

УДК 629.7.615

Математическая модель движения космического аппарата с манипулятором

Н. С. Ащепкова, Ю. Д. Шептун

Дніпропетровський державний університет

Надійшла до редакції 06.08.97

Розглядається багатомасова система, що складається з космічного апарата та N -ланкового антропоморфного маніпулятора. Отримана математична модель кутового руху такої системи. Як приклад приведені результати математичного моделювання руху КА з дволанковим маніпулятором.

Рассмотрим движение малогабаритного космического аппарата (КА) с N -звенным антропоморфным манипулятором. Примем, что КА — абсолютно твердый жесткий цилиндр радиуса R , длиной L и равномерно распределенной массой. Манипулятор состоит из кольца, вращающегося вокруг корпуса КА и $N - 1$ абсолютно твердых жестких стержневых звеньев, соединенных ротационными парами пятого класса. Распределение масс манипулятора равномерное, геометрические размеры k -го стержневого звена ($k = 1, \dots, N - 1$): r_k — радиус стержня, l_k — длина стержня. Движение КА с манипулятором рассматривается как движение системы тел вокруг центра масс и движение центра масс в инерциальной системе отсчета. Относительное движение манипулятора состоит из движений звеньев руки манипулятора в плоскости, проходящей через продольную ось $C_{КА}X$ корпуса КА и шарнир Ш (рис. 1), которая вращается вокруг оси $C_{КА}X$.

Основную задачу сформулируем как получение уравнений углового движения КА с манипулятором относительно центра масс системы и уравнений относительного движения манипулятора. Примем следующие допущения:

- масса кольца манипулятора значительно меньше массы руки с нагрузкой;
- масса манипулятора составляет не более 1 % массы КА;

— длина руки манипулятора равна длине корпуса КА,

$$L = \sum_{k=2}^N l_k.$$

УРАВНЕНИЯ УГЛОВОГО ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С МАНИПУЛЯТОРОМ

Из теоремы об изменении кинетического момента получим

$$\frac{d}{dt} \sum_i \rho_i \times m_i V_i + \frac{d}{dt} \sum_j \rho_j \times m_j V_j = M_\Sigma, \quad (1)$$

где ρ_i — радиус-вектор i -й точки КА в инерциальной системе отсчета, $\rho_i = \rho_o + r_i$; ρ_j — радиус-вектор j -й точки манипулятора в инерциальной системе отсчета, $\rho_j = \rho_o + r_j$; ρ_o — радиус-вектор центра масс (точки O) системы КА с манипулятором в инерциальной системе отсчета; r_i — радиус-вектор i -й точки КА относительно центра масс системы; r_j — радиус-вектор j -й точки манипулятора относительно центра масс системы; m_i — масса i -й точки КА; m_j — масса j -й точки манипулятора; $V_i = d\rho_i/dt$ — скорость i -й точки КА в инерциальной системе отсчета; $V_j = d\rho_j/dt$ — скорость j -й точки манипулятора в инерциальной системе отсчета.

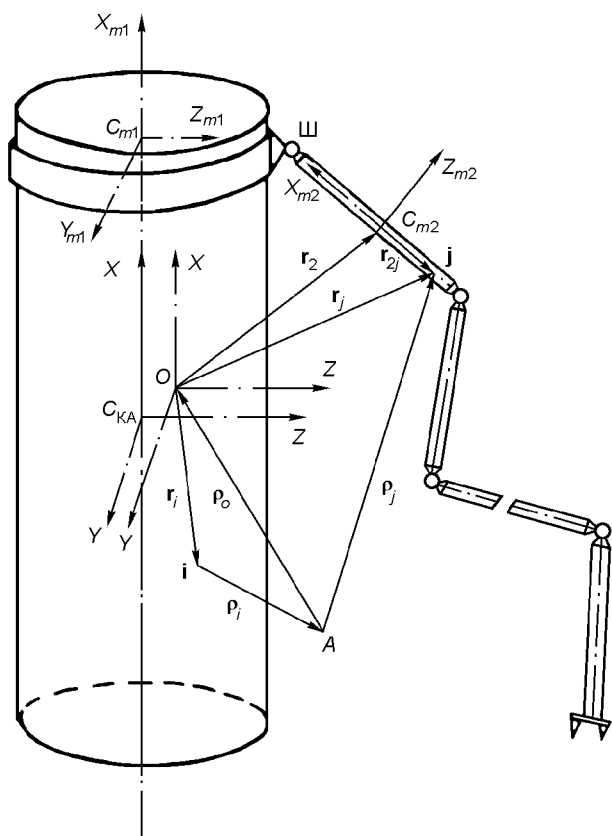


Рис. 1. Космический аппарат с \$N\$-звенным манипулятором

Преобразуем первое слагаемое в формуле (1)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_i \rho_i \times m_i \mathbf{V}_i &= \sum_i \frac{d\rho_i}{dt} \times m_i \mathbf{V}_i + \sum_i \rho_i \times m_i \frac{d\mathbf{V}_i}{dt} = \\ &= \sum_i \rho_i \times m_i \frac{d\mathbf{V}_i}{dt}, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\frac{d\rho_i}{dt} \times m_i \mathbf{V}_i = 0$$

как векторное произведение коллинеарных векторов.

Так как \$\rho_i = \rho_o + r_i\$, то

$$\frac{d\rho_i}{dt} = \frac{d(\rho_o + r_i)}{dt} = \frac{d\rho_o}{dt} + \frac{dr_i}{dt}. \quad (3)$$

Используя понятие локальной производной (Никитин, 1990), запишем:

$$\frac{d}{dt} \rho_o = \frac{\delta\rho_o}{dt} + \Omega \times \rho_o = \Omega \times \rho_o, \quad (4)$$

$$\frac{dr_i}{dt} = \frac{\delta r_i}{dt} + \Omega \times r_i, \quad (5)$$

где \$d/dt\$ — производная, вычисленная в инерциальной системе отсчета; \$\delta/dt\$ — производная, вычисленная в связанной системе координат \$OXYZ\$. Начало отсчета (точка \$O\$) помещена в центр масс системы. Оси системы \$OXYZ\$ параллельны главным центральным осям инерции КА (рис. 1); \$\Omega\$ — вектор угловой скорости движения связанной системы координат относительно инерциальной системы координат.

С учетом (3)–(5) выражение (2) можно преобразовать к виду:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_i \rho_i \times m_i \mathbf{V}_i &= \sum_i (\rho_o + r_i) \times \\ &\times m_i \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta r_i}{dt} \right) + \frac{d\Omega}{dt} \times \rho_o + \Omega \times [\Omega \times \rho_o] + \right. \\ &\left. + \frac{d\Omega}{dt} \times r_i + \Omega \times [\Omega \times r_i] + \frac{dr_i}{dt} \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Преобразуем второе слагаемое в формуле (1):

$$\frac{d}{dt} \sum_j \rho_j \times m_j \mathbf{V}_j = \sum_j \rho_j \times m_j \frac{d\mathbf{V}_j}{dt}. \quad (7)$$

Согласно рис. 1 \$\rho_j = \rho_o + r_j\$ и

$$r_j = \sum_{k=1}^N r_k + r_{kj},$$

где \$k = 1, \dots, N\$ — номер звена манипулятора; \$r_k\$ — радиус-вектор центра масс \$k\$-го звена манипулятора (точки \$C_{mk}\$) относительно центра масс системы (точки \$O\$); \$r_{kj}\$ — радиус-вектор \$j\$-й точки \$k\$-го звена манипулятора относительно центра масс \$k\$-го звена (точки \$C_{mk}\$). Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_j = \frac{d\rho_j}{dt} &= \frac{d(\rho_o + r_j)}{dt} = \frac{d\rho_o}{dt} + \frac{d}{dt} \sum_k (r_k + r_{kj}) = \\ &= \frac{d\rho_o}{dt} + \sum_k \frac{d}{dt} [r_k + r_{kj}]. \end{aligned}$$

Из выражения (7) можно записать:

$$\sum_j \rho_j \times m_j \frac{d\mathbf{V}_j}{dt} = \sum_k (\rho_o + r_k) \times m_k \frac{d\mathbf{V}_k}{dt}, \quad (8)$$

где \$m_k\$ — масса \$k\$-го звена манипулятора; \$\mathbf{V}_k\$ — скорость центра масс \$k\$-го звена манипулятора в инерциальной системе отсчета.

Используя понятие локальной производной (Никитин, 1990), запишем

$$\frac{d\rho_o}{dt} = \frac{\delta\rho_o}{dt} + \Omega \times \rho_o, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} &= \frac{\delta\mathbf{r}_1}{dt} + \Omega \times \mathbf{r}_1 = \frac{\delta_1\mathbf{r}_1}{dt} + \Omega \times \mathbf{r}_1 + \omega_1 \times \mathbf{r}_1 = \\ &= (\Omega + \omega_1) \times \mathbf{r}_1, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} &= \frac{\delta\mathbf{r}_2}{dt} + \Omega \times \mathbf{r}_2 = \frac{\delta_1\mathbf{r}_2}{dt} + \Omega \times \mathbf{r}_2 + \omega_1 \times \mathbf{r}_2 = \\ &= \frac{\delta_2\mathbf{r}_2}{dt} + \omega_2 \times \mathbf{r}_2 + \omega_1 \times \mathbf{r}_2 + \Omega \times \mathbf{r}_2 = \\ &= (\omega_2 + \omega_1 + \Omega) \times \mathbf{r}_2, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}_k}{dt} &= \frac{\delta\mathbf{r}_k}{dt} + \Omega \times \mathbf{r}_k = \frac{\delta_1\mathbf{r}_k}{dt} + \omega_1 \times \mathbf{r}_k + \Omega \times \mathbf{r}_k = \\ &= \frac{\delta_2\mathbf{r}_k}{dt} + \omega_2 \times \mathbf{r}_k + \omega_1 \times \mathbf{r}_k + \Omega \times \mathbf{r}_k = \dots = \\ &= \frac{\delta_k\mathbf{r}_k}{dt} + (\omega_k + \dots + \omega_2 + \omega_1 + \Omega) \times \mathbf{r}_k = \\ &= (\omega_k + \dots + \omega_2 + \omega_1 + \Omega) \times \mathbf{r}_k. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь \mathbf{r}_1 — радиус-вектор центра масс кольца (точка C_{m1}) манипулятора относительно точки O — центра масс системы, \mathbf{r}_2 — радиус-вектор центра масс первого звена руки манипулятора (точка C_{m2}) относительно точки O , \mathbf{r}_k — радиус-вектор центра масс k -го звена руки манипулятора (точка C_{mk}) относительно точки O , δ_1/dt — производная, вычисленная в системе координат $C_{m1}X_{m1}Y_{m1}Z_{m1}$, связанной с кольцом манипулятора.

Точка C_{m1} — центр масс кольца — начало отсчета. Оси $C_{m1}X_{m1}$, $C_{m1}Y_{m1}$, $C_{m1}Z_{m1}$ совпадают с главными центральными осями инерции кольца (рис. 1). Ось $C_{m1}Z_{m1}$ направлена к шарниру Ш, оси $C_{m1}X_{m1}$ и $C_{m1}Y_{m1}$ дополняют систему до правой тройки ортогональных векторов; δ_2/dt — производная, вычисленная в системе координат $C_{m2}X_{m2}Y_{m2}Z_{m2}$, связанной с первым звеном руки манипулятора.

Точка C_{m2} — центр масс первого звена руки — начало отсчета. Оси $C_{m2}X_{m2}$, $C_{m2}Y_{m2}$, $C_{m2}Z_{m2}$ совпадают с главными центральными осями инерции первого звена руки (рис. 1). Ось $C_{m2}X_{m2}$ — продольная ось звена, оси $C_{m2}Y_{m2}$ и $C_{m2}Z_{m2}$ дополняют систему до правой; δ_k/dt — производная, вычисленная в системе координат $C_{mk}X_{mk}Y_{mk}Z_{mk}$, связанной с k -м звеном манипулятора.

Точка C_{mk} — центр масс k -го звена — начало отсчета. Оси $C_{mk}X_{mk}$, $C_{mk}Y_{mk}$, $C_{mk}Z_{mk}$ совпадают с главными центральными осями инерции стержня. Ось $C_{mk}X_{mk}$ — продольная ось стержня, оси $C_{mk}Y_{mk}$ и $C_{mk}Z_{mk}$ дополняют систему до правой; ω_1 — вектор угловой скорости кольца манипулятора относительно системы координат $OXYZ$; ω_2 — вектор

угловой скорости второго звена манипулятора относительно системы координат $C_{m1}X_{m1}Y_{m1}Z_{m1}$; ω_k — вектор угловой скорости k -го звена относительно системы координат $C_{mk-1}X_{mk-1}Y_{mk-1}Z_{mk-1}$.

Подставив выражения (9)—(12) в (8) и обозначив через m_k массу k -го звена руки манипулятора, получим:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \sum_j \rho_j \times m_j \mathbf{V}_j = (\rho_o + \mathbf{r}_1) \times \\ &\quad \times m_1 \frac{d}{dt} \{(\omega_1 + \Omega) \times \mathbf{r}_1 + \Omega \times \rho_o\} + \\ &+ (\rho_o + \mathbf{r}_2) \times m_2 \frac{d}{dt} \{(\omega_2 + \omega_1 + \Omega) \times \mathbf{r}_2 + \Omega \times \rho_o\} + \\ &+ \dots + (\rho_o + \mathbf{r}_k) \times m_k \frac{d}{dt} \{(\omega_k + \dots + \omega_2 + \omega_1 + \\ &\quad + \Omega) \times \mathbf{r}_k + \Omega \times \rho_o\} = (\rho_o + \mathbf{r}_1) \times \\ &\quad \times m_1 \left\{ \frac{d(\omega_1 + \Omega)}{dt} \times \mathbf{r}_1 + (\omega_1 + \Omega) \times \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{d\Omega}{dt} \times \rho_o + \Omega \times \frac{d\rho_o}{dt} \right\} + (\rho_o + \mathbf{r}_2) \times \\ &\quad \times m_2 \left\{ \frac{d}{dt} (\omega_2 + \omega_1 + \Omega) \times \mathbf{r}_2 + (\omega_2 + \omega_1 + \Omega) \times \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{d\Omega}{dt} \times \rho_o + \Omega \times \frac{d\rho_o}{dt} \right\} + \dots + (\rho_o + \mathbf{r}_k) \times \\ &\quad \times m_k \left\{ \frac{d}{dt} (\omega_k + \dots + \omega_2 + \omega_1 + \Omega) \times \mathbf{r}_k + \right. \\ &\quad \left. + (\omega_k + \dots + \omega_2 + \omega_1 + \Omega) \times \frac{d\mathbf{r}_k}{dt} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{d\Omega}{dt} \times \rho_o + \Omega \times \rho_o \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

С учетом (9)—(12) преобразуем (13) к виду

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \sum_j \rho_j \times m_j \mathbf{V}_j = (\rho_o + \mathbf{r}_1) \times \\ &\quad \times m_1 \left\{ \frac{d(\omega_1 + \Omega)}{dt} \times \mathbf{r}_1 + (\omega_1 + \Omega) \times [(\omega_1 + \Omega) \times \mathbf{r}_1] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{d\Omega}{dt} \times \rho_o + \Omega \times [\Omega \times \rho_o] \right\} + (\rho_o + \mathbf{r}_2) \times \\ &\quad \times m_2 \left\{ \frac{d(\omega_1 + \omega_2 + \Omega)}{dt} \times \mathbf{r}_2 + (\omega_2 + \omega_1 + \Omega) \times \right. \\ &\quad \left. \times [(\omega_2 + \omega_1 + \Omega) \times \mathbf{r}_2] + \frac{d\Omega}{dt} \times \rho_o + \Omega \times [\Omega \times \rho_o] \right\} + \dots + \\ &\quad + (\rho_o + \mathbf{r}_k) \times m_k \left\{ \frac{d(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_k + \Omega)}{dt} \times \mathbf{r}_k + \right. \\ &\quad \left. + (\omega_k + \dots + \omega_2 + \omega_1 + \Omega) \times [(\omega_k + \dots + \omega_2 + \right. \\ &\quad \left. + \omega_1 + \Omega) \times \mathbf{r}_k] + \frac{d\Omega}{dt} \times \rho_o + \Omega \times [\Omega \times \rho_o] \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Отметим, что центр масс системы тел незначительно смещен относительно центра масс КА. Если за центр масс системы принять центр масс КА, то уравнения (7) и (14) соответственно примут вид:

$$\frac{d}{dt} \sum_i \rho_i \times m_i \mathbf{V}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \left\{ \frac{d\Omega}{dt} \times \mathbf{r}_i + \Omega \times [\Omega \times \mathbf{r}_i] \right\}, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_j \rho_j \times m_j \mathbf{V}_j = & \mathbf{r}_1 \times m_1 \left\{ \frac{d(\omega_1 + \Omega)}{dt} \times \mathbf{r}_1 + (\omega_1 + \Omega) \times [(\omega_1 + \Omega) \times \mathbf{r}_1] \right\} + \\ & + \mathbf{r}_2 \times m_2 \left\{ \frac{d(\omega_1 + \omega_2 + \Omega)}{dt} \times \mathbf{r}_2 + (\omega_2 + \omega_1 + \Omega) \times \right. \\ & \times [(\omega_2 + \omega_1 + \Omega) \times \mathbf{r}_2] \left. \right\} + \dots + \mathbf{r}_k \times \\ & \times m_k \left\{ \frac{d(\omega_k + \dots + \omega_1 + \omega_2 + \Omega)}{dt} \times \mathbf{r}_k + \right. \\ & + (\omega_k + \dots + \omega_2 + \omega_1 + \Omega) \times \\ & \left. \times [(\omega_k + \dots + \omega_2 + \omega_1 + \Omega) \times \mathbf{r}_k] \right\}. \quad (16) \end{aligned}$$

Подставив (15) и (16) в (1), получим:

$$\begin{aligned} \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \left\{ \frac{d\Omega}{dt} \times \mathbf{r}_i + \Omega \times [\Omega \times \mathbf{r}_i] \right\} + \\ + \mathbf{r}_1 \times m_1 \left\{ \frac{d(\omega_1 + \Omega)}{dt} \times \mathbf{r}_1 + (\omega_1 + \Omega) \times \right. \\ \times [(\omega_1 + \Omega) \times \mathbf{r}_1] \left. \right\} + \mathbf{r}_2 \times m_2 \left\{ \frac{d(\omega_1 + \omega_2 + \Omega)}{dt} \times \mathbf{r}_2 + \right. \\ + (\omega_2 + \omega_1 + \Omega) \times [(\omega_2 + \omega_1 + \Omega) \times \mathbf{r}_2] \left. \right\} + \dots + \\ + \mathbf{r}_k \times m_k \left\{ \frac{d(\omega_k + \dots + \omega_2 + \omega_1 + \Omega)}{dt} \times \mathbf{r}_k + \right. \\ + (\omega_k + \dots + \omega_2 + \omega_1 + \Omega) \times [(\omega_k + \dots + \\ + \omega_2 + \omega_1 + \Omega) \times \mathbf{r}_k] \left. \right\} = \mathbf{M}_\Sigma. \quad (17) \end{aligned}$$

Полученное уравнение (17) — это уравнение углового движения системы КА с манипулятором.

УРАВНЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНОГО УГЛОВОГО ДВИЖЕНИЯ МАНИПУЛЯТОРА

Рассматривая манипулятор как тело, переносимое в пространстве КА, на основе теоремы об изменении момента количества движения для первого звена (кольца) манипулятора запишем:

$$\frac{d}{dt} \sum_j \rho_j \times m_j \mathbf{V}_j = \mathbf{M}_{m_1}. \quad (18)$$

Если подставить (14) в (18), получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_j \rho_j \times m_j \mathbf{V}_j = & (\rho_o + \mathbf{r}_1) \times m_1 \left\{ \frac{d(\omega_1 + \Omega)}{dt} \times \mathbf{r}_1 + (\omega_1 + \Omega) \times [(\omega_1 + \Omega) \times \mathbf{r}_1] + \right. \\ & + \frac{d\Omega}{dt} \times \rho_o + \Omega \times [\Omega \times \rho_o] \left. \right\} + (\rho_o + \mathbf{r}_2) \times \\ & \times m_2 \left\{ \frac{d(\omega_1 + \omega_2 + \Omega)}{dt} \times \mathbf{r}_2 + (\omega_2 + \omega_1 + \Omega) \times \right. \\ & \times [(\omega_2 + \omega_1 + \Omega) \times \mathbf{r}_2] + \frac{d\Omega}{dt} \times \rho_o + \Omega \times [\Omega \times \rho_o] \left. \right\} + \dots + \\ & + (\rho_o + \mathbf{r}_k) \times m_k \left\{ \frac{d(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_k + \Omega)}{dt} \times \mathbf{r}_k + \right. \\ & + (\omega_k + \dots + \omega_2 + \omega_1 + \Omega) \times [(\omega_k + \dots + \omega_2 + \omega_1 + \\ & + \Omega) \times \mathbf{r}_k] + \frac{d\Omega}{dt} \times \rho_o + \Omega \times [\Omega \times \rho_o] \left. \right\} = \mathbf{M}_{m_1}. \quad (19) \end{aligned}$$

Если совместить центр масс системы с центром масс КА, то $\rho_o = 0$, и из выражения (19) получим:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_j \rho_j \times m_j \mathbf{V}_j = & \mathbf{r}_1 \times m_1 \left\{ \frac{d(\omega_1 + \Omega)}{dt} \times \mathbf{r}_1 + (\omega_1 + \Omega) \times [(\omega_1 + \Omega) \times \mathbf{r}_1] \right\} + \\ & + \mathbf{r}_2 \times m_2 \left\{ \frac{d(\omega_1 + \omega_2 + \Omega)}{dt} \times \mathbf{r}_2 + (\omega_2 + \omega_1 + \Omega) \times \right. \\ & \times [(\omega_2 + \omega_1 + \Omega) \times \mathbf{r}_2] \left. \right\} + \\ & + \mathbf{r}_k \times m_k \left\{ \frac{d(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_k + \Omega)}{dt} \times \mathbf{r}_k + \right. \\ & + (\omega_k + \dots + \omega_2 + \omega_1 + \Omega) \times \\ & \left. \times [(\omega_k + \dots + \omega_2 + \omega_1 + \Omega) \times \mathbf{r}_k] \right\} = \mathbf{M}_{m_1}. \quad (20) \end{aligned}$$

Уравнение (20) — уравнение относительного углового движения первого звена манипулятора в векторной форме.

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В СКАЛЯРНОЙ ФОРМЕ

Запишем уравнения (17) и (20) в проекциях на оси связанной системы координат $C_{КА}XYZ$. Для этого вычислим и запишем векторные произведения, входящие в уравнения (17) и (20) через проекции

векторов сомножителей на указанные оси. Например:

$$\begin{aligned} & \mathbf{r}_i \times m_i \left(\frac{d\Omega}{dt} \times \mathbf{r}_i \right) = \\ & = \mathbf{i} \left[m_i \left(\frac{d\Omega_x}{dt} r_{iy}^2 - \frac{d\Omega_y}{dt} r_{ix} r_{iy} + \frac{d\Omega_x}{dt} r_{iz}^2 - \frac{d\Omega_z}{dt} r_{ix} r_{iz} \right) \right] + \\ & + \mathbf{j} \left[m_i \left(\frac{d\Omega_y}{dt} r_{iz}^2 - \frac{d\Omega_z}{dt} r_{iy} r_{iz} - \frac{d\Omega_x}{dt} r_{iy} r_{ix} + \frac{d\Omega_y}{dt} r_{ix}^2 \right) \right] + \\ & + \mathbf{k} \left[m_i \left(\frac{d\Omega_z}{dt} r_{ix}^2 - \frac{d\Omega_x}{dt} r_{ix} r_{iz} - \frac{d\Omega_y}{dt} r_{iy} r_{iz} + \frac{d\Omega_z}{dt} r_{iy}^2 \right) \right]. \end{aligned}$$

Здесь принято: $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — орты системы координат $C_{KA}XYZ$,

$$\mathbf{r}_i = r_{ix} \mathbf{i} + r_{iy} \mathbf{j} + r_{iz} \mathbf{k},$$

$$\Omega = \Omega_x \mathbf{i} + \Omega_y \mathbf{j} + \Omega_z \mathbf{k}.$$

Примем

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= r_{1x} \mathbf{i} + r_{1y} \mathbf{j} + r_{1z} \mathbf{k}, \\ \mathbf{r}_2 &= r_{2x} \mathbf{i} + r_{2y} \mathbf{j} + r_{2z} \mathbf{k}, \\ \mathbf{r}_k &= r_{kx} \mathbf{i} + r_{ky} \mathbf{j} + r_{kz} \mathbf{k}, \\ \omega_1 &= \omega_{1x} \mathbf{i} + \omega_{1y} \mathbf{j} + \omega_{1z} \mathbf{k}, \\ \omega_2 &= \omega_{2x} \mathbf{i} + \omega_{2y} \mathbf{j} + \omega_{2z} \mathbf{k}, \\ \omega_k &= \omega_{kx} \mathbf{i} + \omega_{ky} \mathbf{j} + \omega_{kz} \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (21)$$

Введем обозначения инерционных характеристик:

$$\begin{aligned} \sum_i m_i (r_{iy}^2 + r_{iz}^2) &= I_{xx}^{KA}, & \sum_i m_i r_{ix} r_{iy} &= I_{xy}^{KA}, \\ \sum_i m_i (r_{ix}^2 + r_{iz}^2) &= I_{yy}^{KA}, & \sum_i m_i r_{ix} r_{iz} &= I_{xz}^{KA}, \\ \sum_i m_i (r_{ix}^2 + r_{iy}^2) &= I_{zz}^{KA}, & \sum_i m_i r_{iz} r_{iy} &= I_{xy}^{KA}, \\ m_1 (r_{1y}^2 + r_{1z}^2) &= I_{xx1}^{KA}, & m_1 r_{1x} r_{1y} &= I_{xy1}^{KA}, \\ m_1 (r_{1x}^2 + r_{1z}^2) &= I_{yy1}^{KA}, & m_1 r_{1x} r_{1z} &= I_{xz1}^{KA}, \\ m_1 (r_{1x}^2 + r_{1y}^2) &= I_{zz1}^{KA}, & m_1 r_{1y} r_{1z} &= I_{yz1}^{KA}, \\ m_2 (r_{2y}^2 + r_{2z}^2) &= I_{xx2}^{KA}, & m_2 r_{2x} r_{2y} &= I_{xy2}^{KA}, \\ m_2 (r_{2x}^2 + r_{2z}^2) &= I_{yy2}^{KA}, & m_2 r_{2x} r_{2z} &= I_{xz2}^{KA}, \\ m_2 (r_{2x}^2 + r_{2y}^2) &= I_{zz2}^{KA}, & m_2 r_{2y} r_{2z} &= I_{yz2}^{KA}, \\ I_{xx}^{KA} + I_{xx1}^{KA} + I_{xx2}^{KA} + \dots + I_{xxk}^{KA} &= I_{xx\Sigma}^{KA}, \\ I_{xy}^{KA} + I_{xy1}^{KA} + I_{xy2}^{KA} + \dots + I_{xyk}^{KA} &= I_{xy\Sigma}^{KA}, \\ I_{yy}^{KA} + I_{yy1}^{KA} + I_{yy2}^{KA} + \dots + I_{yyk}^{KA} &= I_{yy\Sigma}^{KA}, \end{aligned} \quad (22)$$

$$I_{yz}^{KA} + I_{yz1}^{KA} + I_{yz2}^{KA} + \dots + I_{yzk}^{KA} = I_{yz\Sigma}^{KA},$$

$$I_{zz}^{KA} + I_{zz1}^{KA} + I_{zz2}^{KA} + \dots + I_{zzk}^{KA} = I_{zz\Sigma}^{KA},$$

$$I_{xz}^{KA} + I_{xz1}^{KA} + I_{xz2}^{KA} + \dots + I_{xzk}^{KA} = I_{xz\Sigma}^{KA}.$$

Теперь запишем уравнение углового движения системы КА с манипулятором в проекциях на оси связанной системы координат.

На ось $C_{KA}X$:

$$\begin{aligned} & I_{xx\Sigma}^{KA} \frac{d\Omega_x}{dt} - I_{xy\Sigma}^{KA} \frac{d\Omega_y}{dt} - I_{xz\Sigma}^{KA} \frac{d\Omega_z}{dt} + (\Omega_z^2 - \Omega_y^2) I_{yz\Sigma}^{KA} + \\ & + \Omega_y \Omega_z (I_{zz\Sigma}^{KA} - I_{yy\Sigma}^{KA}) - \Omega_x \Omega_y I_{xz\Sigma}^{KA} + \Omega_x \Omega_z I_{xy\Sigma}^{KA} + \\ & + \sum_{k=1}^N \left\{ I_{xxk}^{KA} \frac{d\Omega_x}{dt} - I_{xyk}^{KA} \frac{d\Omega_y}{dt} - I_{xzk}^{KA} \frac{d\Omega_z}{dt} + \right. \\ & + \sum_{j=1}^k \left[I_{xxk}^{KA} \frac{d\omega_{jx}}{dt} - I_{xyk}^{KA} \frac{d\omega_{jy}}{dt} - I_{xzk}^{KA} \frac{d\omega_{jz}}{dt} \right] + \\ & + (\Omega_z^2 - \Omega_y^2) I_{yzk}^{KA} + \Omega_y \Omega_z (I_{zzk}^{KA} - I_{yyk}^{KA}) - \Omega_x \Omega_y I_{xz k}^{KA} + \\ & + \Omega_x \Omega_z I_{xyk}^{KA} + \sum_{j=1}^k [(\Omega_z \omega_{jz} - \Omega_y \omega_{jy}) I_{yzk}^{KA} + \Omega_x \omega_{jz} I_{xyk}^{KA} - \\ & - \Omega_x \omega_{jy} I_{xzk}^{KA} + \Omega_y \omega_{jz} r_{ky}^2 m_k - \Omega_z \omega_{jy} r_{kz}^2 m_k] + \\ & + \sum_{j=1}^k [(w_{jz} \Omega_z - w_{jy} \Omega_y) I_{yzk}^{KA} + w_{jx} \Omega_z I_{xyk}^{KA} - \\ & - w_{jx} \Omega_y I_{xzk}^{KA} + w_{jy} \Omega_z r_{ky}^2 m_k - w_{jz} \Omega_y r_{kz}^2 m_k] + \\ & + \sum_{j=1}^k [(w_{kz} \omega_{jz} - w_{ky} \omega_{jy}) I_{yzk}^{KA} + w_{kx} \omega_{jz} I_{xyk}^{KA} - \\ & - w_{kx} \omega_{jy} I_{xzk}^{KA} + w_{ky} \omega_{jz} r_{ky}^2 m_k - w_{kz} \omega_{jy} r_{kz}^2 m_k] \left. \right\} = M_{\Sigma x}; \quad (23) \end{aligned}$$

на ось $C_{KA}Y$:

$$\begin{aligned} & - I_{xy\Sigma}^{KA} \frac{d\Omega_x}{dt} + I_{yy\Sigma}^{KA} \frac{d\Omega_y}{dt} - I_{yz\Sigma}^{KA} \frac{d\Omega_z}{dt} + (\Omega_x^2 - \Omega_z^2) I_{xz\Sigma}^{KA} + \\ & + \Omega_x \Omega_z (I_{xx\Sigma}^{KA} - I_{zz\Sigma}^{KA}) - \Omega_y \Omega_z I_{xy\Sigma}^{KA} + \Omega_x \Omega_y I_{yz\Sigma}^{KA} + \\ & + \sum_{k=1}^N \left\{ - I_{xyk}^{KA} \frac{d\Omega_x}{dt} + I_{yyk}^{KA} \frac{d\Omega_y}{dt} - I_{yzk}^{KA} \frac{d\Omega_z}{dt} + \right. \\ & + \sum_{j=1}^k \left[I_{xyk}^{KA} \frac{d\omega_{jx}}{dt} + I_{yyk}^{KA} \frac{d\omega_{jy}}{dt} + I_{yzk}^{KA} \frac{d\omega_{jz}}{dt} \right] + \\ & + (\Omega_x^2 - \Omega_z^2) I_{xz k}^{KA} + \Omega_x \Omega_z (I_{xxk}^{KA} - I_{zzk}^{KA}) - \Omega_y \Omega_z I_{xyk}^{KA} + \\ & + \Omega_x \Omega_y I_{yz k}^{KA} + \sum_{j=1}^k [(\Omega_x \omega_{jx} - \Omega_z \omega_{jz}) I_{xz k}^{KA} - \Omega_y \omega_{jz} I_{xyk}^{KA} + \\ & + \Omega_y \omega_{jx} I_{yz k}^{KA} + \Omega_z \omega_{jx} r_{kz}^2 m_k - \Omega_x \omega_{jz} r_{kx}^2 m_k] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{j=1}^k [(\omega_{jx}\Omega_x - \omega_{jz}\Omega_z)I_{zjk}^{KA} - \omega_{jy}\Omega_z I_{xyk}^{KA} + \\
 & + \omega_{jy}\Omega_x I_{yzk}^{KA} + \omega_{jz}\Omega_x r_{kz}^2 m_k - \omega_{jx}\Omega_z r_{kx}^2 m_k] + \\
 & + \sum_{j=1}^k [(\omega_{kx}\omega_{jx} - \omega_{kz}\omega_{jz})I_{zjk}^{KA} - \omega_{ky}\omega_{jz} I_{xyk}^{KA} + \\
 & + \omega_{ky}\omega_{jx} I_{yzk}^{KA} + \omega_{kz}\omega_{jz} r_{kz}^2 m_k - \omega_{kx}\omega_{jx} r_{kx}^2 m_k] \Big\} = M_{\Sigma y}; \quad (24)
 \end{aligned}$$

на ось $C_{KA}Z$:

$$\begin{aligned}
 & - I_{xz\Omega}^{KA} \frac{d\Omega_x}{dt} - I_{yz\Omega}^{KA} \frac{d\Omega_y}{dt} + I_{zz\Omega}^{KA} \frac{d\Omega_z}{dt} + (\Omega_y^2 - \Omega_x^2)I_{xy\Omega}^{KA} + \\
 & + \Omega_x \Omega_y (I_{yy\Omega}^{KA} - I_{xx}^{KA}) - \Omega_x \Omega_z I_{yz\Omega}^{KA} + \Omega_y \Omega_z I_{xz\Omega}^{KA} + \\
 & + \sum_{k=1}^N \left\{ - I_{zjk}^{KA} \frac{d\Omega_x}{dt} - I_{yzk}^{KA} \frac{d\Omega_y}{dt} + I_{zzk}^{KA} \frac{d\Omega_z}{dt} + \right. \\
 & + \sum_{j=1}^k \left[- I_{zjk}^{KA} \frac{d\omega_{jx}}{dt} - I_{yzk}^{KA} \frac{d\omega_{jy}}{dt} + I_{zzk}^{KA} \frac{d\omega_{jz}}{dt} \right] + \\
 & + (\Omega_y^2 - \Omega_x^2)I_{xyk}^{KA} + \Omega_x \Omega_y (I_{yyk}^{KA} - I_{xxk}^{KA}) - \Omega_x \Omega_z I_{yzk}^{KA} + \\
 & + \Omega_y \Omega_z I_{xz k}^{KA} + \sum_{j=1}^k [(\Omega_y \omega_{jy} - \Omega_x \omega_{jx})I_{xyk}^{KA} - \Omega_z \omega_{jx} I_{yzk}^{KA} + \\
 & + \Omega_z \omega_{jy} I_{zjk}^{KA} + \Omega_x \omega_{jz} r_{kx}^2 m_k - \Omega_y \omega_{jx} r_{ky}^2 m_k] + \\
 & + \sum_{j=1}^k [(\omega_{jy}\Omega_y - \omega_{jx}\Omega_x)I_{xyk}^{KA} - \omega_{jz}\Omega_x I_{yzk}^{KA} + \\
 & + \omega_{jz}\Omega_y I_{zjk}^{KA} + \omega_{jx}\Omega_y r_{kx}^2 m_k - \omega_{jy}\Omega_x r_{ky}^2 m_k] + \\
 & + \sum_{j=1}^k [(\omega_{ky}\omega_{jy} - \omega_{kx}\omega_{jx})I_{xyk}^{KA} - \omega_{kz}\omega_{jz} I_{yzk}^{KA} + \\
 & + \omega_{kz}\omega_{jy} I_{zjk}^{KA} + \omega_{kx}\omega_{jz} r_{kz}^2 m_k - \omega_{ky}\omega_{jx} r_{kx}^2 m_k] \Big\} = M_{\Sigma z}. \quad (25)
 \end{aligned}$$

Уравнения относительного движения k -го звена манипулятора в проекциях на оси связанной системы координат имеют следующий вид.

На ось $C_{KA}X$:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=n}^N \left\{ I_{xxk}^{KA} \frac{d\Omega_x}{dt} - I_{xyk}^{KA} \frac{d\Omega_y}{dt} - I_{xzk}^{KA} \frac{d\Omega_z}{dt} + \right. \\
 & + \sum_{j=1}^k \left[I_{xxk}^{KA} \frac{d\omega_{jx}}{dt} - I_{xyk}^{KA} \frac{d\omega_{jy}}{dt} - I_{xzk}^{KA} \frac{d\omega_{jz}}{dt} \right] + \\
 & + (\Omega_z^2 - \Omega_y^2)I_{xyk}^{KA} + \Omega_y \Omega_z (I_{zzk}^{KA} - I_{yyk}^{KA}) - \Omega_x \Omega_y I_{xzk}^{KA} + \\
 & + \Omega_x \Omega_z I_{xyk}^{KA} + \sum_{j=1}^k [(\Omega_z \omega_{jz} - \Omega_y \omega_{jy})I_{xyk}^{KA} + \Omega_x \omega_{jz} I_{xzk}^{KA} -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \Omega_x \omega_{jy} I_{xzk}^{KA} + \Omega_y \omega_{jz} r_{ky}^2 m_k - \Omega_z \omega_{jx} r_{kz}^2 m_k] + \\
 & + \sum_{j=1}^k [(\omega_{jz}\Omega_z - \omega_{jy}\Omega_y)I_{yzk}^{KA} + \omega_{jx}\Omega_z I_{xyk}^{KA} - \\
 & - \omega_{jx}\Omega_y I_{zjk}^{KA} + \omega_{jy}\Omega_z r_{ky}^2 m_k - \omega_{jz}\Omega_x r_{kz}^2 m_k] + \\
 & + \sum_{j=1}^k [(\omega_{kz}\omega_{jz} - \omega_{ky}\omega_{jy})I_{yzk}^{KA} + \omega_{kx}\omega_{jz} I_{xyk}^{KA} - \\
 & - \omega_{kx}\omega_{jy} I_{zjk}^{KA} + \omega_{ky}\omega_{jz} r_{ky}^2 m_k - \omega_{kz}\omega_{jx} r_{kz}^2 m_k] \Big\} = M_{\Sigma x}; \quad (26)
 \end{aligned}$$

на ось $C_{KA}Y$:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=n}^N \left\{ - I_{xyk}^{KA} \frac{d\Omega_x}{dt} + I_{yyk}^{KA} \frac{d\Omega_y}{dt} - I_{yzk}^{KA} \frac{d\Omega_z}{dt} + \right. \\
 & + \sum_{j=1}^k \left[- I_{xyk}^{KA} \frac{d\omega_{jx}}{dt} + I_{yyk}^{KA} \frac{d\omega_{jy}}{dt} - I_{yzk}^{KA} \frac{d\omega_{jz}}{dt} \right] + \\
 & + (\Omega_x^2 - \Omega_z^2)I_{xyk}^{KA} + \Omega_x \Omega_z (I_{xxk}^{KA} - I_{zzk}^{KA}) - \Omega_y \Omega_z I_{xyk}^{KA} + \\
 & + \Omega_x \Omega_y I_{yzk}^{KA} + \sum_{j=1}^k [(\Omega_x \omega_{jx} - \Omega_z \omega_{jz})I_{xyk}^{KA} - \Omega_y \omega_{jz} I_{yzk}^{KA} + \\
 & + \Omega_y \omega_{jx} I_{zjk}^{KA} + \Omega_z \omega_{jx} r_{kz}^2 m_k - \Omega_x \omega_{jz} r_{kx}^2 m_k] + \\
 & + \sum_{j=1}^k [(\omega_{jx}\Omega_x - \omega_{jz}\Omega_z)I_{zjk}^{KA} - \omega_{jy}\Omega_z I_{xyk}^{KA} + \\
 & + \omega_{jy}\Omega_x I_{yzk}^{KA} + \omega_{jz}\Omega_x r_{kz}^2 m_k - \omega_{jx}\Omega_z r_{kx}^2 m_k] + \\
 & + \sum_{j=1}^k [(\omega_{kx}\omega_{jx} - \omega_{kz}\omega_{jz})I_{zjk}^{KA} - \omega_{ky}\omega_{jz} I_{xyk}^{KA} + \\
 & + \omega_{ky}\omega_{jx} I_{yzk}^{KA} + \omega_{kz}\omega_{jz} r_{kz}^2 m_k - \omega_{kx}\omega_{jx} r_{kx}^2 m_k] \Big\} = M_{\Sigma y}; \quad (27)
 \end{aligned}$$

на ось $C_{KA}Z$:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=k}^N \left\{ - I_{zjk}^{KA} \frac{d\Omega_x}{dt} - I_{yzk}^{KA} \frac{d\Omega_y}{dt} + I_{zzk}^{KA} \frac{d\Omega_z}{dt} + \right. \\
 & + \sum_{j=1}^k \left[- I_{zjk}^{KA} \frac{d\omega_{jx}}{dt} - I_{yzk}^{KA} \frac{d\omega_{jy}}{dt} + I_{zzk}^{KA} \frac{d\omega_{jz}}{dt} \right] + \\
 & + (\Omega_y^2 - \Omega_z^2)I_{xyk}^{KA} + \Omega_x \Omega_y (I_{yyk}^{KA} - I_{xxk}^{KA}) - \Omega_x \Omega_z I_{yzk}^{KA} + \\
 & + \Omega_y \Omega_z I_{xz k}^{KA} + \sum_{j=1}^k [(\Omega_y \omega_{jy} - \Omega_x \omega_{jx})I_{xyk}^{KA} - \Omega_z \omega_{jx} I_{yzk}^{KA} + \\
 & + \Omega_z \omega_{jy} I_{zjk}^{KA} + \Omega_x \omega_{jz} r_{kx}^2 m_k - \Omega_y \omega_{jx} r_{ky}^2 m_k] + \\
 & + \sum_{j=1}^k [(\omega_{jy}\Omega_y - \omega_{jx}\Omega_x)I_{xyk}^{KA} - \omega_{jz}\Omega_x I_{yzk}^{KA} + \\
 & + \omega_{jz}\Omega_y I_{zjk}^{KA} + \omega_{jx}\Omega_y r_{kx}^2 m_k - \omega_{jy}\Omega_x r_{ky}^2 m_k] +
 \end{aligned}$$

$$+ \sum_{j=1}^k [(\omega_{ky}\omega_{jy} - \omega_{kx}\omega_{jx})I_{xyk}^{KA} - \omega_{kz}\omega_{jz}I_{yzk}^{KA} + \omega_{kz}\omega_{jy}I_{xzk}^{KA} + \omega_{kx}\omega_{jy}r_{kx}^2 m_k - \omega_{ky}\omega_{jx}r_{ky}^2 m_k] = M_{\Sigma zk}. \quad (28)$$

Уравнения (23)—(28) — это уравнения углового движения системы КА с N -звенным манипулятором как объекта управления в скалярной форме. Они учитывают:

- переносное движение КА;
- относительное движение манипулятора;
- изменение распределения масс системы из-за движения манипулятора.

Уравнения (23)—(25) использовались с целью математического моделирования возможных угловых движений малогабаритного КА с манипулятором.

Предположим, что КА с манипулятором управляется релейной реактивной системой стабилизации. Дополним уравнения (23)—(28) уравнением регулятора:

$$\chi_i = \begin{cases} 1, & j_i \geq \lambda_i, \quad \frac{dj_i}{dt} < 0, \quad j_i \geq m_i \lambda_i, \quad \frac{dj_i}{dt} > 0; \\ 0, & -m_i \lambda_i < j_i \leq \lambda_i, \quad \frac{dj_i}{dt} < 0, \quad -\lambda_i < j_i \leq m_i \lambda_i, \quad \frac{dj_i}{dt} > 0; \\ -1, & j_i < m_i \lambda_i, \quad \frac{dj_i}{dt} < 0, \quad j_i \leq -\lambda_i, \quad \frac{dj_i}{dt} > 0; \end{cases}$$

$$j_i = T_i \dot{\xi}_i + \xi_i; \quad i = x, y, z;$$

$$\xi_x = \varphi; \quad \xi_y = \psi; \quad \xi_z = \theta;$$

где χ_i — управляющее воздействие; j_i — управляющая функция; T_i — постоянная времени; m_i , λ_i — параметры системы управления

Таким образом, математическая модель управляемой системы КА с двухзвенным манипулятором принимается в виде

$$I_{xx\Sigma} \frac{d\Omega_x}{dt} - I_{xy\Sigma} \frac{d\Omega_y}{dt} - I_{xz\Sigma} \frac{d\Omega_z}{dt} + (\Omega_x^2 - \Omega_y^2)I_{yz\Sigma} + \Omega_y \Omega_z (I_{zz\Sigma} - I_{yy\Sigma}) - \Omega_x \Omega_y I_{xz\Sigma} + \Omega_x \Omega_z I_{xy\Sigma} + \frac{d\omega_{1x}}{dt} (I_{xx1}^{KA} + I_{xx2}^{KA}) - \frac{d\omega_{2y}}{dt} I_{xy2}^{KA} - \Omega_x \omega_{2y} I_{xz2}^{KA} - \Omega_y 2\omega_{2y} I_{yz2}^{KA} + \Omega_y \omega_{1x} I_{xz1}^{KA} - \Omega_z \omega_{2y} (I_{yy2}^{KA} - I_{zz2}^{KA}) + \Omega_z \omega_{1x} (I_{xy1}^{KA} + I_{xy2}^{KA}) I_{xy1}^{KA} = M_{\Sigma x} \chi_x, \quad (29)$$

$$- I_{xy\Sigma} \frac{d\Omega_x}{dt} + I_{yy\Sigma} \frac{d\Omega_y}{dt} - I_{yz\Sigma} \frac{d\Omega_z}{dt} + (\Omega_x^2 - \Omega_z^2) I_{xz\Sigma} + \Omega_x \Omega_z (I_{xx\Sigma} - I_{zz\Sigma}) - \Omega_y \Omega_z I_{xy\Sigma} + \Omega_x \Omega_y I_{yz\Sigma} -$$

$$- \frac{d\omega_{1x}}{dt} (I_{xy1}^{KA} + I_{xy2}^{KA}) + 2\Omega_x \omega_{1x} (I_{xz1}^{KA} + I_{xz2}^{KA}) + \Omega_x \omega_{2y} I_{yz2}^{KA} + \Omega_y \omega_{1x} (I_{yz1}^{KA} + I_{yz2}^{KA}) + \Omega_z \omega_{1x} [(I_{xxk}^{KA} + I_{xx2}^{KA}) - (I_{zz1}^{KA} + I_{zz2}^{KA})] - \Omega_z \omega_{2y} I_{xy2}^{KA} + \frac{d\omega_{2y}}{dt} I_{yy2}^{KA} + \omega_{1x}^2 (I_{xz1}^{KA} + I_{xz2}^{KA}) I_{xz1}^{KA} = M_{\Sigma z} \chi_z, \quad (30)$$

$$- I_{xz\Sigma} \frac{d\Omega_x}{dt} - I_{yz\Sigma} \frac{d\Omega_y}{dt} + I_{zz\Sigma} \frac{d\Omega_z}{dt} + (\Omega_y^2 - \Omega_x^2) I_{xy\Sigma} + \Omega_x \Omega_y (I_{yy\Sigma} - I_{xx\Sigma}) - \Omega_x \Omega_z I_{yz\Sigma} + \Omega_y \Omega_z I_{xz\Sigma} - \frac{d\omega_{1x}}{dt} (I_{xz1}^{KA} + I_{xz2}^{KA}) - \frac{d\omega_{2y}}{dt} I_{yz2}^{KA} - 2\Omega_x \omega_{1x} (I_{xy1}^{KA} + I_{xy2}^{KA}) + \Omega_z \omega_{2y} I_{xy2}^{KA} + \Omega_y \omega_{2y} I_{xy2}^{KA} + 2\Omega_y \omega_{2y} I_{xy2}^{KA} + \Omega_y \omega_{1x} \times [(I_{xy1}^{KA} + I_{xy2}^{KA}) - (I_{xx1}^{KA} + I_{xx2}^{KA})] - \Omega_z \omega_{1x} (I_{yz1}^{KA} + I_{yz2}^{KA}) + \Omega_z \omega_{2y} I_{xz2}^{KA} - \omega_{1x}^2 (I_{xy1}^{KA} + I_{xy2}^{KA}) + \omega_{1x} \omega_{2x} (r_{1y}^2 m_1 + r_{2y}^2 m_2) + \omega_{2y} I_{xy2}^{KA} = M_{\Sigma z} \chi_z; \quad (31)$$

$$(I_{xx1}^{KA} + I_{xx2}^{KA}) \frac{d\Omega_x}{dt} - (I_{xy1}^{KA} + I_{xy2}^{KA}) \frac{d\Omega_y}{dt} - (I_{xz1}^{KA} + I_{xz2}^{KA}) \frac{d\Omega_z}{dt} + (I_{xx1}^{KA} + I_{xx2}^{KA}) \frac{d\omega_{1x}}{dt} - I_{xy2}^{KA} \frac{d\omega_{2y}}{dt} + (\Omega_z^2 - \Omega_y^2) I_{yz1}^{KA} + \Omega_y \Omega_z (I_{zz1}^{KA} - I_{yy1}^{KA}) - \Omega_x \Omega_y I_{xz1}^{KA} + \Omega_x \Omega_z I_{xy1}^{KA} + (\Omega_z^2 - \Omega_y^2) I_{yz2}^{KA} + \Omega_y \Omega_z (I_{zz2}^{KA} - I_{yy2}^{KA}) - \Omega_x \Omega_y I_{xz2}^{KA} + \Omega_x \Omega_z I_{xy2}^{KA} + \omega_{1x} \Omega_z (I_{xy1}^{KA} + I_{xy2}^{KA}) - \omega_{1x} \Omega_y (I_{xz1}^{KA} + I_{xz2}^{KA}) - \Omega_z \omega_{1x} (r_{1z}^2 m_1 + r_{2z}^2 m_2) - 2\Omega_y \omega_{2y} I_{xy2}^{KA} - \Omega_x \omega_{2y} I_{xz2}^{KA} - \omega_{1x} \omega_{2y} (I_{xz1}^{KA} + I_{xz2}^{KA}) + \omega_{2y} \Omega_z r_{2y}^2 m_2 - \omega_{2y}^2 I_{yz2}^{KA} = M_{Mx1}, \quad (32)$$

$$- \frac{d\Omega_x}{dt} I_{xy2}^{KA} + \frac{d\Omega_y}{dt} I_{yy2}^{KA} - \frac{d\Omega_z}{dt} I_{yz2}^{KA} - \frac{d\omega_{1x}}{dt} I_{xy2}^{KA} + \frac{d\omega_{2y}}{dt} I_{yy2}^{KA} + (\Omega_x^2 - \Omega_z^2) I_{xz2}^{KA} + \Omega_x \Omega_z (I_{xx2}^{KA} - I_{zz2}^{KA}) - \Omega_y \Omega_z I_{xy2}^{KA} + \Omega_x \Omega_y I_{yz2}^{KA} + \Omega_x \omega_{1x} I_{xz2}^{KA} - \Omega_y \omega_{1x} I_{yz2}^{KA} + \Omega_x \omega_{1x} I_{xz2}^{KA} + \Omega_z \omega_{1x} r_{2z}^2 m_2 + \omega_{1x}^2 I_{xz2}^{KA} - \Omega_z \omega_{2y} I_{xy2}^{KA} + \Omega_x \omega_{2y} I_{yz2}^{KA} + \omega_{2y} \omega_{1x} I_{yz2}^{KA} = M_{My2}, \quad (33)$$

$$\chi_i = \begin{cases} 1, & j_i \geq \lambda_i, \quad \frac{dj_i}{dt} < 0, \quad j_i \geq m_i \lambda_i, \quad \frac{dj_i}{dt} > 0; \\ 0, & -m_i \lambda_i < j_i \leq \lambda_i, \quad \frac{dj_i}{dt} < 0, \quad -\lambda_i < j_i \leq m_i \lambda_i, \quad \frac{dj_i}{dt} > 0; \\ -1, & j_i < m_i \lambda_i, \quad \frac{dj_i}{dt} < 0, \quad j_i \leq -\lambda_i, \quad \frac{dj_i}{dt} > 0; \end{cases} \quad (34)$$

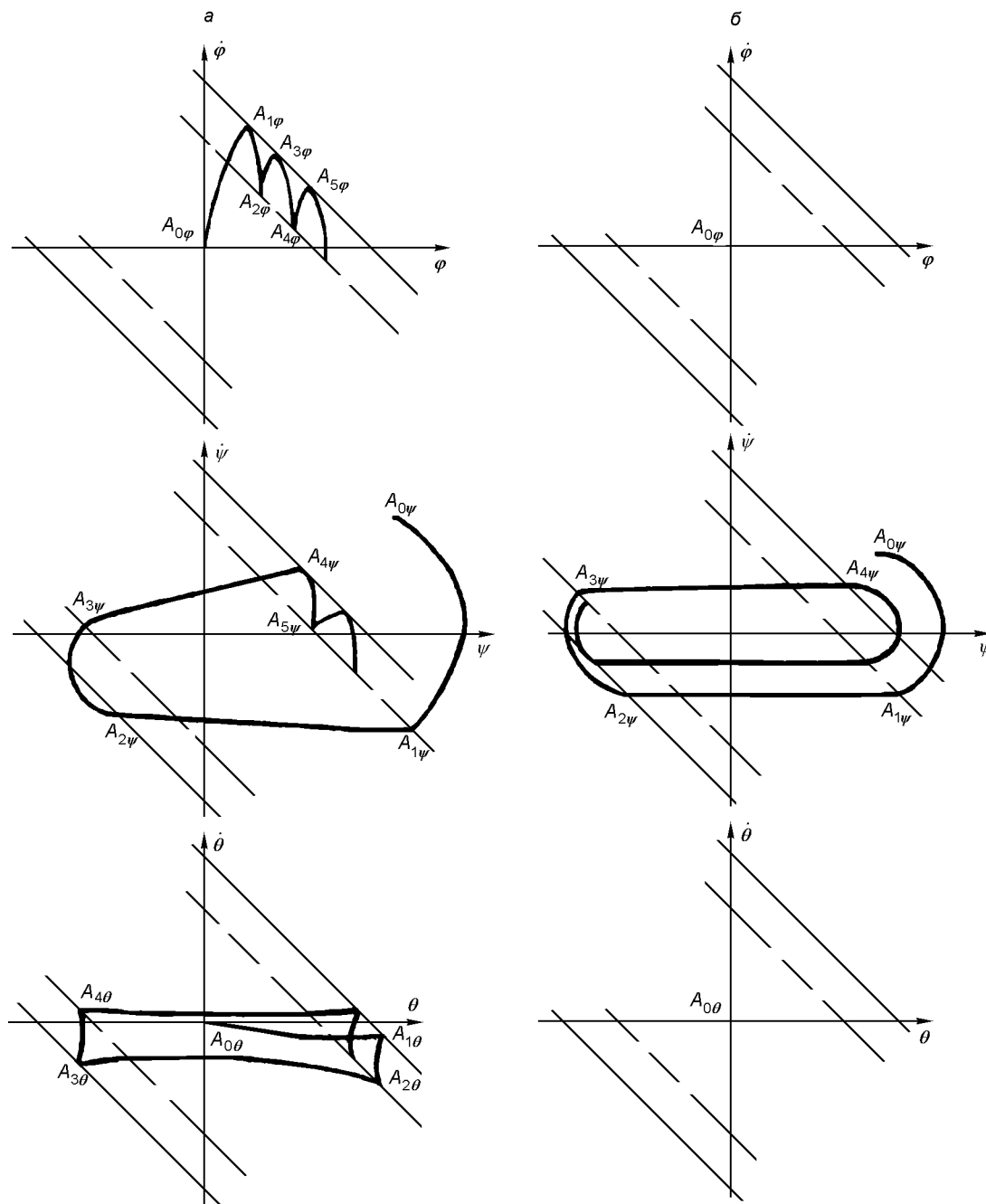


Рис. 2. Фазовые траектории обработки начальных возмущений космического аппарата: *a* — с недиагональным тензором; *b* — с диагональным тензором

$$\begin{aligned}
 \dot{j}_i &= T_i \dot{\xi}_i + \xi_i; & i &= x, y, z; \\
 \xi_x &= \varphi; & \xi_y &= \psi; & \xi_z &= \theta.
 \end{aligned}$$

Математическое моделирование угловых движений КА с двухзвенным манипулятором проводилось путем численного интегрирования уравнений

(29)—(34) в среде Turbo Pascal. Анализ углового движения проводится методом фазового пространства. На рис. 2, *a* приведены фазовые траектории углового движения системы КА с двухзвенным манипулятором при обработке начальных возмущений относительно оси $C_{КА}Y$. Для определенности

приняты следующие значения параметров системы:

$$\begin{aligned} I_{xx\Sigma}^{KA} &= 14.74 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, & I_{yy\Sigma}^{KA} &= 39.19 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \\ I_{zz\Sigma}^{KA} &= 39.62 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, & I_{xy\Sigma}^{KA} &= 0.49 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \\ I_{xz\Sigma}^{KA} &= 0.49 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, & I_{yz\Sigma}^{KA} &= 1.22 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; \\ j_x &= j_y = j_z = \pm 0.0175, & T_x &= T_y = T_z = 10, \\ m &= 0.8, & M_x &= M_y = M_z = 0.1; \end{aligned}$$

при $t = 0$

$$\begin{aligned} \chi_x &= 0; & \chi_y &= -1; & \chi_z &= 0; \\ \varphi &= 0; & \psi &= 0; & \theta &= 0; \\ \dot{\varphi} &= 0; & \dot{\psi} &= 0.0035 \text{ с}^{-1}; & \dot{\theta} &= 0. \end{aligned}$$

Из сравнения фазовых портретов для КА с недиагональным (рис. 2, а) и диагональным (рис. 2, б) тензорами инерции видно их качественное отличие. При диагональном тензоре инерции каналы управления независимы, поэтому отработка начальных возмущений в плоскости Ψ , $\dot{\Psi}$ не приводит к изменению фазовых характеристик в двух других плоскостях. Изображающая точка сохраняет свои начальные координаты (точки $A_{0\psi}$, $A_{0\theta}$ на рис. 2, б). При отработке начальных возмущений вокруг оси $C_{KA}Y$ для КА с диагональным тензором инерции двигатели системы управления в плоскости Ψ , $\dot{\Psi}$ работают в импульсном режиме. Управляющие двигатели в плоскостях Φ , $\dot{\Phi}$ и Θ , $\dot{\Theta}$ находятся при этом в выключенном состоянии.

Недиагональность тензора инерции приводит к взаимному влиянию угловых движений КА с манипулятором относительно трех координатных осей. При отработке начальных возмущений в плоскости Ψ , $\dot{\Psi}$ из-за недиагональности тензора инерции фазовая траектория «скручивается»: ординаты точек $A_{1\psi}$ и $A_{2\psi}$ не равны (рис. 2, а), в отличие от фазовой траектории КА с диагональным тензором инерции, где $A_{1\psi} = A_{2\psi}$ (рис. 2, б). Кроме того, недиагональность тензора инерции приводит к возникновению сложных колебательных движений в

плоскостях ϕ , $\dot{\phi}$ и Θ , $\dot{\Theta}$. Фазовые траектории таких движений приведены на рис. 2, а. Участки фазовых траекторий $A_{1\varphi}A_{2\varphi}$, $A_{3\varphi}A_{4\varphi}$, $A_{0\psi}A_{1\psi}$, $A_{2\psi}A_{3\psi}$, $A_{4\psi}A_{5\psi}$, $A_{1\theta}A_{2\theta}$, $A_{3\theta}A_{4\theta}$, соответствуют движению КА с манипулятором с включенными управляющими двигателями в соответствующих плоскостях стабилизации. Участки $A_{0\varphi}A_{1\varphi}$, $A_{2\varphi}A_{3\varphi}$, $A_{4\varphi}A_{5\varphi}$, $A_{1\psi}A_{2\psi}$, $A_{3\psi}A_{4\psi}$, $A_{0\theta}A_{1\theta}$, $A_{2\theta}A_{3\theta}$ фазовых траекторий соответствуют движению КА с манипулятором с выключенными управляющими двигателями в соответствующих плоскостях стабилизации.

Таким образом, расход топлива на ориентацию КА с недиагональным тензором инерции в несколько раз превышает расход топлива на ориентацию КА с диагональным тензором инерции. Математическое моделирование углового движения КА с недиагональным тензором инерции позволяет определить число включений управляющих двигателей, работающих в импульсном режиме, а следовательно, и расход горючего на ориентацию КА с недиагональным тензором инерции.

- Алексеев К. Б., Бебенин Г. Г. Управление космическими летательными аппаратами. — М.: Машиностроение, 1974.—340 с.
 Ащепкова Н. С., Шептун Ю. Д. Влияние движения манипулятора на динамику КА // Ракетно-космическая техника. — Днепропетровск: ДГУ, 1996.—С. 77—81.
 Никитин Н. Н. Курс теоретической механики. — М.: Высш. шк., 1990.—607 с.
 Aschepkova N. S., Sheptun Y. D. The Orientation of Small-Size Space Craft (SC) Equipped with Manipulator // Proc. Forth Ukraine—Russia—China Symp. Space Science and Technology. — Kiev, 1996.—Vol. 1.—P. 514—515.

MATHEMATICAL MODEL OF THE MOTION OF A SPACE VEHICLE WITH A MANIPULATOR

N. S. Ashchepkova and Yu. D. Sheptun

We consider the dynamics of a system consisting of a spacecraft and an N-component manipulator. A mathematical model of the angular motion of such a system was derived. As an illustration we give some results of the mathematical simulation of the motion of a spacecraft with a two-component manipulator.