

УДК 629.7.054

Прохождение волн избыточного давления через многофазную механическую структуру

В. В. Карачун

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», Київ

Надійшла до редакції 29.03.96

Аналізується динамічний стан широко застосовуваної в авіаційній техніці механічної системи з двох коаксіальних кругових циліндрів під дією акустичного випромінювання. Розглядаються кілька випадків механічного зв'язку між циліндрами.

Акустическое излучение, обусловленное работой маршевых двигателей КА, как известно, оказывает существенное влияние как на механические системы конструкции носителей, так и на комплектующие элементы. В первую очередь это касается бортовой электронно-вычислительной аппаратуры и приборов командно-измерительного комплекса.

Практический интерес представляет решение прикладных задач упругого взаимодействия полиагрегатных механических систем в виде многофазных структур с внешними возмущающими акустическими воздействиями.

Рассмотрим часто встречаемую механическую систему в виде двух коаксиальных круговых цилиндров, разделенных, например, тяжелой хлорили фторорганической жидкостью. Такие конструкции встречаются, в частности, в навигационном оборудовании, когда возникает необходимость частного или полного взвешивания отдельных узлов или целых приборов с целью уменьшения их погрешностей от кинематических, силовых и других возмущающих факторов.

Пусть наружный цилиндр имеет упругую поверхность, а внутренний — абсолютно твердую. Предположим также наличие у внутреннего цилиндра двух взаимно перпендикулярных плоскостей геометрической и массовой симметрии.

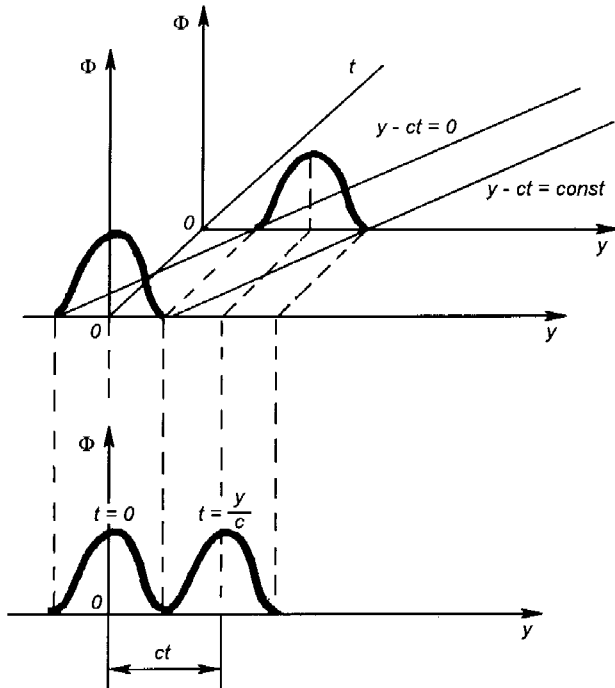
Рассмотрим наиболее общий случай, когда внешнее возмущающее воздействие передается к внут-

реннему цилиндру не только через связывающую цилиндры упругую связь, но и через жидкость. Оставляя в стороне подробный анализ и описание механических свойств жидкости, решая задачу упругого взаимодействия будем, используя понятие потенциала скоростей падающей и дифракционной волн (Φ и φ соответственно).

Предположим, что в окружающей цилиндр среде распространяется нестационарная волна давления с потенциалом $\Phi(y - ct) = \Phi(\xi)$, фронт которой в момент времени $t = 0$ соприкасается с поверхностью исходно неподвижного цилиндра. В фазовой плоскости $(y; t)$ функция $\Phi(y - ct)$ сохраняет постоянное значение на линиях $y - ct = \text{const}$, поверхность $U = \Phi(y - ct)$ — цилиндрическая с образующей, параллельной прямой $y = ct$, направляющая поверхности — кривая $\Phi(y - ct)$ при $t = 0$ (рисунок). Потенциал дифракционной волны примем в виде $\varphi = \varphi(x; y; z; t)$.

С учетом сделанных выше упрощающих предположений дифференциальные уравнения поступательного перемещения внутреннего цилиндра для нескольких вариантов механической связи между цилиндрами могут быть записаны в виде (Григлюк, Горшков, 1968):

$$M\ddot{U}(t) + b\dot{U}(t) + C_1U(t) = \rho \iint_S \frac{\partial}{\partial t} [\Phi(y - ct) + \varphi(x; y; z; t)] \cos(\hat{n}, y) dS, \quad (1)$$



Распространение нестационарной волны давления

где M — масса цилиндра; $U(t)$ — перемещение внутреннего цилиндра вдоль оси y ; n — направленные внешней нормали к поверхности S внутреннего цилиндра; b — коэффициент вязкого сопротивления; C_1 — коэффициент жесткости упругой связи.

Потенциал φ подчиняется трехмерному волновому уравнению:

$$\Delta\varphi(x; y; z; t) = C^{-2} \frac{d^2\varphi(x; y; z; t)}{dt^2} = 0, \quad (2)$$

а начальные условия имеют вид:

$$\Phi(y - ct)|_{t=0} = 0;$$

$$\varphi(x; y; z; t)|_{t=0} = \frac{\partial\varphi(x; y; z; t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0. \quad (3)$$

При $r = [x^2 + y^2 + z^2]^{1/2} \rightarrow \infty$ потенциал волны $\varphi(x; y; z; t) \rightarrow \infty$, а на поверхности цилиндра имеют место граничные условия

$$\frac{\partial\varphi(x; y; z; t)}{\partial n} = - \frac{\partial\Phi(y - ct)}{\partial n} + \frac{dU(t)}{dt} \cos(\hat{n}, y). \quad (4)$$

Здесь r — радиус оболочки.

Определим закон поступательного перемещения $U(t)$ внутреннего цилиндра под действием акустической волны давления.

Цилиндры соединены упругой связью и демпфером. Частное решение уравнения (1), т. е.

возмущенное движение внутреннего цилиндра, определим с помощью преобразования Лапласа относительно переменной $t > 0$, считая потенциалы Φ и φ удовлетворяющими условиям существования оригиналов преобразования. Тогда:

$$U(t) \rightarrow U(p);$$

$$\ddot{U}(t) \rightarrow p^2 U(p);$$

$$\Phi(y - ct) \rightarrow \Phi(y - cp);$$

$$\varphi(x; y; z; t) \rightarrow \varphi(x; y; z; p).$$

Уравнение (1) в операторной форме примет вид

$$(Mp^2 + bp + C_1)U(p) = \rho \iint_S p[\Phi(y - cp) + \varphi(x; y; z; p)] \cos(\hat{n}, y) dS. \quad (5)$$

Отсюда

$$U(p) = \rho \iint_S p(Mp^2 + bp + C_1)^{-1} \times [\Phi(y - cp) + \varphi(x; y; z; p)] \cos(\hat{n}, y) dS. \quad (6)$$

Преобразуем полином

$$Mp^2 + bp + C_1 = M \left[\left(p + \frac{b}{2M} \right)^2 - \frac{b^2 - 4MC_1}{4M^2} \right]$$

и введем обозначения:

$$\frac{b}{2M} = \lambda; \quad \frac{b^2 - 4MC_1}{4M^2} = \omega^2, \quad \text{если } \frac{b^2 - 4MC_1}{4M^2} > 0;$$

$$\frac{4MC_1 - b^2}{4M^2} = \gamma^2, \quad \text{если } \frac{b^2 - 4MC_1}{4M^2} < 0.$$

Если $\frac{b^2 - 4MC_1}{4M^2} > 0$, то выражение (6) приобретает вид

$$U(p) = \rho \iint_S \frac{p}{(p + \lambda) - \omega^2} \times [\Phi(y - cp) + \varphi(x; y; z; p)] \cos(\hat{n}, y) dS.$$

Переходя к оригиналу, имеем:

$$U(p) = \rho M^{-1} \iint_S \left\{ \int_0^t \exp[-\lambda(t - \tau)] \times [\operatorname{ch} \omega(t - \tau) - \lambda \omega^{-1} \operatorname{sh} \omega(t - \tau)] \times [\Phi(y - c\tau) + \varphi(x; y; z; \tau)] d\tau \right\} \cos(\hat{n}, y) dS = \rho M^{-1} \iint_S [\Phi \cos(\hat{n}, y) + \varphi \cos(\hat{n}, y)] dS, \quad (7)$$

что и является законом движения внутренней оболочки. Подставив заданные значения потенциалов падающей $\Phi(y - ct)$ и дифракционной $\varphi(x; y; z; t)$

волн, можем установить характер движения цилиндра.

Если же

$$\frac{b^2 - 4MC_1}{4M^2} < 0,$$

то формула (6) может быть записана в виде

$$U(p) = \rho M^{-1} \iint_S \frac{P}{(p + \lambda) - \gamma^2} \times \\ \times [\Phi(y - cp) + \varphi(x; y; z; p)] \cos(\hat{n}, y) dS$$

и частное решение принимает вид

$$U(p) = \rho M^{-1} \iint_S \left\{ \int_0^t \exp[-\lambda(t - \tau)] \times \right. \\ \times [\cos \gamma(t - \tau) - \lambda \gamma^{-1} \sin \gamma(t - \tau)] \times \\ \times [\Phi(y - c\tau) + \varphi(x; y; z; \tau)] d\tau \Big\} \cos(\hat{n}, y) dS = \\ = \rho M^{-1} \iint_S [\Phi \cos(\hat{n}, y) + \varphi \cos(\hat{n}, y)] dS. \quad (8)$$

Цилиндры соединены демпфером. В этом случае в уравнении (1) можно исключить упругую связь, т. е. положить равным нулю коэффициент C_1 . Рассуждая аналогично предыдущему, имеем:

$$U(t) = \rho M^{-1} \iint_S \left\{ \int_0^t \exp[-b(t - \tau)] \times \right. \\ \left. \left\{ \times [\Phi(y - c\tau) + \varphi(x; y; z; \tau)] d\tau \right\} \cos(\hat{n}, y) dS. \quad (9)$$

Цилиндры соединены упругой связью. Для этого в уравнении (1) положим $b = 0$. Тогда

$$U(t) = \rho M^{-1} \iint_S \left\{ \int_0^t \cos \mu(t - \tau) \times \right. \\ \left. \left\{ \times [\Phi(y - c\tau) + \varphi(x; y; z; \tau)] d\tau \right\} \cos(\hat{n}, y) dS, \quad (10)$$

где $\mu = C_1 M^{-1}$, $\mu > 0$.

Внутренний цилиндр свободен от закреплений. В уравнении (1) полагаем $b = 0$, $C_1 = 0$. Тогда

$$U(t) = \rho M^{-1} \iint_S [\Phi \cos(\hat{n}, y) + \varphi \cos(\hat{n}, y)] dS. \quad (11)$$

Таким образом, перемещения частиц жидкости будут определяться функциями Φ и φ по формулам

$$\mathbf{V} = \text{grad} \Phi; \quad \mathbf{W} = \text{grad} \varphi, \quad (12)$$

причем \mathbf{V} — это перемещение, вызванное падающей волной, т. е. перемещение, которое имело бы место, если бы цилиндра в жидкости не было, а \mathbf{W} — дополнительное перемещение, обусловленное дифракцией.

Поскольку падающая волна распространяется

вдоль оси y :

$$\mathbf{V} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \mathbf{i} = iV,$$

функция φ подчиняется уравнению

$$\Delta \varphi = c^{-2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

и граничным условиям на поверхности цилиндра:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = - \frac{\partial \Phi}{\partial n} + U \cos(\hat{n}, y) = (U - V) \cos(\hat{n}, y). \quad (13)$$

Заметим, что если полный импульс акустического давления конечен по величине, то сходятся несобственные интегралы $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(y; t)$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(y; t)$, а перемещение V при $t \rightarrow \infty$ останется конечным по величине, стремясь к некоторому пределу:

$$V_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial \Phi}{\partial y}. \quad (14)$$

Поскольку $\frac{\partial \varphi(x; y; z; t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0$, то при установившемся процессе, т. е. при $t \rightarrow \infty$, будет иметь место соотношение:

$$\frac{\partial \varphi(x; y; z; t)}{\partial t} \Big|_{t=\infty} = 0$$

и $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(x; y; z; t) = \varphi_\infty$, причем $\Delta \varphi_\infty = 0$.

Потенциал падающей волны $\Phi(y - ct)$, а следовательно, и его интеграл не имеют особенностей внутри области, занимаемой цилиндром. На этом основании, в соответствии с формулой Остроградского, можно записать:

$$\rho \iint_S \Phi(y; t) \cos(\hat{n}, y) dS = \\ = \rho \iiint_{V_0} \frac{\partial \Phi(y; t)}{\partial y} dV_0 = \rho \iiint_{V_0} V(y; t) dV_0,$$

где интегрирование ведется по всему объему, занимаемому внутренним цилиндром.

Тогда:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho \iiint_{V_0} V(y; t) dV_0 = \rho V_\infty \iiint_{V_0} dV_0 = \rho V_\infty V_0 = M_0 V_\infty, \quad (15)$$

где $\rho V_0 = M_0$ — масса вытесненной цилиндром жидкости.

Что касается второго интеграла выражений (7)—(10), то он может быть записан следующим образом:

$$\rho \iint_S \varphi \cos(\hat{n}, y) dS = \rho \iint_S (U - V)^{-1} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} dS.$$

Теперь для нахождения $U(t)$ нужно знать функции $\varphi(x; y; z; t)$, определение которых при принятой выше общей постановке задачи, разумеется, невозможно. Однако, при решении прикладных задач наибольший интерес представляет определение только предельных значений перемещений ($U_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} U(t)$).

Вообще говоря, такого предела может и не быть. Но в нашем случае, при ограничении величины полного импульса давления, частицы жидкости получают конечные перемещения и можно ожидать, что конечным будет и перемещение цилиндра.

Итак, пусть при $t \rightarrow \infty$ $V \rightarrow V_\infty$, $U \rightarrow U_\infty$.

Тогда из уравнения (11) следует, что

$$U_\infty = M_0 V_\infty + \rho M^{-1} (U_\infty - V_\infty)^{-1} \lim_{t \rightarrow \infty} \iint_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS. \quad (16)$$

и требуется определить лишь

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \iint_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = \iint_S \varphi_\infty \frac{\partial \varphi_\infty}{\partial n} dS. \quad (17)$$

Функция φ — гармоническая и затухает при $r \rightarrow \infty$, а на поверхности подчиняется условиям:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = A \cos(n, \hat{y}), \quad A = U_\infty - V_\infty = \text{const.}$$

Отсюда вытекает, что φ_∞ может быть отождествлено с потенциалом течения безграничной идеальной жидкости при движении в ней рассматриваемого цилиндра с постоянной скоростью A в направлении оси y . При этом нас интересует не сама эта функция, а лишь интеграл (17).

Преобразуем его по формуле Грина с учетом того, что при $r \rightarrow \infty$ функция φ стремится к нулю как r^{-2} . Тогда получим:

$$\begin{aligned} \iint_S \varphi_\infty \frac{\partial \varphi_\infty}{\partial n} dS &= \frac{1}{2} \iint_S \frac{\partial (\varphi_\infty)^2}{\partial n} dS = \\ &= - \iiint_{V_0} \left[\left(\frac{\partial \varphi_\infty}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_\infty}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_\infty}{\partial z} \right)^2 \right] dV_0. \end{aligned}$$

Интегрирование распространяется по всему объему, занятому окружающей цилиндр жидкостью и является, как известно, кинетической энергией идеальной несжимаемой жидкости (Кочин и др., 1948). Поэтому отсюда следует, что:

$$T = \frac{1}{2} \mu_y M_0 A^2, \quad (18)$$

где μ_y — коэффициент присоединенной массы для рассматриваемого цилиндра при его движении вдоль оси y .

С учетом сказанного величина предельного перемещения цилиндра будет определяться формулой

$$MU_\infty = M_0 V_\infty - \mu_y M_0 A = M_0 V_\infty - \mu_y M_0 (U_\infty - V_\infty),$$

откуда

$$U_\infty = (1 + \mu_y)(\mu_y + MM_0^{-1})V_\infty,$$

и предположение о существовании предельного значения перемещения не приводит к противоречию.

Рассматриваемую задачу можно решить и для тела произвольной формы, не только цилиндрической. В этом случае оно будет иметь перемещения вдоль всех трех координатных осей.

Следует заметить, что предположение о наличии двух плоскостей геометрической и массовой симметрии не исключает углового движения внутреннего цилиндра относительно продольной оси в случае акустического воздействия. Очевидно, что угол поворота в этом случае будет увеличиваться по линейному закону. Однако этот аспект динамики двухцилиндровой системы в данной работе не рассматривается.

Григолок Э. Н., Горшков А. Г. Перемещение жесткого цилиндра под действием акустической волны давления // Прикл. механика.—1968.—4, № 10.—С. 1—5.

Кочин Н. Е., Кибель Н. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. — Л., М.: ОГИЗ, 1948.—Ч. 1.—535 с.

PASSAGE OF A REDUNDANCE PRESSURE WAVE THROUGH A MULTIPHASE MECHANICAL STRUCTURE

V. V. Karatchun

We analyse the resilient interaction between the components of a mechanical system, consisting of two circular cylinders which are connected mechanically and separated by a liquid. An expression is derived for the motion of the inner mobile cylinder under the pressure wave influence for some of mechanical links between the cylinders.