Космічна наука і технологія. 1996. Т. 2. № 5-6. С. 34—37.

УДК 629.07.54

О перемещении деформируемого тела в акустической среде

В. В. Карачун

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», Київ

Надійшло до редакції 12.05.96

Робиться аналіз переміщення тіла, що деформується в акустичному середовищі під дією хвилі тиску. Визначаються граничні переміщення для деяких видів механічного зв'язку тіла з корпусом та фізичних властивостей середовища.

При решении ряда прикладных задач анализа и синтеза механических систем бортовой аппаратуры космических аппаратов возникает необходимость учета механических перемещений (деформаций) подвижных элементов под действием акустической волны давления.

Пусть волна внешнего возмущающего воздействия ограничена во времени либо затухает, а среда, в которой находится изучаемое тело, безгранична. Задачу будем решать в линейной постановке. Поэтому уравнения движения тела произвольной формы в акустической среде в проекциях на его главные центральные оси инерции для трех случаев — незакрепленного, соединенного с корпусом упругой связью, либо демпфером — будут иметь вид (Кочин и др., 1948)

$$\begin{gathered} M_{ii}\ddot{U}_{*i} + Q_i = P_i\,, \\ M_{ii}\ddot{U}_{*i} + c_i U_{*i} = P_i - Q_i\,, \\ M_{ii}\ddot{U}_{*i} + b_i\dot{U}_{*i} = P_i - Q_i\,, \qquad i = 1, ..., 6, \end{gathered} \tag{1}$$

где M_{ii} — масса тела (либо момент инерции в случае углового движения), $\ddot{U}_{*i}$ — ускорение центра масс (линейное либо угловое), Q_i — дополнительная сила (момент в случае углового движения) упругого взаимодействия перемещающейся оболочки с окружающей средой:

$$Q_i = \iint\limits_S \mathbf{q}(x, y, t)\tau_i(x, y)dS.$$

Здесь $\mathbf{q}$ — давление, вызванное перемещением тела, τ_i — единичный вектор соответствующей оси координат, c_i, b_i — соответственно коэффициент жесткости упругой связи и коэффициент демпфирования, S — поверхность тела.

Пусть поверхность тела перемещается либо деформируется так, что обобщенная координата U_k увеличивается с единичной скоростью:

$$\begin{gathered} \dot{U}_k \,|_{\,t>0} = 1, \\ \dot{U}_k \,|_{\,t<0} = 0, \\ U_m \,|_{\,m\neq k} = 0. \end{gathered} \tag{2}$$

Обобщенная сила $Q_i(t)$ определяется равенством, вытекающим из принципа суперпозиции:

$$Q_i(t) = \sum_k Q_{ik}(t) = \sum_k \int_0^t F_{ik}(t-\tau)\ddot{U}_k(\tau)d\tau, \tag{3}$$

а обобщенные силы P_i — также с помощью функций F_{ik}:

$$\begin{gathered} P_i = \sum_n M_{ni}^{\Phi}\ddot{U}_{*n}^{\Phi} + \sum_k \int_0^t F_{ik}(t-\tau)\ddot{U}_k^{\Phi}(\tau)d\tau, \\ P_i = \sum_n M_{ni}^{\Phi}\ddot{U}_{*n}^{\Phi} + \sum_k \int_0^t F_{ik}(t-\tau)\ddot{U}_k^{\Phi}(\tau)d\tau + c_n U_{*n}\,, \\ P_i = \sum_n M_{ni}^{\Phi}\ddot{U}_{*n}^{\Phi} + \sum_k \int_0^t F_{ik}(t-\tau)\ddot{U}_k^{\Phi}(\tau)d\tau + b_n\dot{U}_{*n}, \end{gathered} \tag{4}$$

где M^{Φ}_{ni} — масса фиктивного тела, которое не отделено от среды.

С учетом сказанного уравнения движения тела произвольной формы могут быть записаны в виде интегро-дифференциальных соотношений, которые после преобразований Лапласа запишутся так:

$$M_{ii}p^2U^{+}_{*i} + \sum_{k} F^{+}_{ik}p^2U^{+}_{k} = \sum_{n} M^{\Phi}_{ni}p^2U^{\Phi+}_{*n} + \sum_{k} F^{+}_{ik}p^2U^{\Phi+}_{k}, \quad (5)$$

$$M_{ii}p^2U^{+}_{*i} + \sum_{k} F^{+}_{ik}p^2U^{+}_{k} + c_iU^{+}_{*i} = \sum_{n} M^{\Phi}_{ni}p^2U^{\Phi+}_{*n} + \sum_{k} F^{+}_{ik}p^2U^{\Phi+}_{k} + c_nU_{*n}, \quad (6)$$

$$M_{ii}p^2U^{+}_{*i} + \sum_{k} F^{+}_{ik}p^2U^{+}_{k} + b_ipU^{+}_{*i} = \sum_{n} M^{\Phi}_{ni}p^2U^{\Phi+}_{*n} + \sum_{k} F^{+}_{ik}p^2U^{\Phi+}_{k} + b_npU^{+}_{*n}, \quad (7)$$

Здесь смысл индекса «+» и параметра p определяется соотношением

$$\int_0^{\infty} \Phi(t)\exp(-pt)dt = \Phi^{+}(p). \quad (8)$$

Тогда:

$$U_{*i}(t) \to U_{*i}(p) \to U^{+}_{*i}, \quad U_{*i}(0) = 0, \quad \dot{U}_{*i}(0) = 0; \quad (9)$$

$$\ddot{U}_{*i}(t) \to p^2U^{+}_{*i}, \quad F_{ik}(t) \to F^{+}_{ik}, \quad \ddot{U}_{k}(t) \to p^2U^{+}_{k}; \quad (10)$$

$$\int_0^{t} F_{ik}(t-\tau)\ddot{U}_{k}(t)d\tau = F_{ik}\ddot{U}_{k} \to F^{+}_{ik}p^2U^{+}_{k} \quad (11)$$

(по теореме Э. Бореля);

$$U^{\Phi}_{*n}(t) \to U^{\Phi+}_{*n}, \quad \ddot{U}^{\Phi}_{*n}(t) \to p^2U^{\Phi+}_{*n}, \quad \int_0^{t} F_{ik}(t-\tau)\ddot{U}^{\Phi}_{k}(t)d\tau \to F^{+}_{ik}p^2U^{\Phi+}_{k}. \quad (12)$$

Чтобы из уравнений (5)—(7) определить величины окончательных, т. е. предельных перемещений тела, достаточно воспользоваться формулой

$$\lim_{t\to\infty}\Phi(t) = \Phi_{\infty} = \lim_{p\to 0} p\Phi^{+}(p), \quad (13)$$

справедливой, если предел (не обязательно ограниченный) в ее левой части существует и выполняется условие

$$[\lim_{t\to\infty}\Phi(t)\exp(-pt)]_{p>0} = 0. \quad (14)$$

При принятом предположении об ограничении во времени внешнего возмущения и безграничности окружающей тело жидкости можно утверждать, что перемещения тела будут удовлетворять указанным условиям. Действительно, излучение волн возмущений при колебаниях тела в безграничной среде вызывает затухание колебаний. Поэтому, если они и будут иметь место, то с прекращением внешнего воздействия также должны затухать, и следовательно, перемещения тела будут стремиться к пределу. Кроме того, предусмотренное ограничение по величине исключает экспоненциальное увеличение перемещений при $t \to \infty$.

Характер взаимосвязи окончательных перемещений тела с перемещениями фиктивного тела (перемещений среды при отсутствии тела), как следует из соотношений (5)—(7), существенным образом зависит от поведения функций $[F^{+}_{ik}(p)]_{p\to 0}$ или, что то же самое, от $[F_{ik}(t)]_{t\to\infty}$.

В случае тела ограниченных размеров, в зависимости от свойств безграничной среды, можно следующим образом классифицировать функции F_{ik}.

Идеальная жидкость (без учета вязкости). Если при $t > 0$ тело движется (или деформируется) в безграничной жидкости с единичной скоростью $\dot{U}_k = 1$ ($[U_k]_{t<0} = 0$), то по прошествии достаточно большого времени, когда обтекание установится, сжимаемость жидкости уже не будет влиять на поле скоростей в достаточно большой окрестности тела и количество движения жидкости будет характеризоваться присоединенными массами m_{ik}. Движение жидкости обусловлено силами F_{ik} при $\dot{U}_k = 1$. Поэтому количество движения при $t \to \infty$ равно m_{ik}, так как $m_{ik}\dot{U}_k(t)\,|_{t\to\infty} = m_{ik} \cdot 1 = m_{ik}$.

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial t}[m_{ik}\dot{U}_k(t)]_{t\to\infty} = F_{ik}(t)\,|_{t\to\infty},$$

$$\int_0^{t} \frac{\partial}{\partial t}[m_{ik}\dot{U}_k(t)]_{t\to\infty} = \int_0^{t} F_{ik}(\tau)d\tau\,|_{t\to\infty},$$

$$m_{ik} = \int_0^{t} F_{ik}(\tau)d\tau,$$

$$m_{ik} = \lim_{t\to\infty}\int_0^{t} F_{ik}(\tau)d\tau,$$

$$m_{ik} = \int_0^{\infty} F_{ik}(\tau)d\tau.$$

Применим одностороннее преобразование Лапласа:

$$F_{ik}(t) \to F^+_{ik}(p) = \int\limits_0^\infty \exp(-pt)F_{ik}(\tau)d\tau,$$

$$\lim_{p\to 0} F^+_{ik}(p) = \lim_{p\to 0} \int\limits_0^\infty \exp(-pt)F_{ik}(\tau)d\tau,$$

$$\lim_{p\to 0} F^+_{ik}(p) = \int\limits_0^\infty F_{ik}(\tau)d\tau = m_{ik}.$$

Таким образом, в случае идеальной жидкости функции F_{ik} интегрируемы, а применение формулы (13) дает

$$\lim_{p\to 0} F^+_{ik}(p) = \int\limits_0^\infty F_{ik}(\tau)d\tau = m_{ik}\,. \tag{15}$$

Реальная жидкость. Равномерное движение в реальной жидкости будет встречать сопротивление трения α_{ik}, поэтому

$$\lim_{t\to\infty} F_{ik}(t) = \alpha_{ik}\,. \tag{16}$$

Можно утверждать, что $\alpha_{ii} > 0$. Кроме того, очевидно, что все величины сопротивления α_{ik} ограничены.

В соответствии с формулой (13)

$$\lim_{p\to 0} pF^+_{ik} = \alpha_{ik}. \tag{17}$$

Так как $\dot{U}_{*i}\,|_{t\to\infty} = \text{const}$, то $\ddot{U}_{*i}\,|_{t\to\infty} = 0$.

При установившемся процессе перемещения тела, т. е. при $t \to \infty$ силы уравновешиваются силами сопротивления α_{ik}:

$$\lim_{t\to\infty} F_{ik} = \alpha_{ik} \qquad (\alpha_{ik} > 0; \qquad \alpha_{ik} < M_{\text{огр}}).$$

Твердая упругая среда. Из соотношения

$$Q_i(t) = \sum_k Q_{ik}(t) = \sum_k \int\limits_0^t F_{ik}(t-\tau)\ddot{U}_k(\tau)d\tau$$

видно, что

$$Q_{ik}(t) \to Q^+_{ik},$$
$$F_{ik}(t) \to F^+_{ik},$$
$$\ddot{U}_k(t) \to p^2U^+_k,$$
$$\int\limits_0^t F_{ik}(t-\tau)\ddot{U}_k(\tau)d\tau \to F^+_{ik}p^2U^+_k.$$

С учетом этого можно записать

$$Q^+_{ik} = F^+_{ik}p^2U^+_k = pF^+_{ik}pU^+_k = -pF^+_{ik}(-pU^+_k) =$$
$$= [\int\limits_0^\infty \exp(-pt)F_{ik}(t)dt]'\ [\int\limits_0^\infty \exp(-pt)U_k(t)dt]' =$$
$$= [\dot{F}_{ik}] + [\dot{U}_k]^+,$$

где $F^+_{ik} \to \dot{F}_{ik}(t)$ — обощенная сила, возникающая при единичном смещении $[U_k(t)]_{t>0} = 1$ $([U_k]_{t<0} = 0$.

Тогда

$$pQ^+_{ik} = p\dot{F}^+_{ik}U^+_k,$$

$$\lim_{p\to 0} pQ^+_{ik} = \lim_{p\to 0} p\dot{F}^+_{ik} \lim_{p\to 0} U^+_k,$$

$$\lim_{p\to 0} p\dot{F}^+_{ik} = \lim_{t\to\infty} \dot{F}_{ik}(t) = \beta_{ik}\,,$$

$$\lim_{p\to 0} \dot{F}^+_{ik} = \lim_{p\to 0} p^2F^+_{ik} = \beta_{ik}\,.$$

В случае твердой упругой среды предел этой силы при $t \to \infty$ равен β_{ik} и отличен от нуля, по крайней мере при $k = i$. При этом $\beta_{ik} > 0$. Кроме того, очевидно, что все жесткости ограничены.

Формула (13), применительно к $\dot{F}_{ik}$, дает следующую зависимость:

$$\lim_{p\to 0} p^2F^+_{ik} = \beta_{ik},$$

$$\lim_{p\to 0} \dot{U}^+_k = \lim_{p\to 0} pU^+_k = \lim_{t\to\infty} U_k(t) = U_{k\infty},$$

$$\lim_{p\to 0} p^2U^+_{ki} = \lim_{p\to 0} p \lim_{p\to 0} pU^+_{ki} = \lim_{p\to 0} p \lim_{t\to\infty} U_k(t) =$$
$$= \lim_{p\to 0} p\cdot U_{k\infty} = 0.$$

Теперь можно рассмотреть предельные (при $p \to 0$) соотношения, определяющие величины окончательных перемещений тела. Если умножить все члены уравнений (5)—(7) на p^q (здесь $q = -1;\ 0;\ 1$ соответственно рассмотренным выше трем случаям состояния среды) и устремить p к нулю, то предельные соотношения будут иметь следующий вид.

Незакрепленное тело

- **Идеальная жидкость:**

$$M_{ii}U_{i\infty} + \sum_{k=1}^{6} m_{ik}U_{k\infty} + [M_{ii}[U_{*i\infty} - U_{i\infty}]] +$$
$$+ \left[\sum_{k=7}^{\infty} m_{ik}U_{k\infty}\right] = \sum_n M^{\Phi}_{ni}U^{\Phi}_{n\infty} + \sum_{k=1}^{6} m_{ik}U^{\Phi}_{k\infty} +$$
$$+ \left[\sum_n M^{\Phi}_{ni}[U^{\Phi}_{*n\infty} - U^{\Phi}_{n\infty}]\right] + \left[\sum_{k=7}^{\infty} m_{ik}U^{\Phi}_{k\infty}\right]; \tag{18}$$

- реальная жидкость:

$$\sum_{k=1}^{6}\alpha_{ik}U_{k\infty} + \left[\sum_{k=7}^{\infty}\alpha_{ik}U_{k\infty}\right] =$$
$$= \sum_{k=1}^{6} \alpha_{ik}U^{\Phi}_{k\infty} + \left[\sum_{k=7}^{\infty} \alpha_{ik}U^{\Phi}_{k\infty}\right]; \tag{19}$$

- **твердая упругая среда:**

$$\sum_{k=1}^{6} \beta_{ik} U_{k\infty} + \left[\sum_{k=7}^{\infty} \beta_{ik} U_{k\infty}\right] = \sum_{k=1}^{6} \beta_{ik} U_{k\infty}^{\Phi} + \left[\sum_{k=7}^{\infty} \beta_{ik} U_{k\infty}^{\Phi}\right]. \qquad (20)$$

Тело на упругих связях

- **Идеальная жидкость:**

  предельное перемещение отсутствует,

- **реальная жидкость:**

  предельное перемещение отсутствует,

- **твердая упругая среда:**

$$\sum_{k=1}^{6} \beta_{ik} U_{k\infty} + \left[\sum_{k=7}^{\infty} \beta_{ik} U_{k\infty}\right] + c_i U_{k\infty} = \sum_{k=1}^{6} \beta_{ik} U_{k\infty}^{\Phi} + \left[\sum_{k=7}^{\infty} \beta_{ik} U_{k\infty}^{\Phi}\right] + c_n U_{k\infty}. \qquad (21)$$

Внутреннее тело соединено с корпусом демпфером

- **Идеальная жидкость:**

  предельное перемещение отсутствует;

- **реальная жидкость:**

$$\sum_{k=1}^{6} \alpha_{ik} U_{k\infty} + \left[\sum_{k=7}^{\infty} \alpha_{ik} U_{k\infty}\right] + b_i U_{k\infty} = \sum_{k=1}^{6} \alpha_{ik} U_{k\infty}^{\Phi} + \left[\sum_{k=7}^{\infty} \alpha_{ik} U_{k\infty}^{\Phi}\right] + b_n U_{k\infty}^{\Phi}; \qquad (22)$$

- **твердая упругая среда:**

$$\sum_{k=1}^{6} \beta_{ik} U_{k\infty} + \left[\sum_{k=7}^{\infty} \beta_{ik} U_{k\infty}\right] = \sum_{k=1}^{6} \beta_{ik} U_{k\infty}^{\Phi} + \left[\sum_{k=7}^{\infty} \beta_{ik} U_{k\infty}^{\Phi}\right]. \qquad (23)$$

Слагаемые в квадратных скобках соответствуют остаточным деформациям тела (в левых частях уравнений) и фиктивного тела (в правых).

Анализ полученных результатов показывает, что упругие деформации не влияют на окончательные перемещения тела, так как величины M_{ii}, m_{ik}, α_{ik}, β_{ik} ограничены, а остаточные деформации равны нулю, вследствие чего равны нулю и члены, им соответствующие.

В том случае, когда функции F_{ik} не интегрируемы (реальная жидкость, упругая среда), масса тела и деформации внутри тела не влияют на предельные перемещения его поверхности — этот вывод следует из выражений (18)—(23), не содержащих обобщенные массы.

Если деформации упругие, то главные центральные оси, а также массы (моменты инерции) их соответственно совпадают и окончательные перемещения рассматриваемого тела и фиктивного тела (т. е. среды в отсутствии тела) равны между собой. Деформации фиктивного тела будут упругими, например, в случае плоской волны, когда все частицы среды перемещаются на одно и то же расстояние.

Отсутствие предельного перемещения тела в идеальной и реальной жидкостях с учетом упругих и демпфирующих свойств механической системы имеет тот физический смысл, что тело после прекращения внешнего воздействия совершает незатухающие колебания (Карачун, Мартыненко, 1991).

Карачун В. В., Мартыненко В. С. О перемещении абсолютно твердой оболочки под воздействием внешней акустической волны давления // Докл. АН УССР.—1991.—№ 3.—С. 48—51.

Кочин Н. Е., Кибель Н. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. — М.: ОГИЗ, 1948.—Ч. 1.—535 с.

ON THE MOTION OF A STRAINED BODY IN AN ACOUSTIC MEDIUM

V. V. Karachun

We analyze the motion of a body of an arbitrary form in an acoustic medium for various physical and mechanical conditions in a liquid which surrounds the body. We estimate the extreme dislocations and the influence of medium properties on them.