

УДК 621.317.44

Измерительные контуры и селектирующие функции для определения тессеральных мультиполей интегральным преобразованием магнитных сигнатур

С. А. Волохов, А. В. Кильдишев

Відділення магнетизму Інституту електродинаміки НАН України, Харків

Надійшла до редакції 14.10.96

Робота присвячена розв'язку задачі метрологічного забезпечення магнітної чистоти космічного апарата. Доведена можливість виділення тессеральних мультиполів даного технічного об'єкта методом інтегральних перетворень магнітних сигнатур, отриманих при переміщенні апарата через поперечні контури запропонованої конфігурації.

ВВЕДЕНИЕ

Постоянное совершенствование систем навигации и ориентации космических аппаратов (Боевкин, Гуревич, 1976; Конюхов и др., 1995), а также оснащение современных геофизических спутников высокочувствительным магнитометрическим оборудованием (Коцаренко и др., 1995) порождает ряд проблем, связанных с собственным внешним магнитным полем (ВМП) таких объектов. Все более актуальной становится задача уменьшения данного ВМП для обеспечения магнитной чистоты КА, и как следствие, повышения их эксплуатационных и метрологических характеристик.

Для решения задач исследования и снижения внешнего магнитного поля любых энергонасыщенных технических объектов и комплектующего оборудования традиционно используется мультипольная модель источника магнитного поля и постоянно развиваются методы определения ее параметров (Волохов и др., 1996). Так для определения компонента магнитного момента диполя (Ильченко, Ковш, 1989; Окон, Семенов, 1989), широко используется метод интегрирования магнитных сигнатур, то есть зависимостей сигналов магнитометрических

датчиков от изменения текущего положения объекта. В качестве магнитометрических датчиков, как правило, используются контурные катушки, располагаемые на цилиндрической поверхности, охватывающей трассу движения объекта.

Для измерения зональной (продольной) компоненты магнитного момента используется плоский контур, ортогональный направлению движения исследуемого КА, для измерения секториальных (поперечных) компонент — поперечные контуры различной конфигурации. Лучшими из них являются селектирующие контуры, состоящие из двух последовательно-встречно включенных секций, расстояние между которыми изменяется по закону $L_x = L \cos \varphi$ (для определения компоненты M_{11}^g) и $L_x = L \sin \varphi$ (для определения компоненты M_{11}^h). В этом случае площадь сигнатуры равна соответствующей компоненте магнитного момента:

$$\begin{Bmatrix} M_{11}^g \\ M_{11}^h \end{Bmatrix} = c_{11} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{Bmatrix} \Phi_{11}^g \\ \Phi_{11}^h \end{Bmatrix} dx,$$

где c_{11} — постоянный коэффициент, x — расстояние от объекта до плоскости измерительного контура.

Использование аналогичных селекционирующих контуров с закономерностями изменения длины по образующей цилиндра $L_x = L \cos m\varphi$ (для компоненты с индексом g и $L_x = L \sin m\varphi$ (для компоненты с индексом h) позволяет выделить секториальные компоненты магнитного момента мультиполя порядка и степени n :

$$M_{nn} = c_{nn} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{nn}(x) dx, \quad (1)$$

где соответствующие индексы g и h в (1) и далее опущены.

Настоящая работа посвящена вопросу определения тессеральных компонент магнитного момента мультиполя (в дальнейшем — тессеральных мультиполей) интегрированием преобразованных магнитных сигнатур, полученных при перемещении КА через селекционирующие контуры описанной конфигурации.

ПОТОКОСЦЕПЛЕНИЕ ОБЪЕКТА С ПОПЕРЕЧНЫМИ КОНТУРАМИ

Геометрия селекционирующего контура. Геометрическое представление взаимного расположения объекта и поверхности поперечного магнитоизмерительного контура представлено на рис. 1.

Положение объекта относительно измерительного контура определяется координатами: $x' = R \cos \theta$, $y' = R \sin \varphi \sin \theta$, $z' = R \cos \varphi \sin \theta$. Трасса движения может быть условно окружена цилиндром радиуса

r . Измерительный контур (на рисунке приведен контур для выделения пространственной гармоники 3-го порядка) образован двумя встречно включенными секциями, расположенными на поверхности цилиндра. Размер L_x , измерительного контура по образующей цилиндра изменяется в зависимости от цилиндрической координаты φ по закону $L_x = L \cos(k\varphi)$, причем его максимальный размер L на порядок меньше радиуса цилиндра. Полученный контур ориентирован в поперечном направлении. Аналогичный контур, ортогональный первому по φ может быть получен поворотом на $\pi/(2k)$ вокруг оси x . Для такого контура $L_x = L \sin(k\varphi)$.

Магнитный поток через селекционирующий контур. Магнитный поток через соответствующий поперечный контур равен

$$\Phi_k(x) = \int_S B_r(x) dS, \quad (2)$$

причем

$$dS = r^2 \alpha \begin{Bmatrix} \cos(k\varphi) \\ \sin(k\varphi) \end{Bmatrix} d\varphi,$$

где $\alpha = L/r$.

Учитывая, что

$$B_r = B_R \sin \theta + B_\theta \cos \theta,$$

$$B_R = -\mu_0 \frac{\partial U}{\partial R},$$

$$B_\theta = -\mu_0 R^{-1} \frac{\partial U}{\partial \theta},$$

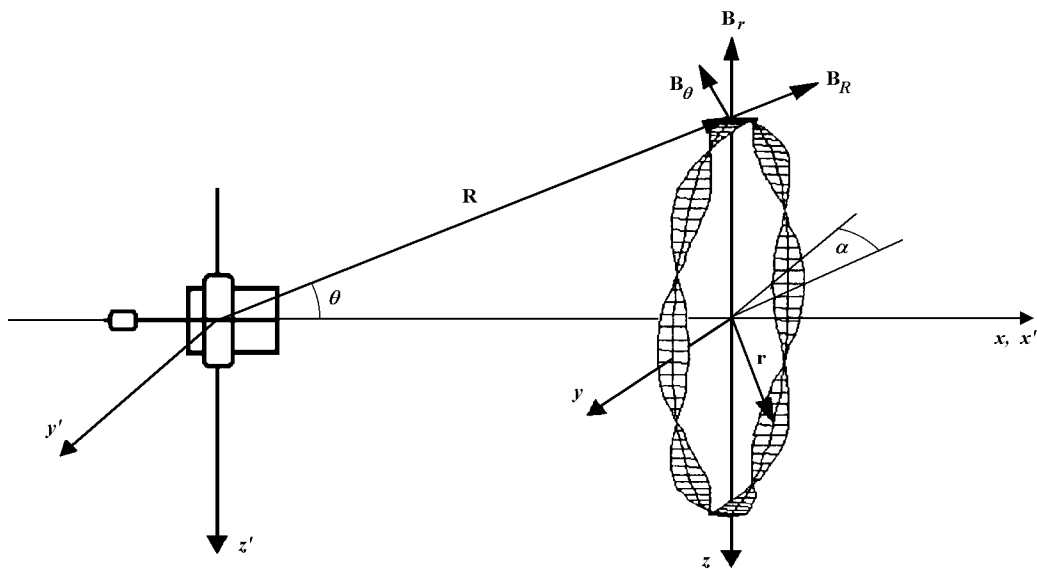


Рис. 1. Геометрическое представление взаимного расположения объекта и магнитоизмерительного контура

и, представляя потенциал U в виде ряда Гаусса, а также используя подстановки $t = \cos\varphi$, $R = r/\sqrt{1-t^2}$ для получения нормализованных сигнатур, т. е. сигнатур, переведенных из отрезка длиной от $-\infty$ до $+\infty$ в отрезок длиной от -1 до $+1$, находим из (2), что магнитный поток через измерительный контур равен

$$\Phi_k(t) = \frac{\mu_0\alpha}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{nk}(t), \quad (3)$$

где n -ю составляющую потока определяет выражение:

$$\Phi_{nk}(t) = M_{nk} \frac{(1-t^2)^{(n+1)/2}}{r^n} \times [(n+1)P_n^k(t) - (n-k+1)tP_{n+1}^k(t)]. \quad (4)$$

Здесь $M_{nk} = 4\pi g_{nk}$ — компонента магнитного момента мультиполя порядка n и степени k , $P_n^k(t)$ и $P_{n+1}^k(t)$ — присоединенные функции Лежандра.

Для выделения из (1) и (2) тессеральных мультиполей необходимо отыскать такую селективирующую функцию $f_n^k(t)$, при умножении сигнатуры на которую выполнялось бы равенство

$$M_{nk} = c_{nk} \int_{-1}^1 \Phi_k(t) f_n^k(t) (\sqrt{1-t^2})^{-3} dt. \quad (5)$$

Здесь

$$(\sqrt{1-t^2})^{-3} dt = dx, \quad k = 1, \dots, (n-1).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕССЕРАЛЬНЫХ МУЛЬТИПОЛЕЙ ПО МАГНИТНЫМ СИГНАТУРАМ

В приложении показан пример селективирующей функции $f_m^k(t)$ и доказана справедливость равенства

$$\int_{-1}^1 \Phi_{nk}(t) f_m^k(t) (\sqrt{1-t^2})^{-3} dt = 0, \quad n > m, \quad (6)$$

Равенство нулю интеграла (6) при $n < m$ обеспечено описанным ранее методом обработки сигнатур (Волохов и др., 1996).

Используя известные соотношения (Абрамовиц, Стиган, 1979)

$$tP_{n+1}^k(t) = \frac{1}{2n+3} \times$$

$$\times [(n-k+2)P_{n+2}^k(t) + (n+k+1)P_n^k(t)],$$

получим преобразованное выражение (4):

$$\Phi_{nk}(t) = M_n^k \frac{(1-t^2)^{(n+1)/2}}{r^n} [aP_n^k(t) - bP_{n+2}^k(t)],$$

где коэффициенты a и b определены выражениями

$$a = n+1 - \frac{[(n+1)^2 - k^2]}{2n+3},$$

$$b = \frac{(n-k+2)(n-k+1)}{2n+3}.$$

Выбирая в качестве селективирующей функцию

$$f_m^k(t) = r^m (\sqrt{1-t^2})^{-m} P_m^k(t) \quad (7)$$

и учитывая интегральное выражение ортогональности функций Лежандра:

$$\int_{-1}^1 \frac{P_\eta^\xi(t) P_\eta^\lambda(t)}{1-t^2} dt = \begin{cases} \frac{(\eta+\xi)!}{\xi(\eta-\xi)!}, & \xi = \lambda, \\ 0, & \xi \neq \lambda, \end{cases} \quad (8)$$

получим, что интеграл в (5) с учетом (7) и (8) равен

$$M_n^k \frac{\mu_0\alpha}{4r^{n-m}} \sum_{n=m}^{\infty} \int_{-1}^1 \left[\frac{aP_n^k(t)P_m^k(t) - bP_m^k(t)P_{n+2}^k(t)}{1-t^2} \right] dt = \begin{cases} \frac{\mu_0\alpha}{4} \frac{(n+k)!}{(n-k)!} M_n^k, & n = m, \\ 0, & n > m, \end{cases}$$

что доказывает справедливость равенства (5) и определяет постоянную c_n^k :

$$c_n^k = \frac{4(n-k)!}{\mu_0\alpha(n+k)!}.$$

МАГНИТНЫЕ СИГНАТУРЫ ТЕССЕРАЛЬНЫХ МУЛЬТИПОЛЕЙ

Данные потоки определяются из выражения (4) и приводятся к следующему виду:

$$\Phi_{nk}(t) = \frac{\mu_0\alpha M_n^k}{4r^n (1-t^2)^{\frac{-2n-1}{2}}} \left(\sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-k+2}{2}\right)} K_{n,k}^q \right). \quad (9)$$

Здесь

$$K_{n,k}^q = \frac{(2n-2q+2)! [(n-k+1)(n-2q-k+2) + 2q(n+1)]}{(-1)^q 2^{n+1} (n-q+1)! (n-2q-k+2)! q! t^{-n+2q+k-2}},$$

$E[\nu]$ — целая часть числа ν .

Нормализованные сигнатуры тессеральных мультиполей $M_{4,k} = 1$, $k \in [1; 3]$, представленные на рис. 2, получены для контура, изображенного на

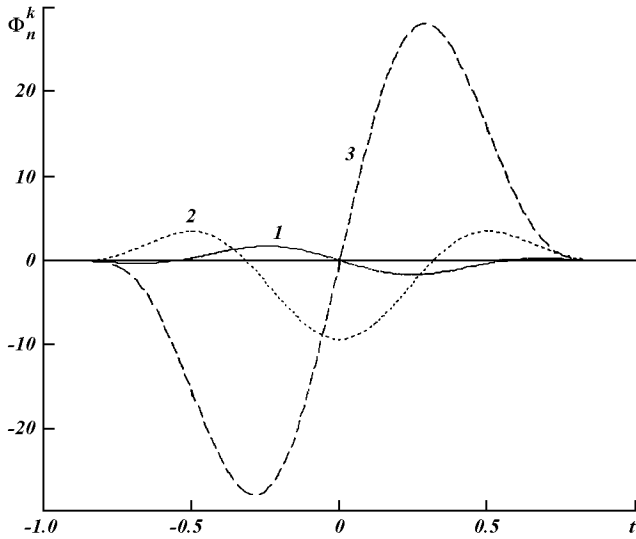


Рис. 2. Нормализованные сигнатуры трех тессеральных мультиполей четвертого порядка (номера кривых соответствуют k)

рис. 1 при значениях $r = 1$ и $\alpha = 1$.

Из выражения (9) следуют соответствующие частные выражения для магнитных потоков:

$$\Phi_{41} = -\frac{5}{2} \frac{\mu_0 a M_{41}}{4r^4} (1-t^2)^3 (63t^5 - 77t^3 + 18t),$$

$$\Phi_{42} = -\frac{15}{2} \frac{\mu_0 a M_{42}}{4r^4} (1-t^2)^{3.5} (63t^4 - 56t^2 + 5),$$

$$\Phi_{43} = -105 \frac{\mu_0 a M_{43}}{4r^4} (1-t^2)^4 (9t^3 - 6t).$$

ВЫВОДЫ

Для решения задач метрологического обеспечения магнитной чистоты КА использованы и развиты методы сферического гармонического анализа, основанные на интегральных преобразованиях магнитных сигнатур этого объекта.

Получены как общие, так и частные аналитические выражения для магнитных потоков и магнитных сигнатур тессеральных мультиполей объекта при его движении через поперечные селективирующие контуры.

Показано, что определение тессеральных мультиполей объекта интегральным преобразованием его магнитных сигнатур становится возможным при использовании предложенной селективирующей функции и выбранной конфигурации измерительных контуров.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Выберем в качестве селективирующей следующую функцию:

$$f_m^k(t) = AP_m^k(t)(\sqrt{1-t^2})^{-m}, \quad m > k.$$

Рассмотрим определенный интеграл с симметричными пределами:

$$I_n^m = \int_{-1}^1 \Phi_{nk}(t) f_m^k(t) (\sqrt{1-t^2})^{-3} dt, \quad n > m. \quad (\text{П1})$$

Существует два варианта, определяемые четностью разности $n - m$.

- **I вариант.** Пусть n и m образуют нечетную разность. В таком случае выражение (П1) равно нулю вследствие интегрирования нечетной функции, ограниченной на симметричном интервале.
- **II вариант.** Пусть n и m образуют четную разность: $n - m = 2p$, где $p = 1, 2, \dots, \infty$.

Выражение (П1) примет вид:

$$I_{m+2p}^m = \int_{-1}^1 \Phi_{m+2p}^k(t) f_m^k(t) (\sqrt{1-t^2})^{-3} dt, \quad m > k. \quad (\text{П2})$$

Произведение функций Лежандра в (П2) допускает переразложение в отрезки ряда (Ерофеевко, 1981), что дает возможность записать

$$I_{m+2p}^m = \sum_{q=2p}^{2(m+p)} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{p-1} [\alpha_q P_q(t) + \beta_q t P_{q+1}(t)] dt \quad (\text{П3})$$

где α_q, β_q — постоянные коэффициенты переразложения.

Воспользуемся известным равенством (Градштейн, Рыжик, 1963):

$$\int_{-1}^1 t^\lambda P_\eta(t) dt = 0, \quad \eta > \lambda. \quad (\text{П4})$$

Слагаемые ряда в (П3) всегда соответствуют равенству в (П4), так как $q > 2p - 2$. Следовательно, интеграл (П3) всегда соответствует выражению (П4) и также равен нулю. Объединяя оба варианта, подтвердим справедливость следующего равенства

$$\int_{-1}^1 \Phi_{nk}(t) f_m^k(t) (\sqrt{1-t^2})^{-3} dt = 0, \quad n > m.$$

Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. — М.: Мир, 1979.—832 с.

Боевкин В. Н., Гуревич Ю. Г. Ориентация искусственных спутников в гравитационных и магнитных полях. — М.:

- Наука, 1976.—304 с.
- Волохов С. А., Добродеев П. Н., Ивлева Л. Ф., Кильдишев А. В. Пространственный гармонический анализ внешнего магнитного поля технического объекта // Технич. электродинамика.—1996.—№ 2.—С. 3—9.
- Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Физматгиз, 1963.—1100 с.
- Ерофеев В. Т. Теоремы сложения и решение краевых задач математической физики. — Минск, 1981.—33 с.
- Ильченко М. М., Ковш Ю. В. Установка для измерения магнитных моментов в широком диапазоне // Тез. докл. VII Всесоюз. конф. «Проблемы магнитных измерений и магнитоизмерительной аппаратуры». — Л.: ВНИИМ им. Д. И. Менделеева, 1989.—С. 158—159.
- Конюхов С. Н. Научно-технические направления разработок космических аппаратов КБ «Южное» им. М. К. Янгеля // Космічна наука і технологія.—1995.—1, № 1.—С. 12—34.
- Коцаренко М. Я., Корепанов В. С., Івченко В. М. Дослідження іоносферних провісників землетрусів (експеримент «Попередження» // Космічна наука і технологія.—1995.—1, № 1.—С. 96—99.
- Окон П. И., Семенов В. Г. Исследование метода интегрирования магнитного потока для измерения поперечных компонент магнитного момента // Совершенствование методов и средств поверки магнитоизмерительной аппаратуры, используемой для контроля качества магнитных материалов. — Л.: Энергоатомиздат, 1989.—С. 59—73.

MEASURING LOOPS AND SELECTIVE FUNCTIONS FOR TESSERAL MULTIPOLE DETERMINATION BY INTEGRAL TRANSFORMS OF MAGNETIC SIGNATURES

S. A. Volokhov and A. V. Kil'dishev

We report a solution for the problem of metrological support of spacecraft magnetic purity. A new method is suggested for the separation of spacecraft tesseral harmonics by integral transforms of the magnetic signatures received by spacecraft dragging through transverse measuring loops of a certain configuration.