Космічна наука і технологія. 1996. Т. 2. № 1—2. С. 62—67.

УДК 629.735.45:623.74

Метод формирования множества паретооптимальных обликов сложных технических систем

Ю. К. Зиатдинов

Київський інститут Військово-Повітряних Сил

Надійшла до редакції 26.04.96

Пропонується метод формування множини основних конструктивних параметрів (виглядів) проектованої системи, що задовольняють кілька критеріїв ефективності. Метод побудовано на ідеї звуження допустимої області параметрів до ефективної (оптимальної за Парето). Пропонований метод формування «паретооптимальних» варіантів використовується при обгрунтуванні вигляду авиаційно-космічної системи, для якої неможливе покращення жодного з критеріїв без одночасного погіршення хоча б одного з них.

ВВЕДЕНИЕ

Проблемы проектирования сложных технических систем (каковыми является, например, многоразовые авиационно-космические комплексы и системы) поставили помимо задач традиционного математического и технического обеспечения вопросы методологического характера, связанные, по существу, с формализацией самого процесса проектирования как процесса принятия многоэлементного решения.

Грубо весь процесс проектирования можно разбить на три этапа: «внешнее» проектирование, «формирование облика» технической системы и «внутреннее» проектирование. В процессе «внешнего» проектирования основной проблемой является конкретизация целей и задач, которые должна решать система, и представление требований к основным характеристикам и качествам системы, обеспечивающим достижение этих целей. Задачей «внутреннего» проектирования, по существу, является реализация (в виде комплекса технических устройств, систем, узлов и агрегатов, представляющих в целом самую систему) основных проектных параметров системы (облика), придающих ей требуемые качества. Наконец, то, что здесь называем «формированием облика», служит целям корректной увязки требований «внешнего» проектирования с технологическими и конструкторскими возможностями «внутреннего» проектирования (Краснощеков и др., 1979).

Одной из центральных задач этапа «формирования облика» является генерирование (на уровне основных конструктивных параметров) множества альтернативных вариантов проектируемой системы, учитывающего, с одной стороны, возможности «внутреннего» проектирования и удовлетворяющего, с другой стороны, (в рамках этих возможностей) требованиям «внешнего» проектирования. Фактически на этапе «формирования облика» строится корректное в вышеупомянутом смысле множество вариантов системы, среди которых следует искать вариант, обеспечивающий достижение целей, поставленных на уровне «внешнего проектирования».

В настоящей статье, в отличие от широко используемой в большинстве методов формирования обликов сложных технических систем идеи «скаляризации» векторного критерия эффективности, предлагается метод формирования множества основных конструктивных параметров (обликов) проектируемой системы, удовлетворяющих нескольким критериям эффективности. Метод основан на идее сужения допустимой области параметров до эффективной (оптимальной по Парето), т. е. «выбраковывания» (отсева) из множества возможных обликов заведомо неудачных, уступающих другим решениям по всем критериям. При этом область решений существенно сокращается.

Предлагаемый метод формирования «паретооптимальных» вариантов используется при обосновании облика авиационно-космической системы, для которой невозможно улучшение ни одного из критериев без одновременного ухудшения хотя бы одного из них.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $y = (y_1, y_2, ..., y_q) = \{y_j\}$, $j = 1, ..., q$ — вектор конструктивных параметров проектируемой системы; $y \in \mathbf{Y}$. Выбор координат вектора y (описание системы) и множества $\mathbf{Y}$ производится, как правило, с учетом опыта конструирования систем аналогичного назначения. В частности, множество $\mathbf{Y}$ во многом определяется достигнутым уровнем развития соответствующей области техники и техническими возможностями. Например, в самолетостроении $\mathbf{Y}$ описывает разнообразие компоновок самолетов, при формировании облика многоразовых авиационно-космических систем $\mathbf{Y}$ представляет собой набор некоторых концептуальных тактико-технических характеристик системы — массу выводимой полезной нагрузки, массу одноразовых элементов, массу топлива, ресурс, угол наклона траектории при отделении орбитальной ступени и т. д. Качество системы оценивается векторным критерием качества $f = \{f_i\}$, $i = \overline{1, m}$, и его нужно минимизировать.

В предположении, что внешние условия, влияющие на функционирование системы, известны и фиксированны, можно считать критериальную функцию эффективности $f(y)$ функцией только конструктивных параметров. В этом случае задача так называемого оптимального проектирования состоит в нахождении вектора конструктивных параметров

$$y^* = \arg\min_{y \in y} f(y)$$

$$\arg\min_{y \in Y} f(y) = \left\{y \in \mathbf{Y} \mid f(y) = \min_{y' \in Y} f(y')\right\}. \qquad (1)$$

где y^* — оптимальный набор (вектор) конструктивных проектных параметров системы (ее облик), удовлетворяющих критериям $f_i(y)$.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Справедливы следующие утверждения.

- **Теорема 1.** Если функции $f_i(y)$, $i = \overline{1, m}$, $y \in \mathbf{Y}$, монотонны, то любая точка $y' \in \mathbf{Y}$ такая, что $f'_1(y') = f'_2(y') =...= f'_m(y') = \text{const}$, есть паретооптимальная точка.
- **Теорема 2.** В пространстве локальных цепей $f_i(y)$ существует функция $G(f_1(y), f_2(y), ..., f_m(y))$ такая, что любая паретооптимальная точка $y' \in \Pi(\mathbf{Y})$ удовлетворяет уравнению $G = 0$.

Пусть $f_i(y)$ $(i = 1, ..., m)$ — частные критерии эффективности (показатели качества) системы, представляющие собой характеристики системы. В качестве таковых принимаются показатели, которые признаются ЛПР важными при выборе предпочтительного варианта многоэлементного проектного решения поставленной перед системой цели, являются общими для всех допустимых вариантов и характеризуют общую ценность, качество системы. В данной статье мы также предположим, что все критерии эффективности являются векторно сравнимыми и аддитивными (Попов, 1995).

Обозначим через $\Pi(\mathbf{Y})$ множество эффективных (оптимальных по Парето) векторов* из $\mathbf{Y}$. Сопоставим задаче (1) задачу отыскания вектора проектных параметров

$$y^* \arg\min_{y \in \Pi(Y)} \mathrm{f}(y) \qquad (2)$$

Декомпозиция задачи (1) состоит из двух этапов: нахождения векторов $y \in \Pi(\mathbf{Y})$ и решение задачи (2).

Первый этап позволяет провести резкое сокращение числа рассматриваемых вариантов. На втором этапе проводится выбор оптимального варианта системы.

* Вектор $y \in Y$ называется эффективным, если для всякого $y' \in Y$ из $y'_i \geq y_i$ $(1 \leq i \leq m)$ следует $y' = y$.

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОБЛАСТИ ЭФФЕКТИВНЫХ РЕШЕНИЙ

Применение методов прикладного статистического анализа обеспечивает получение в явном виде выражений для критериальных функций f_k, позволяющих получить численное значение k-го критерия при конкретном сочетании значений проектных параметров (векторного аргумента) $y = \{y_j\}_{j=1}^{q}$, $y \in \mathbf{Y}$, изменяющихся в заданном диапазоне

$$\Delta_j = [y_{j\ \min},\ y_{j\ \max}].$$

Очевидно, что область $\Pi(\mathbf{Y})$ вариантов системы $\mathbf{H}$ определяется пересечением этих диапазонов:

$$\mathbf{H} = \cap\, \Delta_j^h .$$

Показано (Воронин, 1992), что с достаточной для инженерных расчетов точностью критериальные функции можно аппроксимировать структуризованной системой полиномов второй степени:

$$f = \{f_1, f_2, f_3, \ldots, f_m\} \text{ — векторный критерий},$$

$$f_k^h(y) = a_0^{(k^h)} + \sum_{j=1}^{q} a_j^{(k^h)} y_j + \sum_{j,r=1}^{q} a_{jr}^{(k^h)} y_j y_r , \tag{3}$$

$$k \in [1, m],$$

где $a_0^{(k^h)}$, $a_j^{(k^h)}$, $a_{jr}^{(k^h)}$ — коэффициенты полинома, аппроксимирующего k-ю критериальную функцию в h-й области пространства $\mathbf{H}$.

Для наглядности рассмотрим наиболее простой — двумерный случай $q = 2$, когда система описывается лишь двумя параметрами y_1 и y_2 (тактико-техническими характеристиками). Пусть при этом сравнение вариантов осуществляется по двум ($m = 2$) критериальным функциям f_1 и f_2, которые правомерно применять во всем диапазоне изменения характеристик y_1 и y_2. Последнее допущение эквивалентно утверждению, что $h = \mathbf{H}$. В этом случае (см. рис. 1)

$$f_1 = a_0^1 + a_1^1 y_1 + a_2^1 y_2 + a_{11}^1 y_1 y_1 + a_{22}^1 y_2 y_2 + a_{12}^1 y_1 y_2,$$
$$\tag{4}$$
$$f_2 = a_0^2 + a_1^2 y_1 + a_2^2 y_2 + a_{11}^2 y_1 y_1 + a_{22}^2 y_2 y_2 + a_{12}^2 y_1 y_2,$$

Линии на рис. 1, соответствующие f_1 = const и f_2 = const — это линии безразличия (линии равных эффективностей). Для удобства дальнейших рассуждений приведем соотношение (4) к матричному виду

$$f_1 = A_0^1 + 2A_1^1 Y + Y^{\mathrm{T}} A_2^1 Y, \tag{5}$$

$$f_2 = A_0^2 + 2A_1^2 Y + Y^{\mathrm{T}} A_2^2 Y.$$

Здесь

$$Y = [y_1 y_2]^{\mathrm{T}}, \qquad A_0^1 = [a_0^1], \qquad A_0^2 = [a_0^2],$$
$$A_1^1 = [a_1^1 a_2^1], \qquad A_1^2 = [a_1^2 a_2^2],$$
$$A_2^1 = \begin{bmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 \\ a_{12}^1 & a_{22}^1 \end{bmatrix}, \qquad A_2^2 = \begin{bmatrix} a_{11}^2 & a_{12}^2 \\ a_{12}^2 & a_{22}^2 \end{bmatrix}.$$

Используя правила матричного дифференцирования, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial Y} &= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_2} \end{bmatrix} = 2A_1^1 + Y^{\mathrm{T}} A_2^1, \\ \frac{\partial f_2}{\partial Y} &= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y_2} \end{bmatrix} = 2A_1^2 + Y^{\mathrm{T}} A_2^2. \end{aligned} \tag{6}$$

Координаты безусловных экстремумов критериальных функций f_1 и f_2 определяются так

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f_1}{\partial Y} = 0, \\ &2A_1^1 + Y^{\mathrm{T}} A_2^1 = 0, \\ &\mathrm{opt}\, Y^{\mathrm{T}(1)} = -\,2A_1^1 (A_2^1)^{-1}, \\ &\frac{\partial f_2}{\partial Y} = 0, \\ &2A_1^2 + Y^{\mathrm{T}} A_2^2 = 0, \\ &\mathrm{opt}\, Y^{\mathrm{T}(2)} = -\,2A_1^2 (A_2^2)^{-1}. \end{aligned} \tag{7}$$

Кроме того, можно показать, что

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial y_1^2} = a_{11}^1, \qquad \frac{\partial^2 f_2}{\partial y_1^2} = a_{22}^2.$$

В соответствии с критерием Сильвестра (Кудрявцев, 1981) из положительной определенности симметричных матриц A_2^1 и A_2^2 следует, что

$$a_{11}^1 > 0, \qquad a_{22}^2 > 0.$$

Значит $\dfrac{\partial^2 f_j}{\partial y_j^2} > 0$ и безусловные экстремумы критериальных функций f_j есть минимумы. Причем в соответствии с этим же критерием матрицы A_2^1 и A_2^2 невырожденные, т. е. решение (7) существует и оно единственное.

Таким образом, варианты схем с параметрами, соответствующими точке $A(\mathrm{opt}\ y_1^1,\ \mathrm{opt}\ y_2^1)$ и точке $B(\mathrm{opt}\ y_1^2,\ \mathrm{opt}\ y_2^2)$, являются оптимальными по критериям f_1 и f_2 соответственно, если они принадлежат области допустимых решений $[y_{j\,\min},\ y_{j\,\max}]$.

В этом случае, когда точки A и/или B не принадлежат области допустимых решений, требуется проведение дополнительных исследований, описанных Зиатдиновым (1996).

Можно показать, что множеству $\Pi(\mathbf{Y})$ вариантов системы соответствует множество точек $ADCB$ (см. рис. 1), которая является геометрическим местом точек соприкосновения однопараметрического семейства линий f_1 с линиями, принадлежащими семейству f_2. Действительно, рассмотрим множество вариантов системы, хотя и отличающимся по своим характеристикам y_1 и y_2, но обеспечивающих $f_1 = \text{const}$. Из рис. 1 видно, что, например, при $f_1 = 2$ лишь вариант системы, соответствующий точке C, (y_1^C, y_2^C), обеспечивает минимальное значение f_2.

При другом значении f_1 (например, при $f_1 = 4$) паретооптимальным вариантом будет система, соответствующая другой точке пространства y_1 и y_2. В нашем случае это точка D с координатами y_1^D и y_2^D.

Из геометрических соображений ясно, что только в случае принадлежности варианта системы области $\Pi(\mathbf{Y})$ решений существует взаимооднозначное соответствие между векторным критерием $f = \{f_1, f_2\}$ и обликом системы, заданного параметрами (характеристиками) $\{y_1, y_2\}$. Переходя к многомерному пространству характеристик, задачу паретооптимального варианта системы можно сформулировать следующим образом: найти паретооптимальные характеристики, обеспечивающие экстремальные значения критерия f_1 при $f_2 = \text{var}$.

Идея решения этой задачи заключается в определении уравнений кривой AB в многомерном пространстве исследуемых характеристик, которая проходит через точки соприкосновения изоквант семейства f_1 и f_2. В этих точках касательная и нормаль к изоквантам семейства f_1 совпадают с касательной и нормалью к изоквантам семейства f_2, что позволяет сформировать систему уравнений вида

$$\frac{y_i - \xi_i}{\dfrac{df_1}{dy_i}} = \frac{y_j - \xi_j}{\dfrac{df_2}{dy_j}}, \tag{8}$$

$$i, j = 1, 2, \ldots, q,$$

где ξ_j — координаты точек касания изоквант семейств f_1 и f_2 соответственно; y_j — текущие координаты точки, принадлежащей нормали.

Решение системы уравнений (8) в общем виде представляет определенные трудности. Рассмотрим один из подходов к консервативному преобразованию системы уравнений (8) и нахождению координат точек, принадлежащих линии Парето. Идею таких преобразований проследим на примере, когда f_1 и f_2 являются однопараметрическими эллиптическими уравнениями.

Известно, что полиномы второй степени типа (3) могут быть приведены к квадратичным формам путем линейных преобразований. Более того, существует линейное преобразование, которое обеспечивает одновременное приведение двух квадратичных форм к диагональному виду. Следовательно, уравнения могут быть записаны в виде

$$\begin{gathered} f_1 = b_0^{(1)} + (z_1 - z_{01})^2 + (z_2 - z_{02})^2, \\ f_2 = b_0^{(2)} + \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2, \end{gathered} \tag{9}$$

где z_{01}, z_{02} — координаты центра линий семейства f_1 в новой системе координат Z_1OZ_2; λ_1, λ_2 — собственные значения квадратной симметричной матрицы, составленной из коэффициентов $a_{jr}^{(2)}$.

Геометрически это означает, что существует такое линейное преобразование системы координат (перенос, поворот и сжатие), при котором исходное семейство эллипсов f_1 трансформируется в семейство кругов, а исходное семейство эллипсов f_2 — в семейство деформированных эллипсов. На рис. 2 приведены «деформированные» семейства f_1 и f_2, полученные в результате применения преобразования (9) исходных семейств эллипсов, изображенных на рис. 1. Учитывая, что последнее уравнение существенно проще уравнений (9), можно ожидать, что система уравнений (8) в новой системе координат будет иметь более простой вид. Действительно, так как

$$\frac{df_1}{dz_j} = 2(z_j - z_{01}),$$

$$\frac{df_2}{dz_j} = 2\lambda_j z_j,$$

то система уравнений (8) вырождается и принимает вид

$$z_j = \frac{z_{0j}}{1 - \dfrac{\lambda_j}{\lambda_1}\left(1 - \dfrac{z_{0j}}{z_1}\right)},$$

где λ_j — собственные значения квадратичной формы f_2, z_{0j} — j-я координата центра семейства линий $f_1 = \text{const}$ в новой системе координат.

Таким образом, зная координаты центра семейства кругов гиперсфер (z_{0j}), собственные значения λ_j «деформированной» квадратичной формы f_2 и варьируя значения одной координаты (z_1) в диапазоне $[0, z_{01}]$, можно вычислить остальные коорди-

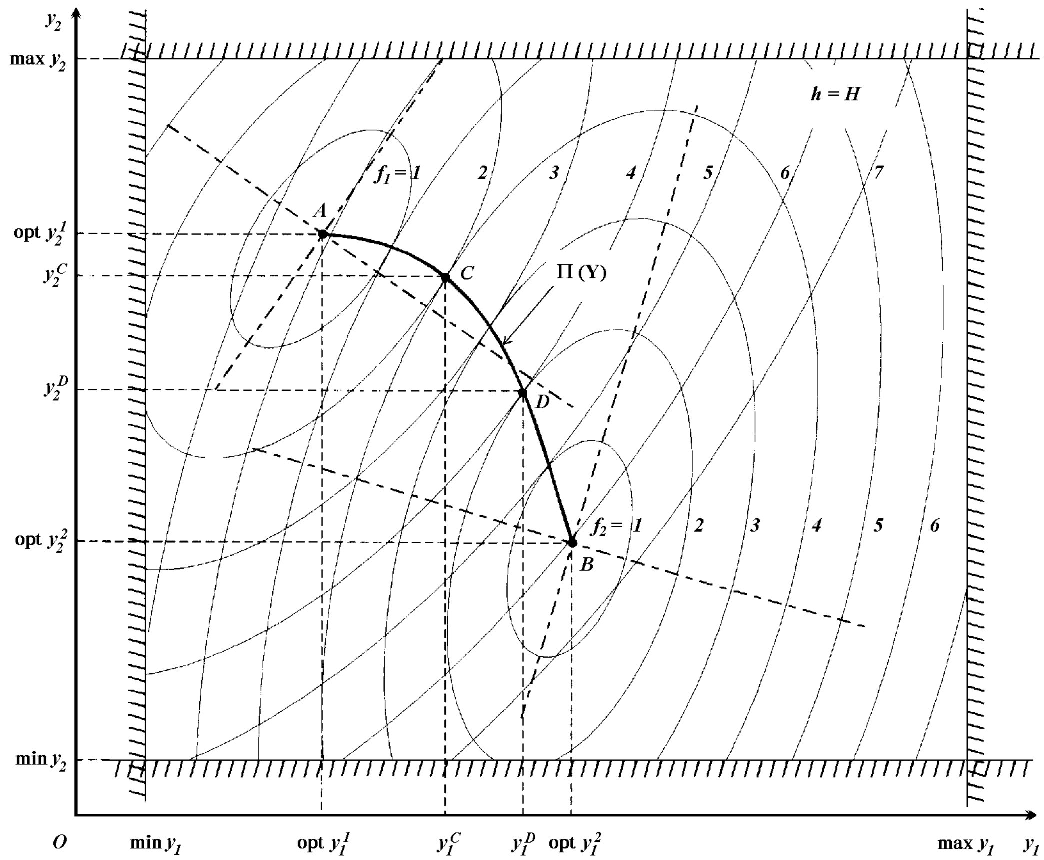

Рис. 1. Семейства исходных эллипсоидов

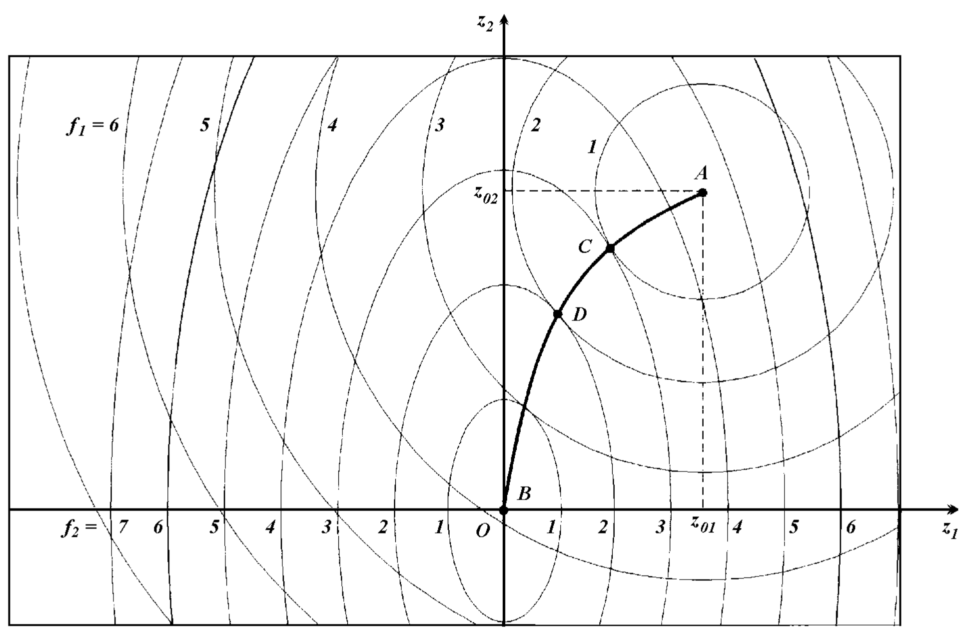

Рис. 2. Семейства «деформированых» эллипсоидов

наты точек, принадлежащих линии Парето в новой системе координат.

Применение обратных преобразований системы координат позволяет определить облики вариантов системы, оптимальных по Парето.

Воронин А. Н. Многокритериальный синтез динамических систем. — Киев: Наук. думка, 1992.—160 с.

Зиатдинов Ю. К. Методы определения оптимальных проектных параметров сложных технических систем при наличии ограничений // Космічна наука і технологія.—1996.—2, № 1—2.—С. 57—61.

Краснощеков П. С., Морозов В. В., Федоров В. В. Декомпозиция в задачах проектирования // Техническая кибернетика.—1979.—№ 2.—С. 7—16.

Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа (в двух томах). — М.: Высшая школа, 1981.—Т. 2.—584 с.

Попов И. А., Скворцов В. В., Мищитис А. К. Исследование и проектирование больших механических систем. — Киев: КИ ВВС, 1995.—252 с.

A METHOD FOR FORMING A SET OF PARETO-OPTIMUM STRUCTURAL PARAMETERS OF COMPOUND TECHNICAL SYSTEMS

Yu. K. Ziatdinov

A method is offered for the formation of a Pareto-optimum combination for the structural parameters of a compound technical system. The method is used when designing an aerospace system.