega t - k_0 y \sin \theta), \\ \psi(y, z, t) &= f_2(z) \exp i(\omega t - k_0 y \sin \theta). \end{aligned}$$

Подставив значения  $\varphi$  и  $\psi$  в (3), после интегрирования находим их значения и с помощью (2) определяем смещения  $V$  и  $W$ :

$$\begin{aligned} V &= - [(c_1 \exp \alpha_1 z + c_2 \exp(-\alpha_1 z)) i k_0 \sin \theta + \\ &+ \alpha_2 (c_3 \exp \alpha_2 z - c_4 \exp(-\alpha_2 z))] \exp i(\omega t - k_0 y \sin \theta), \\ W &= [(c_1 \exp \alpha_1 z - c_2 \exp(-\alpha_1 z)) \alpha_1 - \\ &- (c_3 \exp \alpha_2 z + c_4 \exp(-\alpha_2 z)) i k_0 \sin \theta] \times \\ &\times \exp i(\omega t - k_0 y \sin \theta). \end{aligned}$$

Для определения величин нормального и касательного напряжений получаем зависимости

$$\begin{aligned} z_z &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial W}{\partial z} + \lambda \frac{\partial V}{\partial y} = \\ &= \{ [c_1 \exp \alpha_1 z + c_2 \exp(-\alpha_1 z)] a_1 - \\ &- [c_3 \exp \alpha_2 z - c_4 \exp(-\alpha_2 z)] a_2 \} \times \\ &\times \exp i(\omega t - k_0 y \sin \theta); \\ z_y &= \mu \left( \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) = \\ &= - \{ [c_1 \exp \alpha_1 z - c_2 \exp(-\alpha_1 z)] a_3 + \\ &+ [c_3 \exp \alpha_2 z + c_4 \exp(-\alpha_2 z)] a_4 \} \times \\ &\times \exp i(\omega t - k_0 y \sin \theta), \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= (\lambda + 2\mu) \alpha_1^2 - \lambda k_0^2 \sin^2 \theta, \\ a_2 &= 2\mu \alpha_2 k_0 \sin \theta, \\ a_3 &= 2\mu \alpha_1 k_0 \sin \theta, \\ a_4 &= (\alpha_2^2 + k_0^2 \sin^2 \theta) \mu. \end{aligned}$$

Звуковое давление на лицевой и теневой сторонах пластины определяем формулами (рис. 1)

$$(P_1 + P_2) \Big|_{z=-\delta} = (P_{10} + P_{20}) \exp i(\omega t - k_0 y \sin \theta),$$

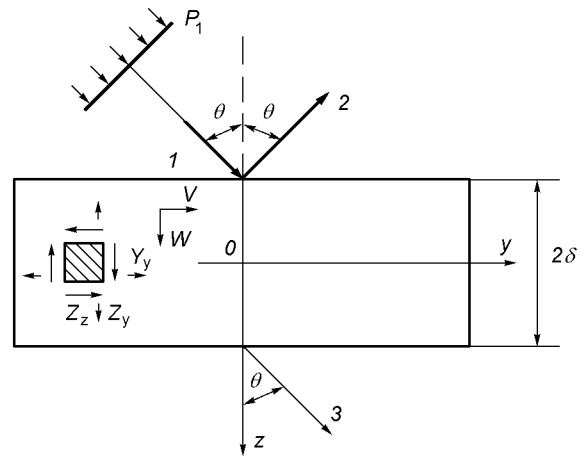


Рис. 1. Прохождение звуковой волны через пластину

$$P_3 \Big|_{z=\delta} = P_{30} \exp i(\omega t - k_0 y \sin \theta).$$

Здесь

$$\begin{aligned} P_1 &= P_{10} \exp i\{\omega t - k_0 [(z + \delta) \cos \theta + y \sin \theta]\}, \\ P_2 &= P_{20} \exp i\{\omega t - k_0 [-(z + \delta) \cos \theta + y \sin \theta]\}, \\ P_3 &= P_{30} \exp i\{\omega t - k_0 [(z - \delta) \cos \theta + y \sin \theta]\}, \end{aligned}$$

где  $P_{10}$ ,  $P_{20}$  и  $P_{30}$  — амплитуда давления в падающей, отраженной и прошедшей волне соответственно.

Представим величины этих давлений в виде суммы симметричной и антисимметричной составляющих (рис. 2):

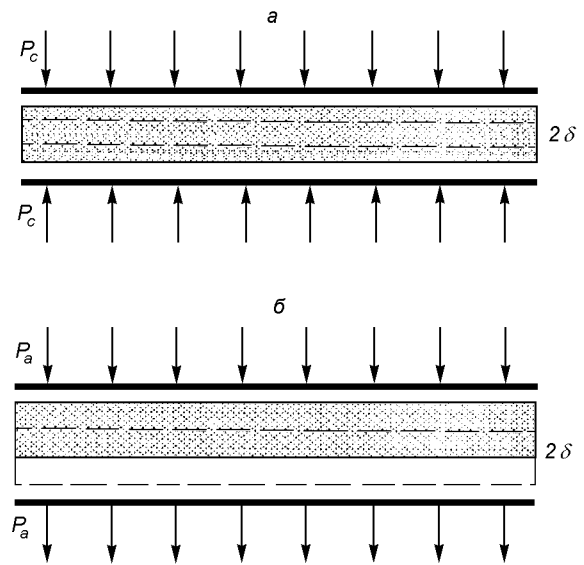


Рис. 2. Симметричная  $P_c$  и антисимметричная  $P_a$  составляющие звукового давления, действующие на пластину

$$P_c = \frac{1}{2} (P_{10} + P_{20} + P_{30}) \exp i(\omega t - k_0 y \sin \theta),$$

$$P_a = \frac{1}{2} (P_{10} + P_{20} - P_{30}) \exp i(\omega t - k_0 y \sin \theta)$$

и установим влияние каждой из них на изгибные колебания пластины.

При действии симметричной составляющей звукового давления граничные условия имеют вид:

$$Z_z \Big|_{z=\pm\delta} = -P_c, \quad Z_y \Big|_{z=\pm\delta} = 0. \quad (5)$$

С помощью четырех уравнений (5) находим произвольные постоянные интегрирования  $C_1$  уравнений (4). Подставив их значения в выражения для определения поперечного смещения  $W$ , получим закон изгибных колебаний пластины при действии симметричной составляющей звукового давления:

$$W_c \Big|_{z=\pm\delta} = \mp P_c k_2 \left\{ \omega^{-2} \delta^{-1} \rho_c^{-1} [4\gamma(\gamma-1)^{1/2} \times \right. \\ \times \operatorname{cth} k_2(\gamma-1)^{1/2} - (2\gamma-1)^2(\gamma-d^2)^{1/2} \times \\ \left. \times \operatorname{cth} k_2(\gamma-d^2)^{1/2}]^{-1} \right\}, \quad (6)$$

где

$$\gamma = \left( \frac{c_2}{c} \sin \theta \right)^2, \quad k_2 = \frac{\omega \delta}{c_2},$$

$$d^2 = \left( \frac{c_2}{c_1} \right)^2 = \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)},$$

$c$  — скорость звука в воздухе.

Если на пластину действует антисимметричная составляющая давления, то граничные условия имеют вид

$$Z_z \Big|_{z=-\delta} = -P_a, \quad Z_z \Big|_{z=\delta} = P_a, \\ Z_y \Big|_{z=-\delta} = 0, \quad Z_y \Big|_{z=\delta} = 0,$$

а величина смещения определяется формулой

$$W_a \Big|_{z=\pm\delta} = k_2 P_a \left\{ \omega^2 \delta \rho_c [4\gamma(\gamma-1)^{1/2} \times \right. \\ \times \operatorname{th} k_2(\gamma-1)^{1/2} - (2\gamma-1)^2(\gamma-d^2)^{1/2} \times \\ \left. \times \operatorname{th} k_2(\gamma-d^2)^{1/2}]^{-1} \right\}, \quad (7)$$

При выполнении ограничений

$$|k_2[\gamma-1]^{1/2}| \leq 0.9, \quad |k_2[\gamma-d^2]^{1/2}| \leq 0.9,$$

соответствующих сохранению только двух первых членов разложения в ряд тангенсов, выражения (6) и (7) принимают вид

$$W_c \Big|_{z=\pm\delta} = \mp \frac{P_c}{\omega^2 \delta \rho_c} \cdot \frac{k_2^2(\gamma-d^2)}{4\gamma(1-d^2)-1} =$$

$$= \mp P_c \delta \frac{1-\sigma^2}{E} \cdot \frac{\left( \frac{c_n}{c} \sin \theta \right)^2 - \frac{1-2\sigma}{(1-\sigma)^2}}{\left( \frac{c_n}{c} \sin \theta \right)^2 - 1}, \quad (8)$$

$$W_a = \frac{P_a}{\omega^2 \delta \rho_c} \frac{1}{\frac{4}{3} \gamma(\gamma-1) k_2^2 (1-d^2) - 1}, \quad (9)$$

где

$$c_n = \left[ \frac{E}{\rho_c(1-\sigma^2)} \right]^{1/2}$$

— скорость продольных волн в пластине. Формула (8) совпадает с законом изгибных колебаний пластины при симметричном давлении, полученным Л. М. Лямшевым.

Если  $\gamma \ll 1$ , то весь первый член в знаменателе становится малым по сравнению с единицей, и формула (9) приобретает вид

$$W_a = \frac{P_a}{\omega^2 \delta \rho_c} \frac{1}{\frac{4}{3} \gamma(\gamma-1) k_2^2 (1-d^2) - 1} = \\ = \frac{2P_a}{\omega^2 m_n} \frac{1}{\frac{D\omega^2}{m_n c^4} \sin^4 \theta - 1}, \quad (10)$$

что является известным законом изгибных колебаний тонкой пластины. Здесь

$$D = \frac{2}{3} \frac{E\delta^3}{1-\sigma^2}$$

— цилиндрическая жесткость пластины при изгибе;  $m_n = 2\delta\rho_c$  — масса единицы площади пластины. Следовательно, колебания пластины, на которую падает под углом  $\theta$  плоская звуковая волна, могут быть описаны уравнениями движения тонких пластин, если длина следа падающей волны при  $\gamma \gg 1$  или длина поперечной волны при  $\gamma \ll 1$  составляет не менее 3.5–6 толщин слоя.

Сравнение динамических и статических модулей упругости стали показало, что ее динамическая жесткость не отличается от статической. Это не относится к мягким материалам, где нужно учитывать изменение динамических параметров.

Используя выражения (8) и (9), можно получить закон движения любого слоя пластины. Неудобство полученных формул состоит в том, что перемещение пластины является функцией симметричной и антисимметричной составляющей давления, а не амплитуды давления падающей волны  $P_{10}$ .

От этого недостатка легко избавиться, воспользовавшись понятием коэффициента  $A$  прохождения

звука и коэффициента  $B$  отражения звука. Первый определяется как отношение амплитуды давления в прошедшей  $P_{30}$  и падающей  $P_{10}$  волнах, а второй — как отношение амплитуды давления в отраженной  $P_{20}$  и падающей  $P_{10}$  волнах, т. е.  $A = P_{30}/P_{10}$ ,  $B = P_{20}/P_{10}$ . Будем далее искать величины этих коэффициентов. Из схемы прохождения звука очевидно, что общая скорость смещения поверхностей пластины под действием как симметричной, так и антисимметричной составляющих звукового давления равна сумме симметричной и антисимметричной скоростей на лицевой стороне пластины и их разности на теневой стороне:

$$\frac{\partial W}{\partial t} \Big|_{z=-\delta} = \frac{iP_c}{\omega\delta\rho_c} \cdot \frac{1}{z_c^{(1)} + iz_c^{(2)}} + \frac{iP_a}{\omega\delta\rho_c} \cdot \frac{1}{z_a^{(1)} + iz_a^{(2)}}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} \Big|_{z=\delta} = \frac{iP_a}{\omega\delta\rho_c} \cdot \frac{1}{z_a^{(1)} + iz_a^{(2)}} - \frac{iP_c}{\omega\delta\rho_c} \cdot \frac{1}{z_c^{(1)} + iz_c^{(2)}}. \quad (12)$$

Из условия сплошности на границе двух сред можно сделать вывод о равенстве колебательной скорости пластины и нормальной составляющей скорости звуковой волны. Тогда граничные условия по поверхности пластины можно записать так:

$$\frac{\partial W}{\partial t} \Big|_{z=-\delta} = \frac{P_1 - P_2}{z_0} \cos\theta, \quad (13)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} \Big|_{z=\delta} = \frac{P_3}{z_0} \cos\theta,$$

где  $z_0 = \rho_0 c$  — удельное акустическое сопротивление воздуха;  $\rho_0$  — плотность воздуха;  $V = P/z_0$  — соотношение между колебательной скоростью  $V$  и давлением  $P$  для плоской волны в воздухе. Исключив из системы уравнений (11)—(13)  $P$  и  $\partial W/\partial t$ , найдем коэффициент прохождения  $A$  и коэффициент отражения  $B$  звука:  $A = A_1/N$ ,  $B = B_1/N$ .

$$N = \left(1 + \frac{z_c^{(2)}}{\Delta_c}\right) \left(1 + \frac{z_a^{(2)}}{\Delta_c}\right) - \frac{z_c^{(1)} z_a^{(1)}}{\Delta_c^2} - i \left[ \left(1 + \frac{z_c^{(2)}}{\Delta_c}\right) \frac{z_a^{(1)}}{\Delta_c} + \left(1 + \frac{z_a^{(2)}}{\Delta_c}\right) \frac{z_c^{(1)}}{\Delta_c} \right], \quad (14)$$

$$A_1 = \frac{z_c^{(2)}}{\Delta_c} - \frac{z_a^{(2)}}{\Delta_c} - i \left( \frac{z_a^{(1)}}{\Delta_c} - \frac{z_c^{(1)}}{\Delta_c} \right),$$

$$B_1 = 1 + \frac{z_a^{(1)} z_c^{(1)}}{\Delta_c^2} - \frac{z_a^{(2)} z_c^{(2)}}{\Delta_c^2} + i \left( \frac{z_a^{(1)} z_c^{(2)}}{\Delta_c^2} + \frac{z_a^{(2)} z_c^{(1)}}{\Delta_c^2} \right),$$

где

$$\Delta_c = \frac{z_0}{\omega\delta\rho_c \cos\theta}.$$

С учетом (14) закон изгибных колебаний пластины выглядит следующим образом:

$$W = \frac{1}{2} \frac{(P_{10} + P_{20} - P_{30})}{\omega^2 m_n} \cdot \frac{1}{\frac{D\omega^2}{m_n c^4} \sin^4\theta} \times \exp i(\omega t - k_0 y \sin\theta) + \frac{1}{2} \frac{(P_{10} + P_{20} + P_{30})}{E} \times \left( \frac{c_n}{c} \sin\theta \right)^2 - \frac{1 - 2\sigma}{(1 - \sigma)^2} \exp i(\omega t - k_0 y \sin\theta) = P_{10} \exp i(\omega t - k_0 y \sin\theta) [(1 + B - A)\mu_1 + (1 + B + A)\mu_2] = \frac{P_{10}}{\rho} \exp i(\omega t - k_0 y \sin\theta - \varphi) \times [\rho_1 \mu_1 \exp i\varphi_1 + \rho_2 \mu_2 \exp i\varphi_2], \quad (15)$$

где

$$\rho = \left\{ \left[ \left( \frac{z_a^{(1)}}{\Delta_c} \right)^2 + \left( 1 + \frac{z_a^{(2)}}{\Delta_c} \right)^2 \right] \times \left[ \left( \frac{z_c^{(1)}}{\Delta_c} \right)^2 + \left( 1 + \frac{z_c^{(2)}}{\Delta_c} \right)^2 \right] \right\}^{1/2},$$

$$\rho_1 = \left[ \left( 1 + \frac{z_a^{(2)}}{2\Delta_c} \right)^2 + \left( \frac{z_a^{(1)}}{\Delta_c} \right)^2 \right]^{1/2},$$

$$\rho_2 = \left[ \left( 1 + \frac{z_c^{(2)}}{2\Delta_c} \right)^2 + \left( \frac{z_c^{(1)}}{\Delta_c} \right)^2 \right]^{1/2},$$

$$\varphi_1 = \arctg \left[ - \frac{z_a^{(1)}}{\Delta_c} \left( 1 + \frac{z_a^{(2)}}{2\Delta_c} \right)^{-1} \right],$$

$$\varphi_2 = \arctg \left[ - \frac{z_c^{(1)}}{\Delta_c} \left( 1 + \frac{z_c^{(2)}}{2\Delta_c} \right)^{-1} \right],$$

$$\varphi = \arctg \left[ \frac{z_a^{(1)}}{\Delta_c} \left( 1 + \frac{z_c^{(2)}}{2\Delta_c} \right) + \frac{z_c^{(1)}}{\Delta_c} \left( 1 + \frac{z_a^{(2)}}{2\Delta_c} \right) \right] \times \left[ \frac{z_a^{(1)} z_c^{(1)}}{\Delta_c^2} - \left( 1 + \frac{z_c^{(2)}}{\Delta_c} \right) \left( 1 + \frac{z_a^{(2)}}{\Delta_c} \right) \right]^{-1},$$

$$\mu_1 = [\omega^2 m_n (D\omega^2 m_n^{-1} c^{-4} \sin^4\theta - 1)]^{-1},$$

$$\mu_2 = E^{-1} \delta (1 - \sigma^2) [(c_n c^{-1} \sin\theta)^2 - (1 - 2\sigma)(1 - \sigma)^{-2}] [(c_n c^{-1} \sin\theta)^2 - 1]^{-1};$$

$z_a^i, z_c^i$  — импеданс (отношение давления к скорости смещения поверхности пластины) для симметричной и антисимметричной составляющих звукового воздействия.

Как показывает численный анализ амплитуды изгибных колебаний пластины, то величина ее, вообще говоря, уменьшается по экспоненциальному закону  $\exp(-\gamma\omega)$  с увеличением частоты  $\omega$  падающей волны, но увеличивается по абсолютной величине с увеличением угла  $\theta$  (рис. 3), что объясняется усилением влияния антисимметричной составляющей звукового давления, приводящей к раскачке пластины

На частотах  $\omega_b$  наблюдается «всплеск» графиков, а для углов  $\theta \geq 0.393$  ( $22.5^\circ$ ) этому «всплеску» предшествует резкое уменьшение амплитуды  $a_b^H$  на частотах  $\omega_b^H$ , которое сопровождается изменением фазы колебаний на  $\pi$  рад.

На практике редко приходится встречаться с акустическим воздействием в виде одной волны, падающей под углом  $\theta$  на пластину. Поэтому логично рассмотреть случай диффузного падения звуковой волны давления. Речь идет о равновероятном переносе звуковой энергии по углу  $\theta$  в пределах от 0 до  $\pi/2$ .

Таким образом, при диффузном падении звуковой волны изгибные колебания пластины будут суммироваться для всех значений углов  $\theta$ . Чтобы получить закон одномерных изгибных колебаний, достаточно провести усреднение согласно Пэрису изгибных колебаний пластины для всех  $\theta$ , т. е.

$$W_{\text{dif}} = 2 \int_0^{7.5 \frac{\pi}{16}} W \cos\theta \sin\theta d\theta =$$

$$= 2P_{10} \int_0^{7.5 \frac{\pi}{16}} \rho^{-1} \exp i(\omega t - k_0 y \sin\theta) \times$$

$$\times [\rho_1 \mu_1 \exp i\varphi_1 + \rho_2 \mu_2 \exp i\varphi_2] \cos\theta \sin\theta d\theta. \quad (16)$$

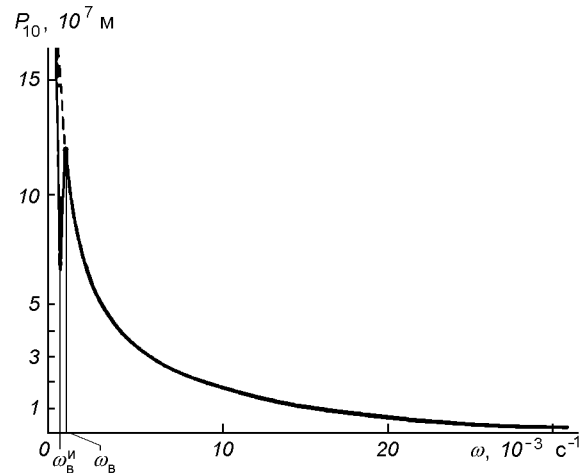


Рис. 4. Изменение амплитуды изгибной волны пластины в диффузном поле

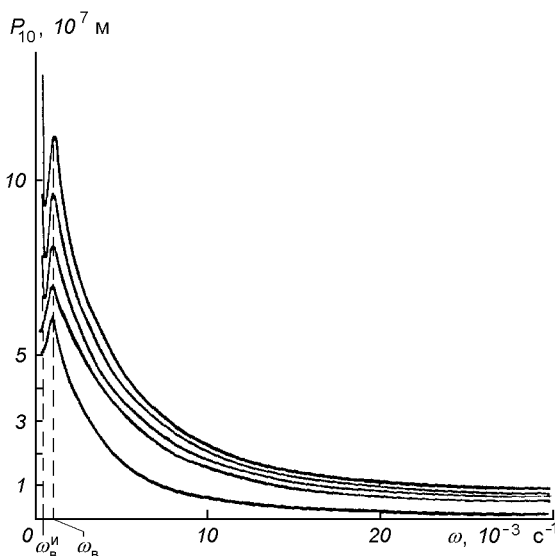


Рис. 3. Амплитуда изгибной волны пластины при акустическом нагружении: 1 — при  $\theta = 0.196$ , 2 —  $0.393$ , 3 —  $0.589$ , 4 —  $0.785$ , 5 —  $0.981$ , 6 —  $1.177$ , 7 —  $1.373$ , 8 —  $1.568$  рад

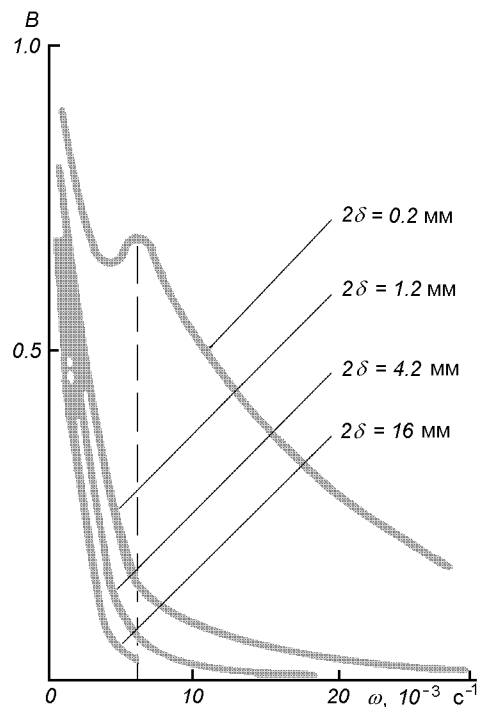


Рис. 5. Влияние толщины пластины на величину коэффициента отражения звука

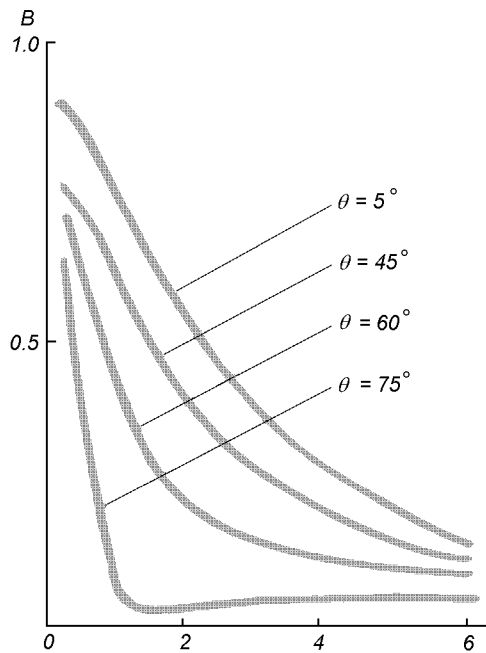


Рис. 6. Влияние угла падения звуковой волны на величину коэффициента отражения звука

Анализ этого выражения при тех же исходных данных, что и для одной волны, показывает, что амплитуды изгибных колебаний с увеличением частоты  $\omega$  падающих звуковых волн также уменьшаются по экспоненциальному закону (рис. 4). На частоте  $\omega_b^H = 0.4 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$  происходит изменение

фазы колебаний на  $\pi$  рад с резким уменьшением амплитуды колебаний до  $a_b^H = 6.6 \cdot 10^{-7} P_{10}$ . На частоте  $\omega_b = 0.8 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$  так же, как и в предыдущем случае, наблюдается «всплеск» на графике, амплитуда которого равна  $a_b = 11.9 \cdot 10^{-7} P_{10}$  и далее амплитуда монотонно уменьшается.

Влияние толщины пластины на коэффициент прохождения звука представлено на рис. 5.

С уменьшением толщины пластины коэффициент прохождения звука с увеличением частоты  $\omega$  уменьшается более медленно, одновременно величина коэффициента  $B$  увеличивается. При толщине пластины 0.2 мм даже имеет место резонансный всплеск.

Угол падения волны  $\theta$  также оказывает влияние на коэффициент  $B$ . С увеличением угла падения коэффициент отражения звука уменьшается (рис. 6).

Карачун В. В. Об особенностях акустического нагружения пластин конечных размеров // Пробл. прочности.—1990.— № 10.—С. 93—96.

#### ON A MECHANISM OF INTERACTION OF ACOUSTIC EMISSION WITH FLAT CONSTRUCTION ELEMENTS

E. R. Potapova

A mechanic analog of interaction of acoustic emission with flat construction elements is built. Characteristics of bending oscillation motion of a plate and its excitation state dynamics are studied.