

УДК 629.7.05

## Магнитная система управления угловым движением микроспутника

Д. В. Лебедев, А. И. Ткаченко, Ю. Н. Штепа

Институт кибернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, Київ

*Надійшла до редакції 21.10.96*

---

Розглядається алгоритмічне забезпечення для системи керування орієнтацією та стабілізацією малого КА (мیکроспутника), побудованої з використанням виключно геомагнітних ефектів як у вимірювальній підсистемі, так і в підсистемі керування. Швидкий розв'язок задачі орієнтації та стабілізації при довільному початковому кутовому положенні апарата та значних кутових швидкостях досягається за допомогою ефективних алгоритмів оцінки стану та керування.

---

Задача управління угловим движением малого искусственного спутника Земли — микроспутника (МС) осложняется жесткими ограничениями, налагаемыми на массу, габариты и энергопотребление бортового оборудования. Представляет интерес решение этой задачи, использующее магнитное поле Земли как в качестве источника информации о движении аппарата относительно центра масс, так и для формирования управляющих воздействий. Известные решения указанной задачи или ее отдельных аспектов с использованием чисто магнитных эффектов в сочетании с действием гравитационного поля (Hodgart, 1988; Psiaki et al., 1990) предполагают определенную степень близости МС к желаемому положению равновесия либо некоторую точность задания начальной ориентации МС. Реальность таких предположений сомнительна в случае достаточно больших угловых скоростей, приобретаемых аппаратом в момент отделения от носителя.

Рассматриваемая здесь задача управления схематически формулируется следующим образом: используя только установленные на МС магнитометры, измеряющие вектор индукции магнитного поля Земли, и магнитные исполнительные органы, обеспечить приведение МС из свободного вращения с

недоступными непосредственному измерению сравнительно большими угловыми скоростями и произвольной неизвестной начальной ориентацией в заданное положение относительного равновесия на орбите и последующую стабилизацию этого положения.

Решение этой задачи достигается с помощью алгоритма оценки параметров углового движения МС, обладающего быстрой сходимостью в широкой области значений оцениваемых неизвестных при ограниченной информации о возмущающих факторах, и эффективных законов управления ориентацией МС.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть МС, схематизируемый моделью твердого тела, обращается по круговой орбите вокруг Земли, совершая движение относительно центра масс под действием гравитационного момента  $M_g$ , управляющего момента  $M_u$  и недоступного учету малого возмущающего момента  $M_r$ .

Направим по главным центральным осям инерции МС оси координатного трехгранника хуз, с которым сопоставим ортонормированный базис Е.

Введем правый ортогональный трехгранник  $\xi\eta\zeta$  (орбитальный базис  $\mathbf{J}$ ) с ортами  $\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3$ , вращающийся с постоянной угловой скоростью  $\omega_*$  в инерциальном пространстве (эволюцией орбиты пренебрегаем). Орт  $\mathbf{j}_1$  базиса  $\mathbf{J}$  направим по касательной к орбите в сторону движения МС; орт  $\mathbf{j}_2$ , ортогональный плоскости орбиты, направим так, что обращение МС по орбите, наблюдаемое с конца оси  $\eta$ , происходит против часовой стрелки. Единичный вектор  $\mathbf{j}_3$  совпадает с направлением геоцентрической вертикали. Тогда  $\omega_* = \omega_0 \mathbf{j}_2$ , где  $\omega_0$  — угловая скорость орбитального движения.

Взаимное положение трехгранников  $хуз$  и  $\xi\eta\zeta$  условимся характеризовать единичным кватернионом  $\Lambda = \lambda_0 + \lambda$  со скалярной частью  $\lambda_0$  и векторной частью  $\lambda = \{\lambda_i\}$  ( $i = 1, 2, 3$ ). По условию нормировки  $\lambda_0^2 + \|\lambda\|^2 = 1$  (здесь и ниже  $\|x\|$  — евклидова норма вектора  $x$ ).

Динамику углового (сферического) движения МС будем описывать уравнениями

$$\mathbf{I}\dot{\omega} + \omega \times \mathbf{I}\omega = \mathbf{M}_g + \mathbf{M}_u + \mathbf{M}_r, \quad (1)$$

$$2\dot{\Lambda} = \Lambda \cdot \omega - \omega_* \cdot \Lambda. \quad (2)$$

В уравнении (1)  $\omega$  — вектор абсолютной угловой скорости МС, заданный в базисе  $\mathbf{E}$ . Матрица инерции  $\mathbf{I}$  имеет диагональный вид; ее элементы  $I_x, I_y, I_z$  для определенности связаны соотношением  $I_y \geq I_x > I_z$ . Векторы-отображения  $\omega$  и  $\omega_*$  в (2) трактуются как кватернионы с нулевыми скалярными частями;  $\cdot$  — знак умножения кватернионов.

Гравитационный момент  $\mathbf{M}_g$ , действующий на МС, обращающийся по круговой орбите в ньютоновском центральном поле сил, задается соотношением

$$\mathbf{M}_g = 3\omega_0^2 \mathbf{e}_R \times \mathbf{Ie}_R, \quad (3)$$

где  $\mathbf{e}_R$  — представление в базисе  $\mathbf{E}$  орта  $\mathbf{j}_3$  геоцентрической вертикали.

Магнитные исполнительные органы системы управления МС формируют управляющий момент  $\mathbf{M}_u$ , связанный с вектором индукции магнитного поля Земли  $\mathbf{B}$  и вектором магнитного момента системы управления  $\mathbf{L}$  соотношением

$$\mathbf{M}_u = \mathbf{L} \times \mathbf{B}. \quad (4)$$

Структуру магнитного момента  $\mathbf{L}$  зададим в виде

$$\mathbf{L} = \{L_i\} = \{l_i \mu_i\} \quad i = 1, 2, 3. \quad (5)$$

Здесь  $l_i$  — постоянные коэффициенты; координаты  $\mu_i$  вектора управления  $\mathbf{u}$  принимают значения из

трехмерного единичного куба  $U$ :

$$\mathbf{u} \in U = \{\mathbf{u}: |\mu_i| \leq 1; i = 1, 2, 3\}. \quad (6)$$

Введем вектор относительной угловой скорости  $\mathbf{y}$ , полагая

$$\mathbf{y} = [y_1, y_2, y_3]^T = \omega - \omega_0 \mathbf{e}_N, \quad (7)$$

где  $\mathbf{e}_N$  — представление орта  $\mathbf{j}_2$  нормали к плоскости орбиты в базисе  $\mathbf{E}$  (индекс  $T$  — символ транспонирования).

Учитывая выражения (3) и (7), запишем уравнения (1), (2) в параметрах относительного движения

$$2\dot{\Lambda} = \Lambda \cdot \mathbf{y}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{I}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{y} \times \mathbf{I}\mathbf{y} = & \omega_0^2 (3\mathbf{e}_R \times \mathbf{Ie}_R - \mathbf{e}_N \times \mathbf{Ie}_N) - \\ & - \omega_0 [\mathbf{I}(\mathbf{e}_N \times \mathbf{y}) + \mathbf{y} \times \mathbf{Ie}_N + \mathbf{e}_N \times \mathbf{I}\mathbf{y}] + \mathbf{M}_u + \mathbf{M}_r. \end{aligned} \quad (9)$$

Векторы  $\mathbf{e}_R$  и  $\mathbf{e}_N$  связаны с компонентами  $\lambda_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) кватерниона  $\Lambda$  равенствами

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_R = \begin{bmatrix} 2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2) \\ 2(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_0\lambda_1) \\ \lambda_0^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{e}_N = \begin{bmatrix} 2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_0\lambda_3) \\ \lambda_0^2 - \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2 \\ 2(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_0\lambda_1) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (10)$$

Из четырех устойчивых положений относительного равновесия

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{e}_R &= [0, 0, \pm 1]^T, \\ \mathbf{e}_N &= [0, \pm 1, 0]^T, \end{aligned}$$

которые при  $I_y > I_x > I_z$  и  $\mathbf{M}_u = \mathbf{M}_r = \mathbf{0}$  имеет МС на круговой орбите в ньютоновском центральном поле сил (Белецкий, 1975), будем рассматривать положение равновесия, отвечающее режиму трехосной ориентации МС в орбитальной системе координат:

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{e}_R &= [0, 0, 1]^T, \\ \mathbf{e}_N &= [0, 1, 0]^T, \end{aligned}$$

или с учетом соотношений (10)

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{0}, \\ \Lambda &= \Lambda_* = \{\pm 1, 0, 0, 0\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Предполагается, что тремя магнитометрами измеряются координаты  $B_i$  вектора  $\mathbf{B}$  в базисе  $\mathbf{E}$ ;

кроме того, на борту МС имеется модель геомагнитного поля, заданная проекциями вектора  $\mathbf{B}$  на оси базиса  $\mathbf{J}$ .

Под задачей управления угловым движением МС будем понимать отыскание управляющих воздействий  $u_i = u_i(t, \Lambda, \mathbf{y})$  ( $i = 1, 2, 3$ ), которые обеспечивают асимптотическую устойчивость невозмущенного движения (11) в силу уравнений (8), (9) при  $M_r = 0$ . Назовем эту задачу, следуя работе Красовского (1966), задачей стабилизации и сформулируем следующую задачу управления: располагая информацией о векторе геомагнитной индукции  $\mathbf{B}$ , заданном в базисе  $\mathbf{E}$ , и его представлением в орбитальной системе координат  $\xi\eta\zeta$ , обеспечить стабилизацию режима (11) трехосной ориентации МС при произвольном начальном угловом положении аппарата и наличии ограничения (6) на параметры управления.

## 2. АЛГОРИТМЫ УПРАВЛЕНИЯ

Вопрос о возможности стабилизации движения (11), связанный со свойством управляемости системы (8), (9) в окрестности указанного движения, решается положительно, поскольку выполненный Лебедевым и Ткаченко (1996) анализ свидетельствует о локальной управляемости исследуемой системы при любом наклонении орбиты  $i \neq 0$ .

Синтез алгоритмов управления осуществим вторым методом Ляпунова в два приема: из решения кинематической задачи ориентации (Бранец, Шмыглевский, 1973) найдем требуемый закон изменения угловой скорости МС, а затем с учетом динамических уравнений движения объекта вокруг центра масс завершим синтез, указав условия, выполнение которых гарантирует асимптотическую устойчивость исследуемого режима движения МС.

Пусть отклонение текущего углового положения МС от заданного режима ориентации характеризуется вектором  $\mathbf{x}$ . Координаты его в задаче трехосной ориентации суть компоненты векторной части  $\lambda$  кватерниона  $\Lambda$ , а в задаче одноосной ориентации — разности координат единичных векторов  $\mathbf{s}$  и  $\xi$ , занимающих неизменное положение в орбитальных осях и в связанной системе координат соответственно (Лебедев, Ткаченко, 1991). Мету упомянутого отклонения зададим в виде положительно-определенной функции  $\rho(\mathbf{x})$ . Зададимся также законом изменения производной функции  $\rho(\mathbf{x})$  по времени  $t$  в силу кинематических уравнений движения, например, вида

$$\dot{\rho}(\mathbf{x}) = -\alpha W(\mathbf{x}), \quad (12)$$

который гарантирует асимптотическую устойчивость положения равновесия  $\mathbf{x} = 0$ .

В выражении (12)  $\alpha$  — положительная постоянная,  $W(\mathbf{x})$  — положительно-определенная функция (при выполнении условий теоремы Барбашина — Красовского (Барбашин, 1970) допустима неотрицательность функции  $W(\mathbf{x})$ ).

Условие (12) положим в основу выбора требуемого закона изменения вектора относительной угловой скорости  $\mathbf{y}$ , рассматриваемого при решении кинематической задачи ориентации как управление.

Множество законов  $\mathbf{y}_*$  изменения угловой скорости  $\mathbf{y}$ , доставляющих решение кинематической задаче, формируется в результате задания конкретных множеств функций  $\rho(\mathbf{x})$  и  $W(\mathbf{x})$ .

Исследуя задачу трехосной ориентации, примем  $\rho(\Lambda) = 2(1 - |\lambda_0|) \equiv 2[1 - (1 - \lambda^T \lambda)^{1/2}]$ . Тогда из условия (12) следует, что искомый вектор  $\mathbf{y}_*$  удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{y}_*^T \lambda = -\alpha W(\Lambda) \text{sign} \lambda_0 \quad (13)$$

и определяется, например, выражением

$$\mathbf{y}_* = -\alpha W(\Lambda) \text{sign} \lambda_0 / (1 - \lambda_0^2) + \mathbf{c}, \quad (14)$$

в котором произвольный вектор  $\mathbf{c}$  ортогонален векторной части кватерниона  $\Lambda$ .

В формулах (13), (14) под  $\text{sign} \lambda_0$  понимается функция, равная 1 при  $\lambda_0 \geq 0$  и равная  $-1$  при  $\lambda_0 < 0$ .

Особая точка  $|\lambda_0| = 1$  в (14) исключается соответствующим выбором функции  $W(\Lambda)$ . Так, приняв  $W(\Lambda) = 1 - \lambda_0^2$ , приходим к известному (Лебедев, 1974) закону изменения вектора  $\mathbf{y}$ :

$$\mathbf{y}_* = -\alpha \lambda \text{sign} \lambda_0 \quad (15)$$

(здесь и ниже принимается  $\mathbf{c} = 0$ ).

Задание же функции  $W(\Lambda) = \rho(\Lambda)$  приводит к иному закону:

$$\mathbf{y}_* = -\frac{2\alpha \lambda \text{sign} \lambda_0}{1 + |\lambda_0|}. \quad (16)$$

Хотя дифференциальные системы (8), в которых управления  $\mathbf{y}$  выбираются в виде (15) либо (16), асимптотически эквивалентны (Демидович, 1967), важно отметить, что алгоритм (16) наделяет режим  $\Lambda = \Lambda_*$  трехосной ориентации свойством экспоненциальной устойчивости. Действительно, дифференцируя по времени в силу уравнений (8) условие нормировки кватерниона  $\Lambda$  и учитывая выражение (16), приходим к неравенству

$$\frac{d\|\lambda\|}{dt} = -\frac{\alpha|\lambda_0|}{1+|\lambda_0|}\|\lambda\| \leq -\frac{1}{2}\alpha\|\lambda\|,$$

из которого следует искомый результат:

$$\|\lambda(t)\| \leq \|\lambda(t_0)\| \exp[-1/2\alpha(t-t_0)] \quad (t > t_0).$$

При этом область

$$\|\lambda(t_0)\| \leq 1 \quad (17)$$

является областью экспоненциального притяжения (Фурасов, 1977) невозмущенного движения  $\Lambda = \Lambda_*$ .

Алгоритмы (15), (16) можно получить и при ином задании функций  $\rho(\Lambda)$  и  $W(\Lambda)$ . Так, к алгоритму (16) приводят также функции  $\rho(\Lambda) = 1 - \lambda_0^2$ ,  $W(\Lambda) = 2|\lambda_0|(1 - |\lambda_0|)$ . Однако при таком выборе указанных функций для отыскания области экспоненциального притяжения в виде (17) необходимо привлечение теоремы Барбашина — Красовского.

Кинематическую задачу управления одноосной ориентацией МС сформулируем как задачу отыскания вектора  $y = y_*$ , наделяющего невозмущенное движение  $s = \xi$  системы

$$\dot{s} = s \times y \quad (18)$$

свойством асимптотической устойчивости.

В качестве меры возмущения (отклонения текущего положения МС от состояния  $s = \xi$ ) примем функцию  $\rho(s, \xi) = 1/2\|s - \xi\|^2 \equiv 1 - \xi^T s$ .

Множество векторов  $y_*$ , которые, как следует из соотношения (12), решают задачу, представим в виде

$$y_* = -\frac{\alpha W(s, \xi)(s \times \xi)}{\|s \times \xi\|^2}. \quad (19)$$

Выражение (19) записано с точностью до вектора, ортогонального вектору  $\zeta = s \times \xi$ .

Как пример выбора функций  $W(s, \xi)$ , конкретизирующих структуру алгоритмов управления одноосной ориентацией МС, укажем следующие две функции:  $W_1(s, \xi) = (1 + \xi^T s)\rho(s, \xi)$  и  $W_2(s, \xi) = \rho(s, \xi)$ . Первая приводит к встречающемуся (Зубов и др., 1978; Лебедев, Ткаченко, 1991) управлению

$$y_* = -\alpha(s \times \xi); \quad (20)$$

вторая же функция формирует управление

$$y_* = -\frac{\alpha(s \times \xi)}{1 + \xi^T s}, \quad (21)$$

обеспечивающее экспоненциальную устойчивость

режима  $s = \xi$  во всей области изменения вектора  $s$ , кроме точки  $s = -\xi$ .

Рассматривая МС как своего рода «исполнительный орган», организуем его управляемое движение относительно центра масс таким образом, чтобы обеспечить выполнение условия  $y = y_*$ . Реализация этого условия — сущность второго этапа синтеза управления.

Учитывая, что магнитная система управления реализует только составляющую требуемого значения управляющего момента  $M_*$ , ортогональную вектору геомагнитной индукции  $B$ , представим момент  $M_u$  в виде соотношения

$$\begin{aligned} M_u &= M_* - b(b^T M_*), \\ b &= B / \|B\|. \end{aligned} \quad (22)$$

Введем новую переменную  $Y = y - y_*$ . В параметрах  $\Lambda$  и  $Y$  уравнения возмущенного движения МС (8), (9) запишутся:

$$\begin{aligned} 2\dot{\Lambda} &= \Lambda \cdot (Y + y_*), \\ \dot{Y} + Y \times Y &= M_* + \Psi(t, \Lambda, Y), \\ \Psi(t, \Lambda, Y) &= F(\Lambda, Y) - b(b^T M_*), \end{aligned} \quad (23)$$

где вектор-функция  $F(\Lambda, Y)$  в области  $H = \{\lambda, Y, t: \|\lambda\| \leq 1, \|Y\| \leq Y_0, 0 \leq t < \infty\}$  разлагается в ряд по степеням указанных аргументов, начиная с квадратичных членов; кроме того  $F(\Lambda_*, 0) = 0$ .

Следует отметить, что при  $M_u = 0$  положению равновесия системы (8), (9) отвечает точка  $\Lambda = \Lambda_*$ ,  $Y = 0$  системы уравнений (23).

Рассмотрим систему первого приближения

$$\begin{aligned} 2\dot{\Lambda} &= \Lambda \cdot (Y + y_*), \\ \dot{Y} + Y \times Y &= M_*. \end{aligned} \quad (24)$$

Считая, что вектор  $M_*$  имеет три независимые координаты, из условия асимптотической устойчивости невозмущенного движения  $\Lambda = \Lambda_*$ ,  $Y = 0$  найдем управляющий момент  $M_*$ .

Охарактеризуем меру близости текущего состояния системы (24) к режиму  $\Lambda = \Lambda_*$ ,  $Y = 0$  функцией Ляпунова вида

$$V(\Lambda, Y) = 1/2 Y^T Y + \beta \|\lambda\|^2 \quad (25)$$

( $\beta$  — положительная постоянная).

Если вектор  $y_*$  в первом уравнении системы (24) принять в виде (16), то производная  $\dot{V}(\Lambda, Y)$  в силу уравнений (24) определяется соотношением

$$\dot{V}(\Lambda, Y) = Y^T M_* + \beta \lambda_0 Y^T \lambda - \frac{2\alpha\beta|\lambda_0| \|\lambda\|^2}{1 + |\lambda_0|}. \quad (26)$$

Для решения сформулированной задачи стабилизации достаточно соответствующим выбором вектора  $M_*$  добиться определенной отрицательности правой части выражения (26).

Определим управляющий момент  $M_*$ , например, равенством

$$M_* = -kY, \quad k > 0 \quad (27)$$

(без потери общности считаем  $k$  скаляром).

Воспользуемся легко проверяемым неравенством

$$-az^2 + bz \leq -\frac{a}{2}z^2 + \frac{b^2}{2a},$$

справедливым при  $a > 0$  и  $b \geq 0$ . С помощью этого неравенства и формулы (27) для управляющего момента  $M_*$  выражение (26) преобразуем к виду

$$\dot{V}(\Lambda, Y) \leq -1/2 k \|Y\|^2 - \beta(\alpha - \beta/(2k)) \|\lambda\|^2 \quad (28)$$

где коэффициент  $k$  выбирается из условия

$$k > \beta/(2\alpha).$$

Учитывая отмеченное выше свойство вектор-функции  $F(\Lambda, Y)$  и управление  $M_*$  в форме (27), можно утверждать, что в области  $H$  функция  $\Psi(t, \Lambda, Y)$  удовлетворяет условию Липшица по переменным  $\lambda_i, Y_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) (постоянную Липшица обозначим через  $S$ ).

Таким образом, для уравнений первого приближения (24) существует положительно-определенная квадратичная форма (25), полная производная которой по времени на движениях (24) с управлением (27) удовлетворяет неравенству (28). Правые части выражений (25) и (28) — квадратичные формы с постоянными коэффициентами, а вектор-функция  $\Psi(t, \Lambda, Y)$  возмущенной системы (23) удовлетворяет условию Липшица. Следовательно, при достаточно малой постоянной  $S$  управление (27), которому удобно придать вид

$$M_* = -k \left( y + \frac{2\alpha\lambda \operatorname{sign}\lambda_0}{1 + |\lambda_0|} \right), \quad (29)$$

гарантирует асимптотическую устойчивость тривиального решения  $\Lambda = \Lambda_*, Y = 0$  уравнений возмущенного движения (23) (Демидович, 1967).

Найдем требуемые для реализации алгоритма (29) значения параметров управления  $u_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), учитывая особенности функционирования системы управления с магнитными исполнительными органами и ограничение  $u \in U$ .

Будем искать вектор  $u$  параметров управления как псевдорешение уравнения

$$\Phi(B)L_* = -M_* \quad (30)$$

относительно вектора  $L_* = \{L_i^*\}$ . Здесь и далее  $\Phi(r)$  — кососимметрическая  $(3 \times 3)$ -матрица, которая ставится в соответствие вектору  $r \in R^3$  посредством равенства  $r \times p = \Phi(r)p$ , записанного в системе координат хуз.

С учетом (27) в качестве решения уравнения (30) принимается вектор

$$L_* = -k\Phi^+(B)Y,$$

где  $\Phi^+(B)$  — псевдообратная матрица, определяемая равенством

$$\Phi^+(B) = -\Phi(B)/\|\Phi(B)\|^2$$

Принимая во внимание структуру (5) вектора  $L$  и область его определения (6), искомые значения параметров управления  $u_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) находим по формулам

$$u_i = \sigma L_i^* / l_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (31)$$

Параметр  $\sigma$  в выражении (31) равен 1, если  $\varphi = \max_i \{ |L_i^*| / l_i \} \leq 1$ , либо  $\sigma_*$ , если  $\varphi > 1$ , где  $\sigma_*$  — наибольшее значение параметра  $\sigma$  из диапазона  $0 < \sigma \leq 1$ , при котором  $u \in U$ .

Приведенная процедура учета ограничения  $u \in U$  не нарушает асимптотической устойчивости невозмущенного движения  $\Lambda = \Lambda_*, Y = 0$ . Действительно, производная  $\dot{V}(\Lambda, Y)$  в рассматриваемом случае удовлетворяет оценке

$$\begin{aligned} \dot{V}(\Lambda, Y) &\leq Q(\Lambda, Y) = \\ &= -1/2\Sigma_* k \|Y\|^2 - \beta(\alpha - \beta/(2\Sigma_* k)) \|\lambda\|^2, \end{aligned}$$

в которой

$$\Sigma_* = \min_i \sigma_*(t),$$

а  $Q(\Lambda, Y)$  при  $k > \beta/(2\alpha\Sigma_*)$  — отрицательно-определенная квадратичная форма с постоянными коэффициентами. Остальные же условия, выполнение которых гарантирует асимптотическую устойчивость положения равновесия  $\Lambda = \Lambda_*, Y = 0$  системы (23), не нарушаются.

Найденные таким образом параметры управления  $u_i$ , будучи подставленными в выражения (5), (4), формируют управляющий момент в виде (22).

Повторяя аналогичные рассуждения при исследовании задачи стабилизации режима одноосной ориентации МС в орбитальной системе координат,

можно утверждать, что управление

$$\mathbf{M}_* = -k(\mathbf{y} - \mathbf{y}_*), \quad (32)$$

сформированное с учетом выражения (20) или (21), обеспечивает невозмущенному движению МС  $\mathbf{s} = \xi$ ,  $\mathbf{y} = \mathbf{0}$  асимптотическую устойчивость. Вывод справедлив только для тех режимов одноосной ориентации МС, которые являются положениями равновесия системы уравнений (18), (9).

### 3. ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ

Непрерывным элементом решения задачи, сформулированной в предыдущем пункте, является определение параметров движения, фигурирующих в законе управления, по измерениям вектора геомагнитного поля. Для оценки названных параметров можно использовать рассматриваемый ниже алгоритм, структурно подобный алгоритму фильтрации из (Psiaki et al., 1990). Он предназначен для оценивания угловой скорости и параметров ориентации МС, а также постоянной составляющей возмущающего момента, действующего на МС, при произвольном и неизвестном начальном отклонении трехгранника  $\text{хуз}$  от  $\xi\eta\zeta$ .

Реализация алгоритма оценивания включает обычные для дискретной фильтрации этапы прогноза и обработки измерений. Этап прогноза состоит в общем случае из нескольких шагов численного интегрирования уравнений движения МС относительно центра масс:

$$\dot{\mathbf{N}} = \frac{1}{2}(\mathbf{N} \cdot \omega' - \omega_* \cdot \mathbf{N}), \quad (33)$$

$$\dot{\omega}' = \mathbf{I}^{-1}(\mathbf{I}\omega' \times \omega' + \mathbf{M}_s) + \mathbf{m}', \quad \dot{\mathbf{m}}' = \mathbf{0},$$

где  $\mathbf{N} = \nu_0 + \nu$  — единичный кватернион, используемый как оценка кватерниона  $\Lambda$ ;  $\omega'$  — оценка вектора  $\omega$ ;  $\mathbf{M}_s \in \mathbb{R}^3$  — аппроксимация суммы всех доступных учету моментов, действующих на МС, сформированная с использованием решения системы (33);  $\mathbf{m}' \in \mathbb{R}^3$  — оценка вектора  $\mathbf{m} = \mathbf{I}^{-1}\mathbf{M}_t$ , где  $\mathbf{M}_t = \text{const}$  — неизвестный возмущающий момент. Орбита МС здесь предполагается низкой, но не обязательно круговой. Начальные условия для интегрирования уравнений (33) можно задать в виде  $\mathbf{N}(t_0) = \{1, 0, 0, 0\}$ ,  $\omega'(t_0) = \{0, \omega_0, 0\}$ ,  $\mathbf{m}'(t_0) = \mathbf{0}$ .

Точность, с которой решение системы (33) аппроксимирует искомые параметры движения, охарактеризуем посредством вектора ошибок  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^9$ ,  $\mathbf{w}^T = [\mu^T \Delta\omega^T \Delta\mathbf{m}^T]$ , где  $\Delta\omega = \omega' - \omega$ ,  $\Delta\mathbf{m} = \mathbf{m}' - \mathbf{m}$ , а  $\mu$  — векторная часть кватерниона  $\mathbf{M}$ , задающего ошибку определения ориентации:  $\mathbf{M} = \mu^0 + \mu =$

$= \bar{\Lambda} \cdot \mathbf{N}$ . Чертой отмечается сопряженный кватернион. Линеаризованные уравнения ошибок имеют вид

$$\dot{\mu} = -\Phi(\omega_E)\mu + \frac{1}{2}\Delta\omega,$$

$$\Delta\dot{\omega} = \mathbf{G}(\omega_E)\Delta\omega - 6\omega_0^2\mathbf{G}(\mathbf{e}_R)\Phi(\mathbf{e}_R)\mu + \Delta\mathbf{m}, \quad (34)$$

$$\Delta\dot{\mathbf{m}} = \mathbf{0},$$

где  $\mathbf{G}(\omega) = \mathbf{I}^{-1}[\Phi(\mathbf{I}\omega) - \Phi(\omega)\mathbf{I}]$ . В обозначениях Егорова (1992) при  $\omega_E = [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]^T$

$$\mathbf{G}(\omega_E) = \begin{bmatrix} 0 & \beta_1\omega_3 & \beta_1\omega_2 \\ \beta_2\omega_3 & 0 & \beta_2\omega_1 \\ \beta_3\omega_2 & \beta_3\omega_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (35)$$

$$\beta_1 = \frac{I_y - I_z}{I_x},$$

$$\beta_2 = \frac{I_z - I_x}{I_y},$$

$$\beta_3 = \frac{I_x - I_y}{I_z}.$$

Интегрирование уравнений (33) сопровождается вычислением  $(9 \times 9)$ -матрицы  $\mathbf{P}$  по формуле

$$\mathbf{P}(t_{k+1}) = \mathbf{F}_{k+1}\mathbf{P}(t_k)\mathbf{F}_{k+1}^T,$$

где  $(9 \times 9)$ -матрица  $\mathbf{F}_{k+1} = \mathbf{F}(t_{k+1}, t_k)$  — переходная матрица системы (34) на шаге интегрирования  $[t_k, t_{k+1}]$ .

Обработка измерений, чередующаяся с этапами прогноза, предусматривает оценку элементов вектора  $\mathbf{w}$  по показаниям бортовых магнитометров и коррекцию решения системы (33). Представим показания магнитометров в виде вектора  $\mathbf{n} = [n_1 \ n_2 \ n_3]^T$ , элементы которого с точностью до аддитивных погрешностей измерений равны проекциям вектора  $\mathbf{V}$  на оси трехгранника  $\text{хуз}$ . При формировании уравнения измерений находится вектор  $\mathbf{z} = [z_1 \ z_2 \ z_3]^T = \mathbf{n} - \mathbf{n}^*$ , где  $\mathbf{n}^* = \bar{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{V}^* \cdot \mathbf{N}$ ;  $\mathbf{V}^*$  — гиперкомплексное представление вектора  $\mathbf{V}$  в орбитальной системе координат. Учитывая правила сложения поворотов, заданных кватернионами (Бранец, Шмыглевский, 1973), получаем уравнение измерений

$$\mathbf{z} = -(\mathbf{n} + \mathbf{n}^*) \times \varphi, \quad \varphi = \mu/\mu^0. \quad (36)$$

Уравнение (36) при  $\mu^0 \neq 0$  является точным. Однако при  $\mu^0 = 0$  выражение (36) некорректно. Поэтому в случае, когда априори допускаются малые значения  $|\mu^0(t_0)|$ , вместо (36) следует ис-

пользовать уравнение измерений с ошибкой порядка  $\|\mu\|^3$ :

$$z = -(\mathbf{n} + \mathbf{n}^*) \times \mu. \quad (37)$$

Для получения оценки вектора  $\mathbf{w}$  предлагается последовательно обрабатывать координаты вектора  $\mathbf{z}$  по формулам, включающим элементы построения гарантированных и размытых эллипсоидальных оценок (Бакан, 1995):

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_j &= \frac{\mathbf{P}_j^- \mathbf{H}_j}{\theta + \mathbf{H}_j^T \mathbf{P}_j^- \mathbf{H}_j}, \\ \mathbf{P}_j^+ &= \sigma_j (\mathbf{P}_j^- - \mathbf{K}_j \mathbf{H}_j^T \mathbf{P}_j^-), \\ \sigma_j &= 1 + \frac{\tau z_j^2}{\theta + \mathbf{H}_j^T \mathbf{P}_j^- \mathbf{H}_j}, \end{aligned} \quad (38)$$

$$\mathbf{w}_j = \mathbf{K}_j z_j \quad (j = 1, 2, 3),$$

$$\mathbf{w}_j \in R^3, \quad \mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_3,$$

где  $\mathbf{K}_j \in R^9$  — вектор коэффициентов алгоритма оценивания при обработке  $j$ -го элемента вектора  $\mathbf{z}$ ;  $\mathbf{P}_j^-$ ,  $\mathbf{P}_j^+$  — значения матрицы  $\mathbf{P}$  до и после обработки очередной координаты  $z_j$ ;  $\mathbf{H}_j^T$  —  $j$ -я строка  $(9 \times 9)$ -матрицы  $\mathbf{H} = [-\Phi(\mathbf{n} + \mathbf{n}^*) \mathbf{0}_3 \mathbf{0}_3]$ ;  $\mathbf{0}_3$  — нулевая  $(3 \times 3)$ -матрица;  $\theta > 0$ ,  $\tau > 0$  — постоянные параметры. Последние в данном алгоритме задаются одинаковыми при обработке всех трех координат вектора  $\mathbf{z}$ , хотя стандартные отклонения шумов трех магнитометров в общем случае не одинаковы и лишь принадлежат определенному диапазону значений.

Для коррекции решения системы (33) после нахождения вектора  $\mathbf{w}$  по формулам (38) используются выражения

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^+ &= \mathbf{N}^- \cdot (\mu^0 - \mu), \\ \omega'^+ &= \omega'^- - \Delta\omega, \\ \mathbf{m}'^+ &= \mathbf{m}'^- - \Delta\mathbf{m}. \end{aligned} \quad (39)$$

Индексами «-» и «+» отмечаются значения уточняемых величин до и после коррекции.

При замене  $\mu$  на  $\varphi$  функциональная зависимость матрицы  $\mathbf{F}_{k+1}$  от  $\mathbf{N}$  и  $\omega'$  остается неизменной. Поэтому альтернативный выбор выражения (36) или (37) в качестве уравнения измерений не учитывается явным образом ни в операциях на этапе прогноза, ни при вычислениях по формулам (38), (39). Различия проявляются лишь при нахождении вектора  $\mu$  и скаляра  $\mu^0$ . Если под «измерением» подразумевается выражение (37), то  $\mu$  находится в составе вектора  $\mathbf{w}$ , а  $\mu^0$  — по формуле  $\mu^0 =$

$(1 - \|\mu\|^2)^{1/2}$ . Если же «измерением» служит выражение (36), то в составе  $\mathbf{w}$  вместо  $\mu$  оценивается вектор  $\varphi$ ; тогда  $\mu^0 = (1 + \varphi^T \varphi)^{-1/2}$ ,  $\mu = \mu^0 \varphi$ .

Можно показать (Лебедев, Ткаченко, 1995), что при использовании модели геомагнитного поля «косоый диполь» (Белецкий, Хентов, 1985) динамическая система (34), (36) вполне наблюдаема в окрестности номинального движения (11) (формально при любом наклонении орбиты, хотя количественные характеристики наблюдаемости ухудшаются для орбит, близких к экваториальным).

Приняв для анализа упрощенную модель геомагнитного поля «прямой диполь», находим, что вектор  $\mathbf{z}$  из (36) в первом приближении удовлетворяет уравнению

$$\dot{\mathbf{z}} = -\Phi(\omega)\mathbf{z} + 2\Phi(\mu)\mathbf{C}\Omega\mathbf{B}^* + \Phi(\Delta\omega)\mathbf{C}\mathbf{B}^*, \quad (40)$$

где  $\mathbf{C}$  — матрица направляющих косинусов, задающая преобразование координат из орбитальной системы в связанную;  $\Omega = [\Omega_{ij}]$  —  $(3 \times 3)$ -матрица с элементами  $\Omega_{13} = 3/2 \omega_0$ ,  $\Omega_{31} = -3\omega_0$  и остальными элементами, равными нулю.

Из (40) следует, что элемент  $\Delta\omega$  любого состояния, порождающего малый выход  $\mathbf{z}$ , обязан быть малым, в отличие от элемента  $\mu$ . Такая возможность имеется при  $I_x = I_y = I_z$ , когда в соответствии с (34), (35)  $\Delta\dot{\omega} = \Delta\mathbf{m}$ . Это означает, что в случае  $I_x = I_y = I_z$  элементы  $\Delta\omega$ ,  $\Delta\mathbf{m}$  вектора состояния системы (34), (36) хорошо наблюдаемы, координаты же вектора  $\mu$  слабо наблюдаемы.

Началу процесса оценки параметров движения должна предшествовать «настройка» — задание величин  $\theta$ ,  $\tau$  и начального значения матрицы  $\mathbf{P}$  соответственно предполагаемому диапазону характеристик случайных погрешностей магнитометров и иных параметров, влияющих на сходимость и точность оценок. Отметим, что система перечисленных параметров настройки является избыточной. Если умножить  $\theta$ ,  $\tau$  и  $\mathbf{P}(t_0)$  на один и тот же положительный скаляр, то структура формул (38) сохраняется, а значения  $\mathbf{K}_j$  и оценка  $\mathbf{w}$  практически не изменяются. Такое преобразование, по-видимому, может быть обобщено применительно к некоторым иным методам рекуррентной оценки состояния.

Рассмотренный алгоритм оценивания, учитывающий в выражениях (36) или (37) величины до второго порядка малости, имеет структуру линейного фильтра, за исключением неизбежного интегрирования нелинейных уравнений (33) и кватернионных операций в (39). Переход от  $\omega'$  к оценке вектора  $\mu$  не вызывает затруднений.

Анализ показывает, а моделирование подтверж-

дает, что рассмотренный выше алгоритм с уравнением измерений  $z = n - n^* = -2n^* \times \mu$  обеспечивает приемлемую точность оценивания величин  $\omega$ ,  $\Lambda$  в малой окрестности номинального режима (11) при использовании любых двух из описанных выше трех магнитометров (двух элементов вектора  $z$ ). Это обстоятельство может быть использовано для повышения надежности системы определения параметров углового движения МС.

#### 4. ОПИСАНИЕ И РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

При моделировании рассмотренных выше процедур оценивания и управления сферическим движением МС использовалась модель магнитного поля «косой диполь» (Коваленко, 1975, формулы (2.36)). Высота круговой орбиты МС задавалась равной 690 км. Интервал между моментами прогноза при оценивании составлял 2 с, интервал между моментами обработки измерений — 10 с. В качестве возмущающих факторов, не учитываемых при оценивании, вводились постоянные смещения нуля магнитометров (до 120 нТл), неопределенность установки магнитометров относительно осей  $h_{uz}$  (до  $10'$ ), цена младшего разряда показаний магнитометра 20 нТл, нормально распределенные возмущающие случайные моменты, действующие на МС, со стандартными отклонениями до  $10^{-5}$  нм.

Результаты моделирования хорошо согласуются с полученными выше выводами. Так, надлежащая настройка фильтра обеспечивала сходимость оценок параметров движения в течение промежутка времени, не превышающего половины периода обращения по орбите, как в неуправляемом, так и в управляемом режиме, при различных наклонениях орбиты, различных значениях моментов инерции МС (удовлетворяющих оговоренному выше условию), произвольной начальной ориентации МС и компонентах начальной угловой скорости до  $3^\circ/\text{с}$ . Управление, сформированное, как указано в п. 2, обеспечивало приведение МС в требуемое положение относительно орбитального трехгранника в течение 3—4 витков и последующую стабилизацию этого положения с точностью порядка  $1^\circ$  при принятых выше параметрических возмущениях.

Исследовался также вариант организации управляемого движения МС, в котором построению режима трехосной ориентации предшествовал перевод аппарата в режим одноосной ориентации оси  $z$  относительно геоцентрической вертикали. Перевод осуществлялся алгоритмом управления (21), (32) с ортами  $\xi$  и  $s$ , равными соответственно  $\xi = [0, 0, 1]^T$ ,  $s = e_R$ . Такой прием в ряде случаев

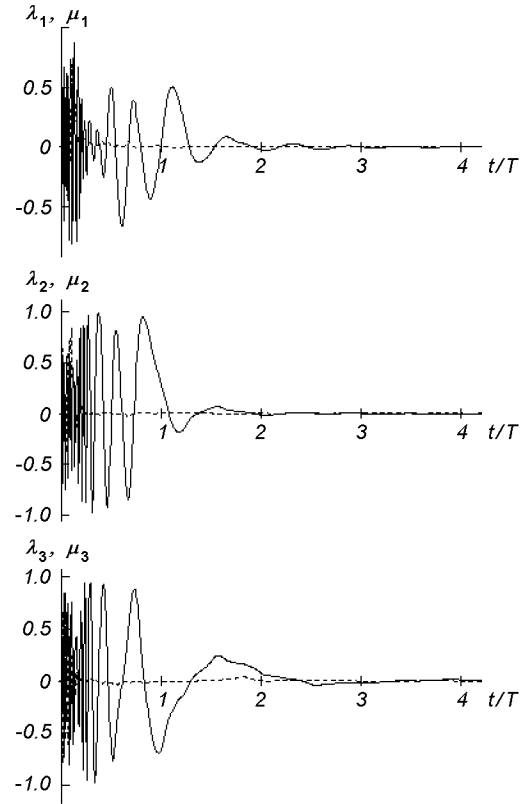


Рис. 1. Параметры ориентации МС и ошибки их оценивания

ускорял процесс построения трехосной орбитальной ориентации МС.

В одном из вариантов моделирования задавались значения  $i = 98^\circ$ ,  $I_x = I_y = 118 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ,  $I_z = 19.6 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ,  $t_0 = 0$ ,  $\Lambda(0) = \{0.36, 0.48, -0.48, 0.64\}$ ,  $\omega(0) = [-3, 3, 3]^T$ , ( $^\circ/\text{с}$ );  $m = [10^{-8}, 10^{-8}, 3 \cdot 10^{-8}]^T$ ,  $\text{с}^{-2}$ . Хотя гауссовы шумы  $x$ -,  $y$ - и  $z$ -магнитометров имели различные стандартные отклонения (375, 25 и 65 нТл соответственно), в формулах (38) использовались одинаковые значения  $\theta$  и  $\tau$  при обработке трех элементов вектора  $z$ , который в этом примере рассматривался в виде (36).

На рис. 1 показано поведение параметров  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  (сплошные линии) и ошибок определения ориентации  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\mu_3$  (штриховые линии) в зависимости от времени  $t$ , отнесенного к периоду обращения по орбите  $T$ .

Рис. 2 показывает поведение составляющих  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  относительной угловой скорости МС (сплошные линии) и соответствующих ошибок оценивания  $\Delta u_1$ ,  $\Delta u_2$ ,  $\Delta u_3$  (штриховые линии). Видно, что



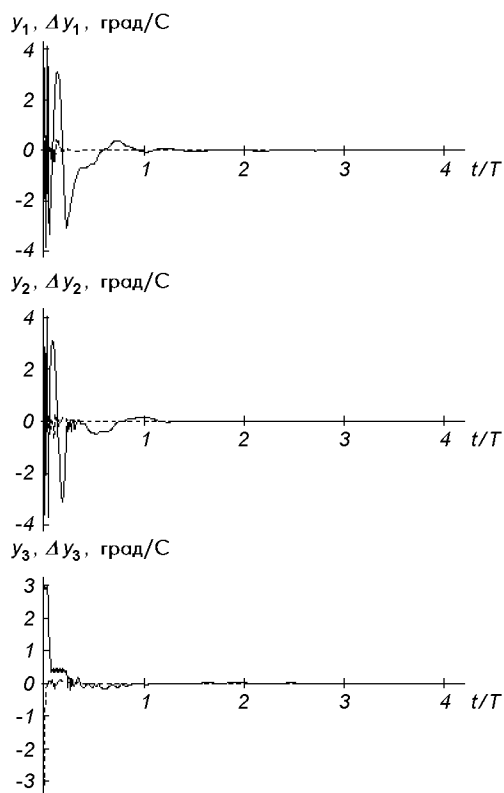


Рис. 2. Составляющие угловой скорости МС и ошибки их оценивания

МС достаточно быстро приводится в требуемое положение относительно орбитального трехгранника; еще быстрее оценки параметров сферического движения сходятся к истинным значениям этих параметров.

- Бакан Г. М. Алгоритмы построения гарантированных и размытых эллипсоидальных оценок в линейных системах на основе метода наименьших квадратов // Проблемы управления и информатики.—1995.—№ 3.—С. 117—129.
- Барбашин Е. А. Функции Ляпунова. — М.: Наука, 1970.—240 с.
- Белецкий В. В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. — М.: Изд-во Московск. ун-та, 1975.—308 с.
- Белецкий В. В., Хентов А. А. Вращательное движение намагниченного спутника. — М.: Наука, 1985.—285 с.

- Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. — М.: Наука, 1973.—320 с.
- Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967.—472 с.
- Егоров С. Н. Об использовании уравнений динамики при анализе алгоритмов определения ориентации // Космич. исследования.—1992.—30, вып. 1.—С. 38—44.
- Зубов В. И., Ермолин В. С., Сергеев С. Л. и др. Управление вращательным движением твердого тела. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1978.—200 с.
- Коваленко А. П. Магнитные системы управления космическими летательными аппаратами. — М.: Машиностроение, 1975.—248 с.
- Красовский Н. Н. Проблемы стабилизации управляемых движений // Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. — М.: Наука, 1966.—С. 475—514.
- Лебедев Д. В. Управление ориентацией твердого тела с использованием параметров Родрига—Гамильтона // Автоматика.—1974.—№ 4.—С. 29—32.
- Лебедев Д. В., Ткаченко А. И. Системы инерциального управления. Алгоритмические аспекты. — Киев: Наук. думка, 1991.—203 с.
- Лебедев Д. В., Ткаченко А. И. Управление сферическим движением космического аппарата в магнитном поле Земли: ч. I. Информационное обеспечение // Проблемы управления и информатики.—1995.—№ 6.—С. 5—18.
- Лебедев Д. В., Ткаченко А. И. Управление сферическим движением космического аппарата в магнитном поле Земли. Часть II. Ориентация и стабилизация // Проблемы управления и информатики.—1996.—№ 3.—С. 5—18.
- Фурасов В. Д. Устойчивость движения, оценки и стабилизация. — М.: Наука, 1977.—247 с.
- Hodgart M. S. Gravity gradient and magnetorquing attitude control for low-cost low-Earth orbit satellites: the UOSAT experience // Proc. of the AIAA/AAS Astrodynamics Conf. — Washington, DC, 1988.—P. 421—430.—(Coll. Tech. Pap).
- Psiaki M. L., Martel F., Pal P. K. Three-axis attitude determination via Kalman filtering of magnetometer data // J. Guid., Control and Dynamics.—1990.—13, N 3.—P. 506—514.

#### MAGNETIC SYSTEM FOR CONTROLLING THE ANGULAR MOTION OF A MICRO-SATELLITE

D. V. Lebedev, A. I. Tkachenko, and Yu. N. Shtepa

An algorithmic support for the attitude control and stabilization system of a small spacecraft (micro-satellite) is considered. This system uses geomagnetic field effects only in both the measuring subsystem and the control subsystem. Fast solution is attained for the orientation and stabilization problem with any initial spacecraft attitude and large angular rates by means of effective algorithms for state estimation and control.