Космічна наука і технологія. 1996. Т. 2. № 5-6. С. 31—33.

УДК 629.07.54

Об одномерных механических колебаниях тела под действием акустического излучения

В. В. Карачун

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», Київ

Надійшло до редакції 12.05.96

Робиться аналіз руху тіла у рідині під дією акустичної хвилі тиску для деяких випадків пружно-в'язких властивостей механічної системи.

Установлено, что при положительной плавучести тела ($M < M^0$) окончательное перемещение его под действием акустической волны больше, а при отрицательной — меньше перемещения частиц идеальной жидкости (Карачун, Мартыненко, 1991). Вместе с тем в реальной жидкости, как оказалось, масса тела не оказывает влияния на величину перемещений. Под реальной подразумевается вязкая жидкость.

Кажущееся противоречие объясняется тем, что при $t > T$ тело положительной плавучести, хотя бы и медленно (при малом трении), но получив большее, чем жидкость, перемещение, возвратится назад настолько, что его перемещение сравняется с перемещением частиц жидкости. Точно так же и тело отрицательной плавучести в конце концов достигнет перемещения, равного перемещению частиц среды.

Сказанное можно проиллюстрировать таким примером. Пусть абсолютно твердое тело массы M перемещается в реальной, для простоты несжимаемой, жидкости вдоль одной координатной оси. Функции, определяющие перемещение среды и ее взаимодействие с рассматриваемым телом, имеют вид:

$$F = m\delta_1(t) + \alpha \,;$$

$$U^{\Phi *} = \dot{U}^{\Phi} = \delta_0(t) - \delta_0(t - 1),$$

где m — присоединенная масса; α — коэффициент трения; $\delta_1(t)$ — дельта-функция Дирака, представляющая мгновенное значение импульса акустического воздействия и обладающая, как известно, свойствами —

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta_1(t)dt = \begin{cases} 1, \ t \in (a, b); \\ 0, \ t \notin (a, b) \end{cases}$$

или:

$$\int\limits_{0}^{a} \delta_1(t)dt = \begin{cases} 1, \ t \in (0, a); \\ 0, \ t \notin (0, a), \end{cases}$$

причем

$$\delta_1(-t) = -\delta_1(t),$$

$$\delta_1(t) \to 1,$$

$$\delta_1(t = \tau) \to \exp(-p\tau),$$

$\delta_0(t)$ — единичная функция Хевисайда. Связь между функциями Дирака и Хевисайда определяется равенством

$$\dot{\delta}_0(t) = \delta_1(t),$$

причем

$$\delta_0(t) \to \frac{1}{p};$$

$$\delta_0(t - \tau) \to \frac{\exp(-p\tau)}{p}.$$

Тогда очевидно, что

$$\ddot{U}^{\Phi} = \delta_1(t) - \delta_1(t-1).$$

Имеют место равенства:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\delta_1(t)dt = \varphi(0) > 0;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t-\tau)\delta_1(\tau)d\tau = \varphi(t) * \delta_1(t) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau)\delta_1(t-\tau)dt = \varphi(t);$$

$$\int_{a}^{b} \varphi(t)\delta_1(t-t_0)dt = \begin{cases} \varphi(t_0), & t \in (a, b); \\ 0, & t \notin (a, b). \end{cases}$$

Эти соотношения позволяют получить следующие уравнения движения тела (Карачун, Мартыненко, 1991):

- с учетом упругих и демпфирующих свойств системы:

$$M\ddot{U}(t) + b\dot{U}(t) + c_1U(t) + \int_0^t [m\delta_1(t-\tau)+\alpha]\ddot{U}(\tau)d\tau =$$

$$= M^0[\delta_1(t) - \delta_1(t-1)] +$$

$$+ \int_0^t [m\delta_1(t-\tau) + \alpha]\,[\delta_1(\tau) - \delta_1(\tau-1)]d\tau; \quad (1)$$

- с учетом только демпфирующих свойств системы:

$$(M+m)\ddot{U}(t) + (\alpha+b)\dot{U}(t) =$$

$$= (M^0+m)[\delta_1(t) - \delta_1(t-1)] +$$

$$+ \alpha[\delta_0(t) - \delta_0(t-1)]; \quad (2)$$

- с учетом только упругих свойств системы:

$$(M+m)\ddot{U}(t) + \alpha\,\dot{U}(t) + c_1U(t) =$$

$$= (M^0+m)[\delta_1(t) - \delta_1(t-1)] +$$

$$+ \alpha[\delta_0(t) - \delta_0(t-1)]; \quad (3)$$

- с учетом только трения тела о среду:

$$M\ddot{U}(t) + \int_0^t [m\delta_1(t-\tau) + \alpha]\ddot{U}(\tau)d\tau =$$

$$= M^0[\delta_1(t) - \delta_1(t-1)] +$$

$$+ \int_0^t [m\delta_1(t-\tau) + \alpha]\,[\delta_1(\tau) - \delta_1(\tau-1)]d\tau, \quad (4)$$

где M^0 — масса вытесненной телом жидкости; b и c_1 — приведенные коэффициенты демпфирования и упругости системы.

Рассмотрим вначале самый общий случай движения тела в реальной (вязкой) жидкости с учетом упругих и демпфирующих свойств системы. На природе возникновения этих сил подробно останавливаться не будем, констатируя, что при внешнем акустическом воздействии они проявляются при поступательном перемещении тела в сторону распространения акустической волны давления, полный импульс которой считается ограниченным по величине.

Уравнение (1) после одностороннего преобразования Лапласа в операторной форме имеет вид

$$(M+m)p^2U + (\alpha+b)pU + c_1U =$$

$$= (M^0+m)[1 - \exp(-p)] + \alpha p^{-1}[1 - \exp(-p)].$$

Отсюда

$$U(p) = \frac{M^0+m}{M+m}\frac{1}{(p+\nu)^2+\omega^2} +$$

$$+ \frac{\alpha}{M+m}\frac{1}{p[(p+\nu)^2+\omega^2]} - \left\{\frac{M^0+m}{M+m} \times\right.$$

$$\left. \times \frac{1}{(p+\nu)^2+\omega^2} + \frac{\alpha}{M+m}\;\frac{1}{p[(p+\nu)^2+\omega^2]}\right\} \times$$

$$\times \exp(-p),$$

где

$$\frac{c_1}{M+m} - \nu^2 = \omega^2;$$

$$\nu = \frac{\alpha+b}{2(M+m)}.$$

Переходя к оригиналу, получаем:

$$U(t) = \frac{1}{\omega}\exp(-\nu t)\left(\frac{M^0+m}{M+m} - \frac{\alpha\nu}{c_1}\right) \times$$

$$\times [\sin\omega t - \exp(\nu)\sin\omega(t-1)] -$$

$$- \frac{\alpha}{c_1}\exp(-\nu t)[\cos\omega t - \exp(\nu)\cos\omega(t-1)] +$$

$$+ \frac{\alpha}{c_1}[\delta_0(t) - \delta_0(t-1)]. \quad (5)$$

Рассуждая аналогично, получаем

- решения уравнения (2):

$$U(t) = \frac{2}{(\alpha+b)^2}[M^0 + m - \alpha(M+m)]\exp(-\nu t) \times$$

$$\times [\mathrm{sh}\nu t - \exp(\nu)\mathrm{sh}\nu(t-1)] + \frac{\alpha}{\alpha+b}, \quad (6)$$

$$\nu = \frac{\alpha+b}{2(M+m)},$$

- решения уравнения (3):

$$U(t) = \frac{1}{\lambda}\exp(-\mu t)\left(\frac{M^0 + m}{M + m} - \frac{\alpha\mu}{c_1}\right) \times$$
$$\times\ [\sin\lambda t - \exp(\mu)\sin\lambda(t-1)] -$$
$$-\frac{\alpha}{c_1}\exp(-\mu t)[\cos\lambda t - \exp(\mu)\cos\lambda(t-1)] +$$
$$+\frac{\alpha}{c_1}[\delta_0(t) - \delta_0(t-1)], \qquad (7)$$
$$\lambda^2 = \frac{c_1}{M+m} - \mu^2;$$

- решения уравнения (4):

$$U(t) = \left\{t - \frac{M - M^0}{\alpha}[1 - \exp(-\nu_1 t)]\delta_0(t) - \right.$$
$$\left.\left\{-t - 1 - \frac{M - M^0}{\alpha}[1 - \exp(-\nu_1(t-1))]\right\}\delta_0(t-1).\right. \qquad (8)$$

Если в формуле (8) сомножители $1 - \exp(-\nu_1 t)$ и $1 - \exp[-\nu_1(t-1)]$ представить в виде разложения в ряд при $t \geq 1$, то получим выражение

$$U(t) = \frac{M^0 + m}{M + m} + \frac{M^0 - m}{M + m}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \times$$
$$\times\,\nu_1^n\frac{t^{n+1} - (t-1)^{n+1}}{(n+1)!}, \qquad (9)$$

целиком совпадающее с формулой, выведенной Новожиловым (1962). Отсюда следует, что при достаточно малом трении и большом T ($\nu_1 T \ll 1$) в период времени $1 \leq t \leq T$ перемещение незакрепленного тела под действием акустической волны определяется первым слагаемым, т. е.:

$$\lim_{t\to\infty}U(t) = \frac{M^0 + m}{M + m} \Rightarrow U_\infty = \frac{M^0 + m}{M + m}U_\infty^\Phi,$$

так как при единичном смещении $U_k(t)\,|_{t>0} = 1$ для обобщенной силы $\dot{F}_{ik}(t)$ в реальной жидкости имеет место равенство:

$$\lim_{t\to\infty}U(t) = U_\infty = \lim_{t\to\infty}U^\Phi = U_\infty^\Phi = 1;$$

$$U_\infty = U_\infty^\Phi = 1.$$

В дальнейшем с увеличением времени t перемещение U тела уменьшается, если $M < M^0$, и увеличивается, если $M > M^0$.

Положив в формулах (5)—(8) $t \to \infty$, получим значения предельных перемещений:

- с учетом демпфирующих и упругих свойств системы —

$$U_\infty = \lim_{t\to\infty}U(t) = \lim_{t\to\infty}\frac{\alpha}{c_1}[\delta_0(t) - \delta_0(t-1)] = \frac{\alpha}{c_1};$$

- с учетом только демпфирующих свойств —

$$U_\infty = \lim_{t\to\infty}U(t) = \frac{\alpha}{\alpha + b};$$

- с учетом только упругих свойств —

$$U_\infty = \lim_{t\to\infty}U(t) = \lim_{t\to\infty}\frac{\alpha}{c_1}[\delta_0(t) - \delta_0(t-1)] = \frac{\alpha}{c_1};$$

- с учетом только трения о среду —

$$U_\infty = \lim_{t\to\infty}U(t) = \frac{M^0 + m}{M + m}, \qquad \nu_1 T \ll 1.$$

В этих формулах (в правых частях) значения предельного перемещения частиц среды при $t \geq 1$ равны единице, т. е. имеет место равенство: $U_\infty^\Phi = 1$.

Карачун В. В., Мартыненко В. С. О перемещении абсолютно твердой оболочки под воздействием внешней акустической волны давления // Докл. АН УССР.—1991, № 3.—С. 48—51.

Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. — Л.: Судпромгиз, 1962.—430 с.

ON THE UNIVARIATE MECHANICAL OSCILLATIONS OF A BODY UNDER THE INFLUENCE OF ACOUSTIC EMISSION

V. V. Karachun

We analyze the univariate motion of a body in an acoustic medium under the influence of disturbing pressure wave. The laws of such motion in time have been established.