Космічна наука і технологія. 1997. Т 3. № 3/4. С. 90—95.

УДК 517.977

Динамика пространственных движений космического упругого робота-манипулятора

В. И. Гуляев[1], Т. В. Завражина[2]

[1]Український транспортний університет, Київ
[2]Київський державний технічний університет будівництва та архітектури

Надійшла до редакції 02.04.96

Поставлено задачу про пружні коливання космічного робота-маніпулятора з розподіленими параметрами. Побудована система диференціальних рівнянь гібридного типу, запропонована методика її розв'язування, основана на застосуванні чисельного методу Хуболта та матриці фундаментальних розв'язків. Розглянуто приклад.

Отличительная особенность динамики управляемого движения космических роботов-манипуляторов связана с видом нагрузок, действующих на элементы их конструкций и на переносимые ими тела. При относительно малых размерах звеньев манипулятора можно пренебречь действующими на них силами гравитации и принимать во внимание только нагрузки сил инерции, вызванные их относительными движениями. В случае, когда протяженность звеньев манипулятора велика или манипулятор действует на удалении от общего центра масс, совершающего орбитальное движение космического комплекса, необходимо также учитывать и силы градиента гравитационного поля. Поскольку рассмотренные виды сил для реальных орбитальных систем являются сравнительно малыми, изгибные жесткости звеньев манипулятора можно выбирать относительно небольшими. В этом случае при исследовании динамики программного управляемого движения манипулятора необходимо учитывать упругую податливость его звеньев, позволяющую повысить точность его позиционирования и улучшить его динамические характеристики.

В работах Акуленко (1983), Wen-Jieh Wang et al. (1989), Yossi Chait et al. (1990), Chapnik et al. (1991) рассмотрены задачи по исследованию однозвенных упругих манипуляторов путем приведения их механических моделей к системам с конечным числом степеней свободы путем разложения искомых функций упругих перемещений в конечный ряд по собственным формам или другим системам функций. Конечномерные модели многозвенных упругих роботов изучаются в работах Акуленко (1981), Черноусько и др. (1989), Kirc et al. (1995). Они базируются на специальных предположениях об инерционных и жесткостных характеристиках их звеньев и формах их упругого деформирования.

В данной работе предложена математическая модель динамики упругих многозвенных управляемых манипуляторов как систем с распределенными параметрами, испытывающих действие управляющих моментов и сил инерции относительных колебаний, построена относящаяся к гибридному типу система нелинейных дифференциальных уравнений с обыкновенными и частными производными относительно искомых переменных, разработан шаговый алгоритм построения решений этих уравнений, позволяющий на каждом шаге вычислительной процедуры разделить нелинейную часть задачи определения углов относительных поворотов в шарнирах смежных звеньев и линейную многоточечную краевую задачу определения относительных упругих перемещений звеньев всей стержневой цепи.

МЕХАНИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Поставим задачу о динамике пространственного управляемого движения многозвенного манипулятора, состоящего из N прямолинейных упругих стержней длиной l_k ($k = 1, ..., N$), соединенных между собой идеальными цилиндрическими шарнирами. Пронумеруем звенья в порядке их присоединения друг к другу, считая что первое звено шарнирно соединено с неподвижным основанием. Введем орбитальную систему координат $OXYZ$ и свяжем с каждым n-м звеном местную систему координат $O_n x_n y_n z_n$ с ортами $\mathbf{i}_n$, $\mathbf{j}_n$, $\mathbf{k}_n$ так, чтобы точка O_n совпадала с началом n-го стержня, ось $O_n x_n$ совпадала с его осевой линией, а соответствующие оси $O_k y_k$ и $O_k z_k$ ($k = 1, ..., N$) всех звеньев были параллельны, когда вся кинематическая цепочка манипулятора вытянута в одну прямую линию и оси $O_k x_k$ ($k = 1, ..., N$) направлены вдоль одной прямой. Примем, что каждая из осей соединяющих звенья цилиндрических шарниров совпадает с одной из осей местной системы координат. Угол поворота последующего n-го звена по отношению к предыдущему вокруг одной из осей $O_n x_n$, $O_n y_n$ или $O_n z_n$ обозначим φ_n, ψ_n или θ_n соответственно. Он считается положительным, если с конца соответствующей оси вращения поворот виден происходящим против хода часовой стрелки. В шарнирах к звеньям приложены управляющие моменты M_k^e, которые считаются положительными, если они стремятся повернуть звенья в положительных направлениях.

Выделим условно n-е звено манипулятора и, пользуясь принципом Даламбера и опуская в соответствующих местах индекс «n», выпишем уравнения его динамического равновесия (Гуляев, 1992)

$$\begin{gathered}
EF\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho F a_x + q_x = 0,\\
EJ_z\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \frac{\partial}{\partial x}\left[N(x)\frac{\partial v}{\partial x}\right] + \rho F a_y - q_y = 0,\\
EJ_y\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{\partial}{\partial x}\left[N(x)\frac{\partial w}{\partial x}\right] + \rho F a_z - q_z = 0,\\
GJ_p\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} = 0.
\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь u, v, w — функции упругих перемещений стержня вдоль осей Ox, Oy, Oz соответственно; γ — угол закручивания; EF, EJ_z, EJ_y, GJ_p — жесткости при растяжении, изгибе и кручении; $N(x)$ — внутренняя продольная сила; ρ — плотность материала; F — площадь поперечного сечения; a_x, a_y, a_z — компоненты вектора абсолютного ускорения элемента стержня; q_x, q_y, q_z — компоненты вектора $\mathbf{q}(x)$ интенсивности сил градиента гравитационного поля:

$$\begin{aligned}
q_x &= -q\cos(Z, x),\\
q_y &= -q\cos(Z, y),\\
q_z &= -q\cos(Z, z),
\end{aligned} \tag{2}$$

Будем считать, что каждый элемент стержня находится в состоянии сложного движения, тогда его абсолютное ускорение $\mathbf{a}(x)$ можно представить в виде

$$\mathbf{a}(x) = \mathbf{a}^e(x) + \mathbf{a}^c(x) + \mathbf{a}^r(x), \tag{3}$$

где $\mathbf{a}^e(x)$, $\mathbf{a}^c(x)$, $\mathbf{a}^r(x)$ — соответственно векторы переносного, кориолисового и относительного ускорений.

Ускорение $\mathbf{a}^e(x)$ вычисляется по формуле

$$\mathbf{a}^e(x) = \mathbf{a}(0) + \varepsilon \times x\mathbf{i} + \omega \times (\omega \times x\mathbf{i}), \tag{4}$$

где $\mathbf{a}(0)$ — абсолютное ускорение точки O_n; ω, ε — соответственно векторы угловой скорости и углового ускорения подвижной системы координат $O_n x_n y_n z_n$ относительно системы $OXYZ$.

При реальных значениях угловой скорости ω и малых упругих смещениях u, v, w ускорением $\mathbf{a}^c(x)$ можно пренебречь.

В выражении для относительного ускорения

$$\mathbf{a}^r(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\mathbf{i} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\mathbf{j} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\mathbf{k} \tag{5}$$

первое слагаемое связано с продольными колебаниями стержней, которые оказываются более высокочастотными по сравнению с поперечными и происходят с малыми амплитудами. Поэтому для рассматриваемых динамических явлений процесс распространения продольных возмущений в стержне можно считать мгновенным, ускорением $\partial^2 u/\partial t^2$ пренебречь и продольную силу $N(x)$ подсчитывать из первого уравнения системы (1), которое при принятых предположениях принимает квазистатическую форму. Такими же соображениями определяется и вид четвертого уравнения системы (1), в котором не учитываются силы инерции крутильных колебаний элементов стержня.

С учетом (2)—(5) приведем систему (1) к виду

$$EF\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho F[a_x(0) - (\omega_y^2 + \omega_z^2)x] + q\cos(Z, x),$$

$$EJ_z\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \frac{\partial}{\partial x}\left[N(x)\frac{\partial v}{\partial x}\right] =$$
$$= -\rho F\left[a_y(0) + \varepsilon_z x + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right] - q\cos(Z, y), \qquad (6)$$
$$EJ_y\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{\partial}{\partial x}\left[N(x)\frac{\partial w}{\partial x}\right] =$$
$$= -\rho F\left[a_z(0) - \varepsilon_y x + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right] - q\cos(Z, z),$$
$$GJ_p\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} = 0.$$

Уравнения (6) кроме неизвестных полевых переменных $u(x, t)$, $v(x, t)$, $w(x, t)$, $\gamma(x, t)$ содержат также неизвестные функции времени $a_x(0)$, $a_y(0)$, $a_z(0)$, ε_y, ε_z, характеризующие ускорение начала подвижной системы координат $O_n x_n y_n z_n$ и ее угловое ускорение. Это обстоятельство должно быть учтено при постановке граничных условий.

Не снижая общности постановки задачи, принимаем для определенности, что $n-1$-й и n-й стержни соединены цилиндрическим шарниром, ось которого совпадает с осью $O_n y_n$.

Поскольку система $O_n x_n y_n z_n$ жестко связана с началом n-го стержня, при $x_n = 0$ имеем

$$u_n(0) = v_n(0) = w_n(0) = 0,$$
$$v'_n(0) = w'_n(0) = 0, \quad \gamma_n(0) = 0. \qquad (7)$$

Здесь рассматриваемые переменные помечены индексом «n», штрихом обозначено дифференцирование по x_n.

Из условий шарнирного соединения конца $n-1$-го стержня с началом n-го стержня следуют:

— условие равенства векторов реакций

$$\mathbf{R}_{n-1}(l_{n-1}) = -\mathbf{R}_n(0), \qquad (8)$$

— условие равенства векторов моментов

$$\mathbf{M}_{n-1}(l_{n-1}) = -\mathbf{M}_n(0), \qquad (9)$$

— условие равенства векторов абсолютных ускорений

$$\mathbf{a}_{n-1}(l_{n-1}) = \mathbf{a}_n(0), \qquad (10)$$

— условие, вытекающее из соотношения между угловыми ускорениями систем $O_{n-1}x_{n-1}y_{n-1}z_{n-1}$ и $O_n x_n y_n z_n$, которое для описанного способа соединения стержней может быть записано в виде

$$\varepsilon_n = \mathbf{D}[\varepsilon_{n-1},\ \dot\gamma_{n-1}(l_{n-1})\mathbf{i}_{n-1},\ \dot w'_{n-1}(l_{n-1})\mathbf{j}_{n-1},$$
$$\dot v'_{n-1}(l_{n-1})\mathbf{k}_{n-1},\ \ddot\psi_n \mathbf{j}_n]. \qquad (11)$$

Явная форма линейного оператора $\mathbf{D}$ может быть получена путем дифференцирования по времени t равенства, вытекающего из теоремы о сложении угловых скоростей при сложном движении:

$$\omega_n(0) = \omega_{n-1}(l_{n-1}) + \dot\psi_n \mathbf{j}_n,$$

с учетом соотношения

$$\omega_{n-1}(l_{n-1}) = \omega_{n-1} + \dot\gamma_{n-1}(l_{n-1})\mathbf{i}_{n-1} -$$
$$- \dot w'_{n-1}(l_{n-1})\mathbf{j}_{n-1} + \dot v'_{n-1}(l_{n-1})\mathbf{k}_{n-1}.$$

Здесь $\omega_n(0) = \omega_n$ — вектор угловой скорости базиса $\mathbf{i}_n$, $\mathbf{j}_n$, $\mathbf{k}_n$; $\omega_{n-1}(l_{n-1})$ — вектор угловой скорости трехгранника, жестко связанного с концом $x_{n-1} = l_{n-1}$ $n-1$-го упругого стержня; точками обозначено дифференцирование по времени.

Для представления равенства (8) в скалярном виде спроецируем обе его части на оси системы $O_n x_n y_n z_n$:

$$\left\|\begin{matrix} -N_{x,n}(0) \\ Q_{y,n}(0) \\ Q_{z,n}(0)\end{matrix}\right\| - \mathbf{B}^{T}_{n-1,n}\left\|\begin{matrix} -N_{x,n-1}(l_{n-1}) \\ Q_{y,n-1}(l_{n-1}) \\ Q_{z,n-1}(l_{n-1})\end{matrix}\right\| = 0.$$

Здесь $\mathbf{B}_{n-1,n} = \mathbf{A}^T_n\mathbf{A}_{n-1}$ — матрица перехода от базиса $\mathbf{i}_{n-1}$, $\mathbf{j}_{n-1}$, $\mathbf{k}_{n-1}$ к базису $\mathbf{i}_n$, $\mathbf{j}_n$, $\mathbf{k}_n$; $\mathbf{A}_n$ — матрица направляющих косинусов.

Аналогично преобразуются к скалярной форме равенства (9)—(11).

Таким образом, система (6) для n-го стержня замыкается граничными уравнениями (7)—(11).

МЕТОДИКА ПОСТРОЕНИЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

Пусть известны начальная конфигурация рассматриваемой системы

$$\varphi_n(0) = \varphi_{n,0}, \qquad \psi_n(0) = \psi_{n,0}, \qquad \theta_n(0) = \theta_{n,0},$$
$$u_n(x, 0) = u_{n,0}(x), \qquad v_n(x, 0) = v_{n,0}(x),$$
$$w_n(x, 0) = w_{n,0}(x), \qquad \gamma_n(x, 0) = \gamma_{n,0}(x),$$

начальные значения скоростей

$$\dot\varphi_n(0) = \dot\varphi_{n,0}, \qquad \dot\psi_n(0) = \dot\psi_{n,0}, \qquad \dot\theta_n(0) = \dot\theta_{n,0},$$
$$\dot u_n(x, 0) = \dot u_{n,0}(x), \qquad \dot v_n(x, 0) = \dot v_{n,0}(x),$$
$$\dot w_n(x, 0) = \dot w_{n,0}(x), \qquad \dot\gamma_n(x, 0) = \dot\gamma_{n,0}(x)$$

и заданы управляющие моменты

$$M^e_n = M^e_n(t) \ (n = 1, ..., N).$$

Для интегрирования по времени системы (6) воспользуемся неявной разностной схемой метода

Хуболта, в соответствии с которой производные некоторой функции X по времени dX/dt, d^2X/dt^2 в момент $t + \Delta t$ заменяются их конечноразностными аналогами

$$\begin{gathered}\dot{X}(t + \Delta t) = \dot{X}_{t+1} = \\ = (11X_{t+1} - 18X_t + 9X_{t-1} - 2X_{t-2})/(6\Delta t), \\ \ddot{X}(t + \Delta t) = \ddot{X}_{t+1} = \\ = (2X_{t+1} - 5X_t + 4X_{t-1} - X_{t-2})/(\Delta t)^2,\end{gathered} \tag{12}$$

где Δt — шаг интегрирования по времени, $X_{t+1} = X(t + \Delta t)$, $X_t = X(t)$, $X_{t-1} = X(t - \Delta t)$, $X_{t-2} = X(t - 2\Delta t)$.

С учетом (12) в момент времени $t + \Delta t$ заменим систему уравнений с частными производными (6) для n-го звена системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}EF\frac{d^2u}{dx^2}\Big|_{t+1} = \rho F a_x(0)\Big|_{t+1} + \rho F[-(\omega_y^2 + \omega_z^2)x]\Big|_{t+1} + \\ + q\cos(Z, x)\Big|_{t+1}, \\ EJ_z\frac{d^4v}{dx^4}\Big|_{t+1} - N_t\frac{d^2v}{dx^2}\Big|_{t+1} - \frac{dN}{dx}\Big|_t\frac{dv}{dx}\Big|_{t+1} + \\ + \frac{2\rho F}{\Delta t^2}v_{t+1} = -\rho F a_y(0)\Big|_{t+1} - \rho F x\varepsilon_z\Big|_{t+1} - \\ - \rho F\left[-\frac{5v_t}{\Delta t^2} + \frac{4v_{t-1}}{\Delta t^2} - \frac{v_{t-2}}{\Delta t^2}\right] - q\cos(Z, y)\Big|_{t+1}, \\ EJ_y\frac{d^4w}{dx^4}\Big|_{t+1} - N_t\frac{d^2w}{dx^2}\Big|_{t+1} - \frac{dN}{dx}\Big|_t\frac{dw}{dx}\Big|_{t+1} + \\ + \frac{2\rho F}{\Delta t^2}w_{t+1} = -\rho F a_z(0)\Big|_{t+1} + \rho F x\varepsilon_y\Big|_{t+1} - \\ - \rho F\left[-\frac{5w_t}{\Delta t^2} + \frac{4w_{t-1}}{\Delta t^2} - \frac{w_{t-2}}{\Delta t^2}\right] - q\cos(Z, z)\Big|_{t+1}, \\ GJ_p\frac{d^2\gamma}{dx^2}\Big|_{t+1} = 0.\end{gathered} \tag{13}$$

Особенность этой системы заключается в том, что составляющие ее уравнения не связаны между собой явно и зависимость друг от друга входящих в них переменных осуществляется только через граничные условия.

Будем считать, что состояние манипулятора в моменты времени t, $t - \Delta t$, $t - 2\Delta t$ известно, тогда в системе (13) неизвестными оказываются функции $u(x)$, $v(x)$, $w(x)$, $\gamma(x)$ и значения переменных $a_x(0)$, $a_y(0)$, $a_z(0)$, ε_y, ε_z в момент $t + \Delta t$. Для их определения воспользуемся методом начальных параметров. Введем обозначения для недостающих начальных значений производных от искомых функций и неизвестных параметров в правых частях уравнений системы (13)

$$\begin{gathered}C_1 = \frac{du(0)}{dx},\quad C_2 = a_x(0),\quad C_3 = \frac{d^2v(0)}{dx^2}, \\ C_4 = \frac{d^3v(0)}{dx^3},\quad C_5 = a_y(0),\quad C_6 = \varepsilon_z,\quad C_7 = \ddot{\psi}_n, \\ C_8 = \frac{d^3w(0)}{dx^3},\quad C_9 = a_z(0),\quad C_{10} = \varepsilon_y,\quad C_{11} = \frac{d\gamma(0)}{dx}.\end{gathered} \tag{14}$$

Здесь и далее опущены нижние индексы $t+1$ у искомых переменных.

Представим решение системы (13) в виде

$$\begin{aligned}u(x) &= u^1(x)C_1 + u^2(x)C_2 + u^q(x), \\ v(x) &= v^3(x)C_3 + v^4(x)C_4 + v^5(x)C_5 + \\ &\quad + v^6(x)C_6 + v^q(x), \\ w(x) &= w^7(x)C_7 + w^8(x)C_8 + w^9(x)C_9 + \\ &\quad + w^{10}(x)C_{10} + w^q(x), \\ \gamma(x) &= \gamma^{11}(x)C_{11},\end{aligned} \tag{15}$$

где $u^q(x)$, $v^q(x)$, $w^q(x)$ — решения задач Коши для уравнений (13) при однородных начальных условиях и $a_x(0) = a_y(0) = a_z(0) = 0$, $\varepsilon_y = \varepsilon_z = 0$; $u^1(x)$, ..., $\gamma^{11}(x)$ — решения задач Коши для уравнений (13), приведенных к такому виду и при таких начальных условиях, что для каждого i-го решения только одной из искомых переменных группы (14), соответствующей константе C_i, задано единичное значение, а всем остальным параметрам и правым частям уравнений (13) присвоены нулевые значения. Указанные задачи Коши решались путем интегрирования системы (13) методом Рунге — Кутта 4 порядка.

Располагая функциями $u^1(x)$, ..., $w^q(x)$ для каждого из N упругих звеньев, можно, используя по тринадцать условий сопряжения (8)—(11) каждых смежных звеньев и равенство $M_{y,n}(0) = M_n^e$, вытекающее из условия наличия в n-ом соединительном шарнире внешнего управляющего момента, а также условия в начале $x_1 = 0$ первого звена и условия на конце $x_N = l_N$ последнего звена, подсчитать $13N$ параметров, содержащих $11N$ констант C_i, N угловых ускорений вращений вокруг осей O_nx_n ($n = 1, ..., N$) и N угловых ускорений $\ddot{\varphi}_i$, $\ddot{\psi}_k$, $\ddot{\theta}_l$ относительных поворотов примыкающих звеньев.

Определив состояние упругого манипулятора в момент времени $t + \Delta t$, можно переходить к следующему шагу вычислительного процесса и определять состояние системы в момент $t + 2\Delta t$. Для этого вначале с помощью метода предиктор-корректор

Адамса — Башфорта на основе найденных для каждого из узлов значений φ, ψ, v, ω_x, ω_y, ω_z, ε_x, ε_y, ε_z, вычисленных в моменты времени $t + \Delta t$, t, $t - \Delta t$, $t - 2\Delta t$, подсчитываются значения этих величин в момент времени $t + 2\Delta t$. Затем на этом же шаге вычисляются матрицы $\mathbf{B}_{n-1,n}$, $\dot{\mathbf{B}}_{n-1,n}$. С помощью матриц $\mathbf{B}_{n-1,n}$ вычисляем матрицы (Накано, 1988)

$$\mathbf{A}_n = \mathbf{B}_{0,1} \cdot \mathbf{B}_{1,2} \cdots \mathbf{B}_{n-1,n}.$$

После этого, располагая состояниями системы в моменты времени $t - \Delta t$, t, $t + \Delta t$, можно по описанной выше схеме определять ее состояние в момент $t + 2\Delta t$ и т. д.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

В качестве примера, иллюстрирующего применение предложенного подхода, рассмотрим плоский упругий двузвенник, шарнирно присоединенный концом первого стержня к стабилизированной в орбитальной системе координат платформе. Два одинаковых звена равной длины l соединены между собой цилиндрическим шарниром. К концу второго звена присоединено твердое тело массы M. Выбраны следующие значения параметров системы:

$$\rho l/Eg = 3.049 \cdot 10^{-9},$$

$$J/l^2F = 3.066 \cdot 10^{-1},$$

$$\overline{m} = m/\rho lF = 8.11 \cdot 10^{-1},$$

$$\overline{q} = ql/EF = 3.666 \cdot 10^{-7}.$$

Чтобы показать, что необходимость моделирования упругого робота континуальной системой может возникать даже при сравнительно гладких управляющих воздействиях, приложенные в шарнирах управляющие моменты выберем в таком виде, в котором практически отсутствуют режимы разгона и торможения. Безразмерные значения их составляют

$$\overline{M}{}_1^e(t) = \overline{M}{}_2^e(t) = l \cdot \overline{M}{}_1^e(t)/EJ = l \cdot \overline{M}{}_2^e(t)/EJ = $$
$$= 6.179 \cdot 10^{-5}(1 - \cos 6t).$$

Состояние системы описывается углами $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ отклонения стержней от вертикали и функциями упругих прогибов стержней $w_1(x_1, t)$, $w_2(x_2, t)$. Было принято, что в исходном состоянии

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0, \qquad \dot\varphi_1(0) = \dot\varphi_2(0) = 0,$$
$$w_1(x_1, 0) = 0, \qquad w_2(x_2, 0) = 0,$$
$$\dot w_1(x_1, 0) = 0, \qquad \dot w_2(x_2, 0) = 0.$$

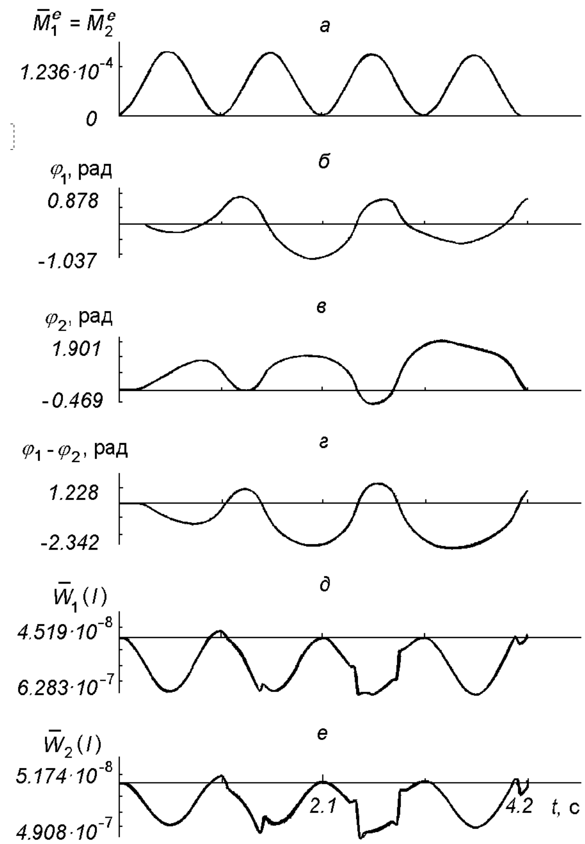

Рис. 1. Зависимости управляющего момента $M_1^e(t)$ (*а*), углов поворотов $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\varphi_1(t) - \varphi_2(t)$ (*б—г*) и упругих перемещений $\overline{w}_1$, $\overline{w}_2$ концов звеньев *1*, *2* (*д*, *е*)

Динамическое поведение системы анализировалось на отрезке времени $0 \le t \le 4.2$ с. Интегрирование по времени осуществлялось с шагом $\Delta t = 2.5 \cdot 10^{-3}$ с, при построении частных решений уравнений упругого деформирования стержней их длина разбивалась на 100 участков интегрирования.

На рис. 1 показаны функции изменения во времени управляющего момента $M_1^e(t)$, углов поворотов $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, их разности $\varphi_1(t) - \varphi_2(t)$ и упругих перемещений $\overline{w}_1 = w_1(l, t)/l$, $\overline{w}_2 = w_2(l, t)/l$ концов стержней. Можно заметить, что эти функции имеют гладкий характер за исключением кривых $\overline{w}_1(t)$, $\overline{w}_2(t)$, которые содержат участки быстрого изменения в окрестности состояния $\varphi_1(t) \approx \varphi_2(t)$, когда осевые линии стержней ориентированы вдоль одной прямой и общий момент инерции системы принимает максимальное значение.

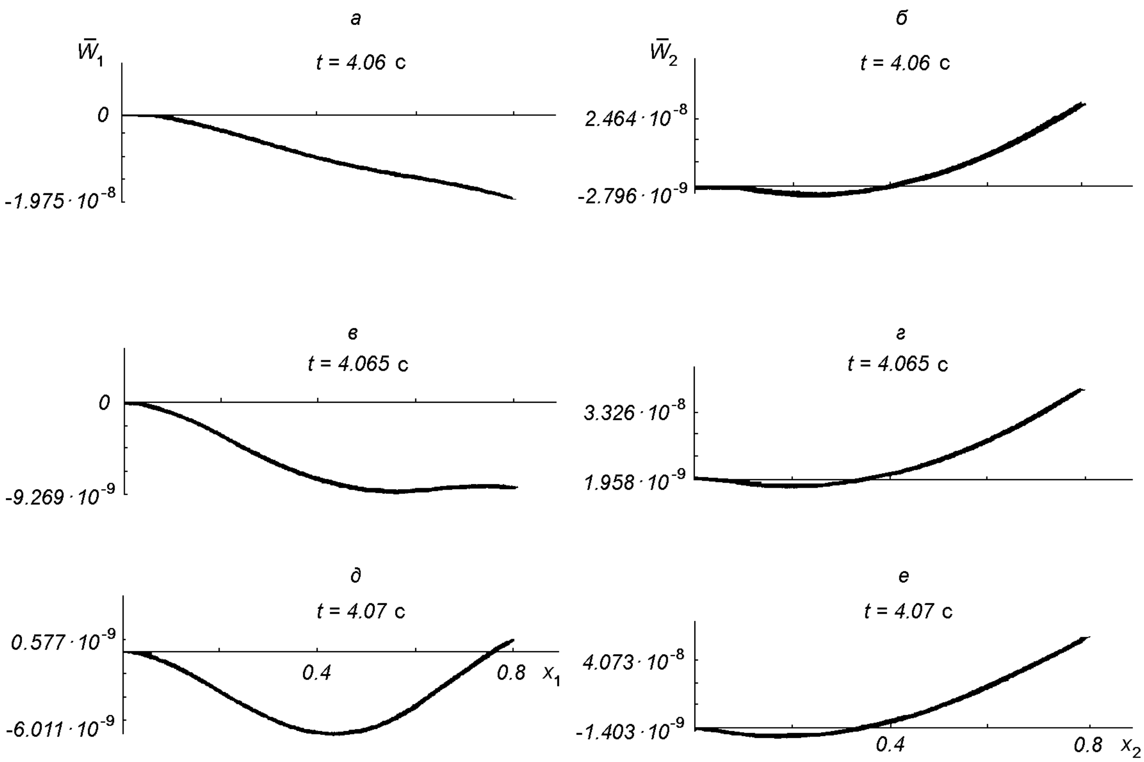

Рис. 2. Формы упругих линий $\overline{w}_1(x_1)$, $\overline{w}_2(x_2)$ звеньев в моменты времени t = 4.06 с (*а*, *б*), 4.065 с (*в*, *г*), 4.07 с (*д*, *е*)

На этих участках времени более сложный вид имеют и формы упругих линий звеньев, что особенно характерно для второго стержня. На рис. 2 показаны функции $\overline{w}_1(x_1)$, $\overline{w}_2(x_2)$, соответственно в моменты времени t = 4.06 с (*а*, *б*), 4.065 с (*в*, *г*), 4.07 с (*д*, *е*). Отметим, что в другие моменты времени (при $\varphi_1(t) \neq \varphi_2(t)$) эти кривые имеют прямое очертание и могут быть описаны малым числом аппроксимирующих параметров.

Акуленко Л. Д., Гукасян А. А. Управление плоскими движениями упругого звена манипулятора // Изв. АН СССР. Механика твердого тела.—1983.—№ 5.—С. 33—41.

Акуленко Л. Д., Михайлов С. А., Черноусько Ф. Л. Моделирование динамики манипулятора с упругими звеньями. // Изв. АН СССР. Механика твердого тела.—1981.—№ 3.—С. 118—124.

Накано Э. Введение в робототехнику. — М.: Мир, 1988.—334 с.

Гуляев В. И., Гайдайчук В. В., Кошкин В. Л. Упругое деформирование, устойчивость и колебания гибких криволинейных стержней. — К.: Наук. думка, 1992.—344 с.

Черноусько Ф. Л., Болотник Н. Н., Градецкий В. Г. Манипуляционные роботы. — М.: Наука, 1989.—367 с.

Chapnik B. V., Heppler G. R. Aplevich J. D. Modeling Impact on a One-Link Flexible Robotic Arm // IEEE Trans. Robotics and Automation.—1991.—7, N 4.—P. 479—488.

Kirk C. L., Oria A., Hammer F. Slewing Dynamics and Vibration Control of Flexible Space Shuttle Remote Manipulator // AAS // AIAA Astrodynamics Specialist Conference, Halifax, Canada, 1995.—19 p.

Wen-Jieh Wang, Shui-Shong Lu, Chen-Fa Hsu. Experiments on the Position Control of a One-Link Flexible Robot Arm // IEEE Trans. Robotics and Automation.—1989.—5, N 3.—P. 373—377.

Yossi Chait, Milan Miklavcic, Maccluer C. R., Clark J. Radcliffe. A Natural Modal Expansion for the Flexible Robot Arm Problem Via a Self-Adjoint Formulation // IEEE Trans. Robotics and Automation.—1990.—6, N 5.—P. 601—603.

DYNAMICS OF SPACE ELASTIC ROBOT-MANIPULATOR

V. I. Gouliaev and T. V. Zavrazhina

The problem about elastic vibrations of a space robot-manipulator with distributed parameters is stated. A hybrid-type system of differential equations is constructed, a technique for its solution based on the use of the Hubolt numerical method and transfer matrix is proposed. An example is considered.