Космічна наука і технологія. 1997. Т 3. № 5/6. С. 92—97.

УДК 629.07.54

Двумерная задача упругого взаимодействия акустического излучения маршевых двигателей с плоскими элементами конструкции КА

В. В. Карачун

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», Київ

Надійшла до редакції 06.03.97

Визначаються закономірності згинного руху пласкої перешкоди під дією акустичного випромінювання з боку маршових двигунів носіїв.

Установлено, что акустическое излучение со стороны маршевых двигателей носителей оказывает существенное влияние на механические системы конструкции КА, а также на комплектующие элементы, в том числе на бортовую аппаратуру. Это относится, в первую очередь, к режиму старта носителя. Наиболее чувствительными к акустическому воздействию являются плоские элементы, имеющие малую жесткость в поперечном направлении (Карачун, 1993). Генерируемые в них изгибные колебания в некоторых случаях могут преобретать недопустимо большие амплитуды. Это может иметь место, например, при волновом совпадении (пространственном резонансе), пространственно-частотном и неполном пространственно-частотном резонансах. Поэтому представляет научный и практический интерес изучение закономерностей формирования волновых процессов в плоских элементах конструкции космических аппаратов под воздействием акустического излучения с целью дальнейшего учета их влияния на динамику механических систем конструкции КА.

Звуковое поле, в котором находится пластина, примем диффузным, т. е. таким, когда распространение звуковой волны по отношению к нормали ее лицевой поверхности является равновероятным. Длину генерируемой изгибной волны ограничим не менее чем шестикратным превышением толщины, что позволит воспользоваться для описания рассматриваемого явления уравнениями движения тонких пластин.

Пусть a и b — длина и ширина пластины. Ее толщина 2δ постоянна по всей площади и значительно меньше двух других геометрических размеров: $2\delta \ll a, b$. Материал пластины предполагается абсолютно упругим, однородным и изотропным (Карачун, Дидковский, 1992).

С учетом малости прогибов W_i пластины при акустическом нагружении по сравнению с ее толщиной боковые грани заштрихованного элемента площади длины dy и ширины dx, выделенного на расстоянии z от средней плоскости xOy, можно предполагать параллельными плоскостям xOz и yOz и перпендикулярными к срединной плоскости пластины во все время движения (рис. 1).

Какой бы функцией координат x и y ни был прогиб W пластины, его всегда можно представить в прямоугольной области двойным рядом по нормальным функциям, т. е.

$$W(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}, \tag{1}$$

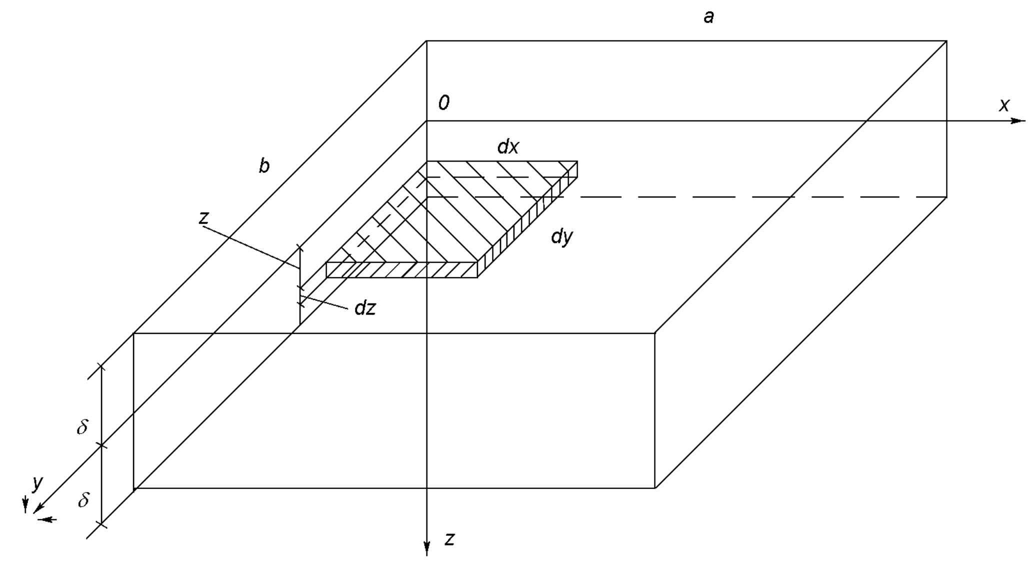

Рис. 1. Схема пространственного нагружения пластины: dx, dy, dz — размеры элементарного объема

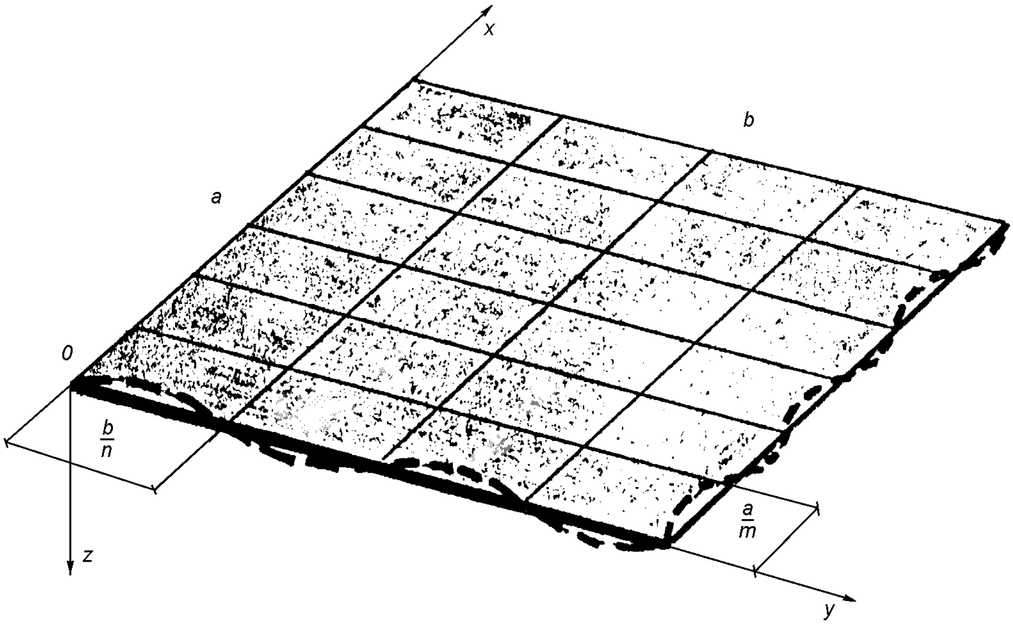

Рис. 2. Распределение прогибов пластины при звуковом воздействии

где m, n = 1, 2, ... — числа полуволн изгиба соответственно вдоль осей x и y (рис. 2); $W(x, y)$ — смещение точки пластины с координатами x, y в направлении оси z; $W_{mn} = W_{mn}(t)$.

Очевидно, что каждый член ряда (1) удовлетворяет граничным условиям вида

$$[W]_{x=0;a} = \left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right]_{x=0;a} = 0;$$
$$[W]_{y=0;b} = \left[\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right]_{y=0;b} = 0. \quad (2)$$

Значение максимальной потенциальной энергии Π_0, накопленной при изгибной деформации пластины, можно определить интегрированием по двум измерениям величины максимальной потенциальной энергии $d\Pi_0$ элементарного участка пластины (рис. 1). Тогда с учетом (1) получим

$$\Pi_0 = \frac{D}{2}\int_0^a\int_0^b \left[\left(\frac{\partial^2 W(x,y)}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 W(x,y)}{\partial y^2}\right)^2 + \right.$$

$$+ 2\sigma\frac{\partial^2 W(x,y)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W(x,y)}{\partial y^2} +$$

$$\left. + 2(1-\sigma)\left(\frac{\partial^2 W(x,y)}{\partial x \partial y}\right)^2\right]dxdy, \tag{3}$$

где $D = E(2\delta)^3[12(1-\sigma)]^{-1}$ — цилиндрическая жесткость пластины; E — модуль упругости; σ — коэффициент Пуассона.

Величину максимальной кинетической энергии T_0 поперечных колебаний пластины можно определить по формуле

$$T_0 = 2^{-1}\mu\omega^2\int_0^a\int_0^b W^2(x,y)dxdy, \tag{4}$$

где μ — масса единицы площади пластины; ω — круговая частота.

Используя принцип виртуальных перемещений, можно получить дифференциальное уравнение движения пластины в главных координатах при свободных колебаниях (Карачун, Дидковский, 1992):

$$\mu\ddot{W}_{mn} + D\pi^4(m^2a^{-2} + n^2b^{-2})^2W_{mn} = 0, \tag{5}$$

где

$$\pi^2(\mu^{-1}D)^{1/2}(m^2a^{-2} + n^2b^{-2})^2 = \omega_{mn}$$

— собственная частота колебаний;

$$\delta W = \delta W_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

— виртуальное перемещение.

Аналогично рассуждая, можно получить уравнения возмущенного движения

$$\mu\ddot{W}_{mn} + D\pi^4(m^2a^{-2} + n^2b^{-2})^2W_{mn} = Q_{m_1n_1}, \tag{6}$$

где $Q_{m_1n_1}$ — обобщенная сила, имеющая тот физический смысл, чтобы произведение $Q_{m_1n_1}\delta W_{mn}$ представляло собой виртуальную работу звуковой волны давления $P(x, y)$, которую для удобства также представим в виде (1):

$$P(x,y) = \sum_{m_1=0}^{\infty}\sum_{n_1=0}^{\infty}P_{m_1n_1}\sin\frac{m_1\pi x}{a}\sin\frac{n_1\pi y}{b}, \tag{7}$$

где m_1, n_1 — числа полуволн акустического излучения, приходящиеся на длину и ширину пластины соответственно; $P_{m_1n_1}$ — амплитуда звукового давления соответствующей формы.

Таким образом, если на пластину падает звуковая волна $P_1(x, y, t)$, то виртуальная работа вычисляется по формуле

$$\delta A = \int_0^a\int_0^b P_1(x,y,t)\delta W_{mn}\sin\frac{m_1\pi x}{a}\sin\frac{n_1\pi y}{b}dxdy. \tag{8}$$

Здесь t — время.

Пусть на пластину под углом θ падает плоская звуковая волна (рис. 3) вида

$$P_1(x,y,t) =$$

$$= P_{10}\exp i\left\{\omega t - k[x\sin\theta - (y-\delta)\cos\theta] + \frac{\pi}{2}\right\}, \tag{9}$$

где P_{10} — амплитуда давления в падающей волне; k — волновое число; θ — угол падения волны.

Тогда

$$\delta A = \int_0^a\int_0^b P_1(x,y,t)\sin\frac{m_1\pi x}{a}\sin\frac{n_1\pi y}{b}dxdy\delta W_{mn},$$

а обобщенная сила $Q_{m_1n_1}$ определяется выражением

$$Q_{m_1n_1} = \int_0^a\int_0^b P_1(x,y,t)\sin\frac{m_1\pi x}{a}\sin\frac{n_1\pi y}{b}dxdy =$$

$$= P_{10}\exp i\left(\omega t - k\delta\cos\theta + \frac{\pi}{2}\right)\exp ik(b\cos\theta - a\sin\theta)\times$$

$$\times[S_1m_1a^{-1}\pi\exp i(ka\sin\theta) -$$

$$- S_2n_1b^{-1}\pi\exp i(kb\cos\theta) - S_1S_2]\times$$

$$\times[(k\cos\theta)^2 + (n_1\pi b^{-1})^2][(k\sin\theta)^2 + (m_1\pi a^{-1})^2], \tag{10}$$

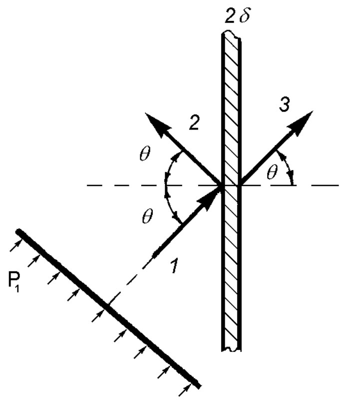

Рис. 3. Схема прохождения звукового излучения через плоскую преграду. *1*, *2*, *3* — соответственно падающая, отраженная и прошедшая волны

где

$$S_1 = k\cos\theta\sin n_1\pi - n_1\pi b^{-1}\cos n_1\pi;$$

$$S_2 = k\sin\theta\sin m_1\pi + m_1\pi a^{-1}\cos m_1\pi.$$

Если $0 < (m_1, n_1) \ll 1$, что соответствует случаю равномерно распределенной нагрузки, то формула (10) преобразуется к виду

$$Q_{m_1n_1} = P_{10}ab(m_1n_1)^{-1}(1 - \cos m_1\pi)(1 - \cos n_1\pi). \quad (11)$$

Очевидно, что для четных значений величин m_1 и n_1, $Q_{m_1n_1} = 0$, а для нечетных —

$$Q_{m_1n_1} = 4P_{10}ab(\pi^2 m_1n_1)^{-1}. \quad (12)$$

Если, например, в геометрическом центре пластины приложена сосредоточенная гармонически изменяющаяся во времени сила $P_1(t) = P_{10}\cos\omega t$, то выражение (10) изменится:

$$Q_{m_1n_1} = P_{10}\cos\omega t \sin\frac{m_1\pi}{2}\sin\frac{n_1\pi}{2}.$$

Вычислив теперь максимальную работу A_0, выполняемую падающей звуковой волной,

$$A_0 = \int_0^a\int_0^b P_1(x, y)W(x, y)dxdy, \quad (13)$$

можно установить закон изгибных колебаний пластины из условия экстремальных свойств ее при прогибе:

$$\frac{\partial}{\partial W_{mn}}(T_0 - \Pi_0 + A_0) = 0. \quad (14)$$

В том случае, когда возникает необходимость учета диссипации энергии, обусловленной внутренним трением, достаточно учесть в формуле (14) работу и этих сил, т. е.

$$R_0 = \frac{\chi}{2}\int_0^a\int_0^b W^2(x, y)dxdy = \frac{\omega_{mn}^2\mu\eta ab}{8}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}W_{mn}^2, \quad (15)$$

где $\chi = \mu\eta\omega_{mn}^2$ — коэффициент внутреннего трения; η — коэффициент потерь.

Условие (14) экстремальности в этом случае преобразуется к виду

$$\frac{\partial}{\partial W_{mn}}(T_0 - \Pi_0 + A_0 - R_0) = 0. \quad (16)$$

ПРОСТРАНСТВЕННО-ЧАСТОТНЫЙ РЕЗОНАНС

Пусть $m_1 = m$ и $n_1 = n$, что соответствует совпадению чисел полуволн акустического излучения и генерируемой в пластине вибрации по двум направлениям — вдоль оси x ($m_1 = m$) и вдоль оси y ($n_1 = n$). Тогда после подстановки выражений (1) и (9) в формулы (3), (4) и (13) имеем

$$\Pi_0 = \frac{Dab\pi^4}{8}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(m^2a^{-2} + n^2b^{-2})^2W_{mn}^2;$$

$$T_0 = \frac{\omega^2\mu ab}{8}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}W_{mn}^2; \quad (17)$$

$$A_0 = \frac{ab}{4}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}P_{mn}W_{mn}.$$

Из условия экстремальности (14) с учетом (17) получаем для каждой пары индексов m и n

$$W_{mn} = P_{mn}[\mu(\omega_{mn}^2 - \omega^2)]^{-1}, \quad (18)$$

где значения круговой частоты собственных колебаний ω_{mn} определяется приведенной выше формулой. Выражение (18) позволяет вычислить величину прогиба пластины в каждой ее точке на mn-й форме собственных колебаний. Очевидно, что при $\omega = \omega_{mn}$ прогиб неограниченно увеличивается.

Подставляя выражение (10) в (6), определяем закон изгибных колебаний пластины на mn-й форме при непрерывном воздействии звукового излучения в интервале времени $[0, t]$, причем изгибное движение включает в себя как вынужденные, так и собственные перемещения:

$$W(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}W_{mn}(x, y, t)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}P_{10}\rho(t)\{\mu(\omega_{mn}^2 - \omega^2)[(k\cos\theta)^2 + (n\pi b^{-1})^2] \times$$

$$\times [(k\sin\theta)^2 + (m\pi a^{-1})^2]\}^{-1} \times$$

$$\times \exp i\left\{\omega t + k[(b - \delta)\cos\theta - a\sin\theta] + \frac{\pi}{2} + tg\varphi(t)\right\} \times$$

$$\times [S_1m\pi a^{-1}\exp i(ka\sin\theta) - S_2n\pi b^{-1}\exp i(kb\cos\theta) -$$

$$- S_1S_2 + mn\pi^2(ab)^{-1}]\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}, \quad (19)$$

где

$$\rho(t) = [(\cos\omega t - \cos\omega_{mn}t)^2 +$$

$$+ (\sin\omega t - \omega\omega_{mn}^{-1}\sin\omega_{mn}t)^2]^{1/2};$$

$$tg\varphi(t) = (\sin\omega t - \omega\omega_{mn}^{-1}\sin\omega_{mn}t)(\cos\omega t - \cos\omega_{mn}t)^{-1}.$$

В случае равномерно распределенной по площади пластины акустической нагрузки, выражение (19) преобразуется к виду

$$W(x, y, t) = P_{10} 16 g (\mu\pi)^{-1} \times$$
$$\times \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (mn\omega_{mn}^2)^{-1}(1 - \cos\omega_{mn} t) \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}. \quad (20)$$

Таким образом, изгибные колебания пластины могут быть представлены в виде суперпозиции вынужденных изгибных колебаний в пластине неограниченной протяженности и свободных колебаний, возникающих в данной пластине с учетом ее геометрических размеров.

Если импеданс пластины на mn-й форме представить в виде

$$Z_{mn} = P_{mn} V_{mn}^{-1} = i\mu\omega\,[(C_{и} c^{-1} \sin\theta)^4 - (\omega_{mn}\omega^{-1})^2], \quad (21)$$

то очевидно, что даже при выполнении условия волнового совпадения

$$C_{и} = c \sin^{-1}\theta,$$

но при отсутствии равенства частот собственных колебаний ω_{mn} пластины конечных размеров и частот вынужденных колебаний ω неограниченной по протяженности пластины, прогибы будут иметь конечную величину. Акустически прозрачной ($Z_{mn} = 0$) она станет лишь при одновременном выполнении равенств

$$C_{и} = c \sin^{-1}\theta, \qquad \omega = \omega_{mn}. \quad (22)$$

Численный анализ показывает, что максимальный прогиб пластины имеет место на первой (низшей) форме колебаний при $m_1 = m = 1$ и $n_1 = n = 1$ (рис. 4). Высшие формы имеют более сложную структуру движения. Так, например, при $m_1 = m = 1$ и $n_1 = n = 2$ пластина имеет, в отличие от первой формы, уже два разнополярных локальных экстремума (рис. 5), а при $m_1 = m = 1$ и $n_1 = n = 3$ — три экстремума (рис. 6). Чем выше номер формы, тем сложнее изгибное движение пластины.

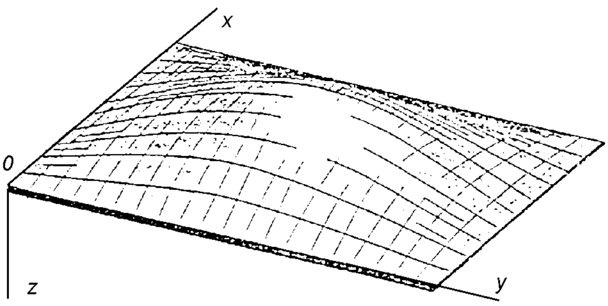

Рис. 4. Прогиб пластины под действием звуковой волны. Первая форма колебаний — $m_1 = m = 1$; $n_1 = n = 1$

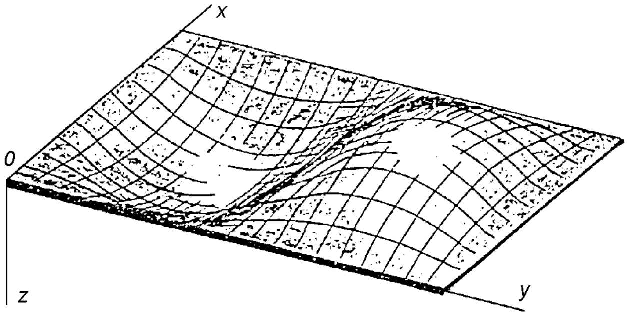

Рис. 5. Прогиб пластины под действием звуковой волны. Вторая форма колебаний — $m_1 = m = 1$; $n_1 = n = 2$

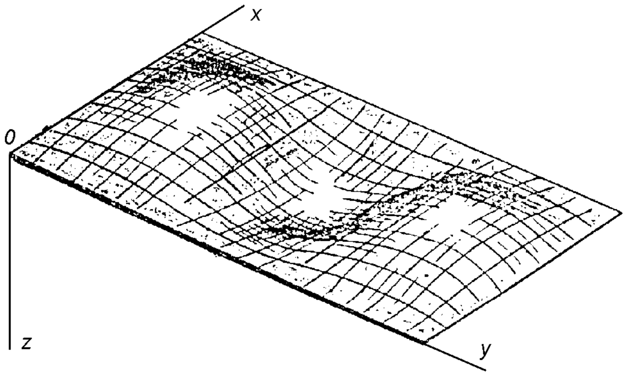

Рис. 6. Прогиб пластины на третьей форме — $m_1 = m = 1$; $n_1 = n = 3$

Число экстремумов определяется произведением mn.

При нечетных n величина прогибов значительно больше, чем при четных значениях. Таким образом, эти формы будут способствовать более интенсивной перекачке звуковой энергии из одного полупространства в другое.

НЕПОЛНЫЙ ПРОСТРАНСТВЕННО-ЧАСТОТНЫЙ РЕЗОНАНС

В отличие от рассмотренного выше, проанализируем особенности динамики пластин в том случае, когда $m_1 = m$, а при $n_1 \neq n$. Это означает, что при этих условиях точно совпадают узловые линии $m_1 n_1$-й и mn-й форм падающей звуковой волны давления и изгибной волны, но только в направлении оси x (если $m_1 \neq m$, а $n_1 = n$, то совпадение линий узлов будет в направлении оси y).

Проводя аналогичные предыдущему вычисления, получаем закон изгибного движения:

$$W(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}(x, y, t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} =$$
$$= P_{10}\rho(t)\{\mu\pi(\omega^2_{mn} - \omega^2)(n^2 - n_1^2) \times$$
$$\times [(k\cos\theta)^2 + (n_1\pi b^{-1})^2]\,[(k\sin\theta)^2 + (m_1\pi a^{-1})^2]\}^{-1} \times$$
$$\times \{[S_1 m_1 \pi a^{-1} \exp i(ka\sin\theta) - S_2 n_1 \pi b^{-1} \exp i(kb\cos\theta) -$$
$$- S_1 S_2] + m_1 n_1 \pi^2 (ab)^{-1}\} \times$$
$$\times \exp i\left\{\omega t + k[(b-\delta)\cos\theta - a\sin\theta] + \frac{\pi}{2} + tg\varphi(t)\right\} \times$$
$$\times 2n \sin n_1\pi \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \qquad (23)$$

Отсюда следует, что при одновременном равенстве $n_1 = n$ и $\omega = \omega_{mn}$ имеет место пространственно-частотный резонанс, приводящий к неограниченному увеличению амплитуды изгибных колебаний. Если выполняется лишь одно из равенств, то проявляется один из резонансов — пространственный ($n_1 = n$) или частотный ($\omega = \omega_{mn}$).

Очевидно, что при $n_1 = 1/2$ и далее для последующих нечетных значений $3/2$, $5/2$, $7/2$, и т. д. величина прогиба максимальна. При $n_1 = 1, 2, \ldots$ изгиб пластины равен нулю и она становится акустически непрозрачной.

Кроме отмеченных особенностей, обращают на себя внимание такие: при $x = a/m$ и $y = b/m$ изгиб пластины равен нулю. Эти уравнения определяют линии узлов.

ЧАСТОТНЫЙ РЕЗОНАНС

Полагая $m_1 \neq m$ и $n_1 \neq n$ полностью исключим возможность совпадения $m_1 n_1$-й формы акустического давления и mn-й формы изгибных колебаний пластины, что соответствует частотному резонансу.

Закон поперечного возмущенного движения пластины имеет вид

$$W(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}(x, y, t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} =$$
$$= P_{10}\rho(t)\{\mu\pi^2(\omega^2_{mn} - \omega^2)(m^2 - m_1^2)(n^2 - n_1^2) \times$$
$$\times [(k\cos\theta)^2 + (n_1\pi b^{-1})^2]\,[(k\sin\theta)^2 + (m_1\pi a^{-1})^2]\}^{-1} \times$$
$$\times \{[S_1 m_1 \pi a^{-1} \exp i(ka\sin\theta) - S_2 n_1 \pi b^{-1} \exp i(kb\cos\theta) -$$
$$- S_1 S_2] + m_1 n_1 \pi^2 (ab)^{-1}\} \times$$
$$\times \exp i\left\{\omega t + k[(b-\delta)\cos\theta - a\sin\theta] + \frac{\pi}{2} + tg\varphi(t)\right\} \times$$
$$\times 4mn \sin m_1\pi \sin n_1\pi \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \qquad (24)$$

Численный анализ показывает, что характер распределения генерируемой в пластине вибрации в пространстве имеет ту же структуру, что и при пространственно-частотном резонансе, однако величины прогибов значительно меньше и с увеличением номера формы имеют тенденцию к уменьшению.

Карачун В. В. О влиянии акустического излучения на плоские элементы конструкции гироскопических приборов // Механика гироскопических систем.—1993.—Вып. 12.—С. 23—29.

Карачун В. В., Дидковский В. С. Методы расчета динамических систем. — Киев: Будiвельник, 1992.—112 с.

TWO-DIMENSIONAL PROBLEM ON THE ELASTIC INTERACTION OF THE ACOUSTIC RADIATION FROM SUSTAINED ENGINES WITH PLATE ELEMENTS OF SPACE VEHICLE CONSTRUCTION

V. V. Karachun

We analyse the bending vibrational motion of a plate element in a space vehicle construction under the action of acoustic radiation from sustained engines.