Космічна наука і технологія. 1996. Т. 2. № 1—2. С. 57—61.

УДК 629.735.45:623.74

Методы определения оптимальных проектных параметров сложных технических систем при наличии ограничений

Ю. К. Зиатдинов

Київський інститут Військово-Повітряних Сил

Надійшла до редакції 26.04.96

Пропонується методика визначення оптимальних проектних параметрів системи при наявності явних обмежень.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Обозначим через $y = (y_1, y_2 \ldots, y_q)$ вектор конструктивных параметров системы, $y \in \mathbf{Y}$.

Предположим, что внешние условия, влияющие на функционирование системы, известны и фиксированны. Тогда векторный критерий функционирования технической системы является функцией $f(y) = \{f_i(y)\}$, $i = \overline{1, m}$ только проектных параметров $y \in \mathbf{Y}$. Задача оптимального проектирования состоит в нахождении вектора проектных параметров

$$y^* = \arg \min_{y \in Y} f(y)$$

$$\arg \min_{y \in Y} f(y) = \left\{ y \in \mathbf{Y} \mid f(y) = \min_{y' \in Y} f(y') \right\}. \qquad (1)$$

Если техническая концепция системы задана, то известно оптимальное (в данном случае минимальное) значение векторного критерия $f(y)$ и коэффициенты A_0, A_1, A_2 аппроксимирующего данный критерий полинома (Воронин 1972; Краснощеков, 1979)

$$f(y) = A_0 + 2A_1 y + y^T A_2 y. \qquad (2)$$

Зная область существования паретооптимальных вариантов системы $\Pi(Y)$ можно определить единственный набор проектных параметров y^*, однозначно определяющих соответствующий облик перспективной системы.

Сопоставляя полученные значения y^* с заданными диапазонами изменения этих характеристик [min*y*, max*y*], оценивается принадлежность полученного оптимального решения области допустимых решений **Y**. В том случае когда, решение является недопустимым, необходимо скорректировать это решение с учетом заданной системы параметрических ограничений

$$\min y_j \le y_j \le \max y_j \qquad j \in [1, q]. \qquad (3)$$

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Исследовались два способа определения координат экстремальных решений с учетом ограничений (3), основанные на методе множителей Лагранжа (Бронштейн, Семендяев, 1980).

Идею использования первого способа иллюстрирует рис. 1, где приведены проекции линий равных эффективностей $f(y) = \text{const}$, ограничений вида (3) и области допустимых решений H на плоскость $Y_1 O Y_j$.

Суть предлагаемой методики заключается в следующем.

а. Определяются координаты безусловного минимума критериальной функции с использованием правил матричного дифференцирования

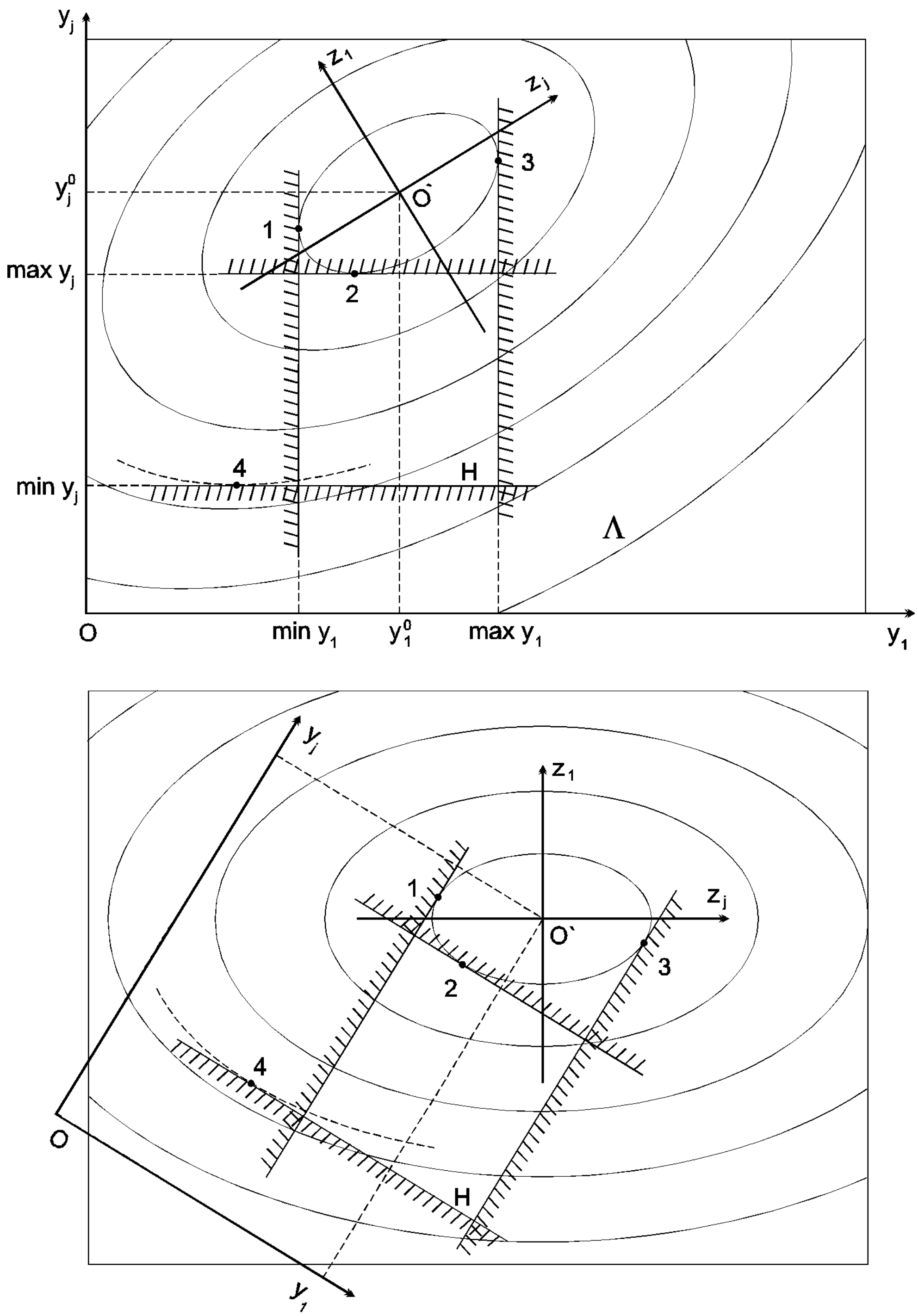

Рис. 1. Определение оптимальных характеристик при наличии ограничений

$$\frac{\partial f(y)}{\partial y} = 2A_1^{\mathrm{T}} + y^{\mathrm{T}}A_2 = 0,$$

$$y = -2A_1^{\mathrm{T}}A_2^{-1}. \tag{4}$$

Если точка минимума принадлежит области допустимых решений, то задача решена. В противном случае необходимо перейти к **б**.

б. Выделяются существенные ограничения. Можно показать, что для квадратичной полиномиальной критериальной функции (2) и для любого $j \in [1, q]$, только одно из ограничений является существенным: либо $y_j \le \min y_j$, либо $y_j \ge \max y_j$. Правило выделения таких ограничений имеет вид:

$$g_j(y) = \begin{cases} y_j - \min y_j = 0, & \text{если } y_j^* - \min y_j \le 0, \\ y_j - \max y = 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{5}$$

Далее, не нарушая общности, и там, где это не вызывает неоднозначности, вместо (5) будем пользоваться обозначением:

$$g_j(y) = y_j - \bar{y}_j = 0, \qquad j \in [1, q], \tag{6}$$

где $\bar{y}_j$ — j-е существенное ограничение области допустимых решений ($\min y_j$ или $\max y_j$).

Для решения задачи нахождения условного экстремума используем метод множителей Лагранжа. Этот метод можно рассматривать как сведение задачи условного экстремума к безусловному, для чего вводятся множители Лагранжа, записывается функция Лагранжа и решение задачи условного экстремума ищется среди экстремальных точек функции Лагранжа.

в. Составляется функция Лагранжа для $\bar{y}_j$-го существенного ограничения:

$$L(y, \lambda) = f(y) + \sum_{i=1}^{q} \lambda_i\, g_i(y), \qquad i \in [1, q], \tag{7}$$

где λ_i — множители Лагранжа.

г. Составляется система $(q + 1)$ линейных уравнений для любых $j \in [1, q]$ вида:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial y_j} &= \frac{\partial f(y)}{\partial y_j} + \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \frac{\partial g_i(y)}{\partial y_j} = 0, \qquad j \in [1, q], \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} &= g_i(y) = 0, \qquad i \in [1, q], \end{aligned} \tag{8}$$

и решается относительно $(q + 1)$ неизвестных λ_1, y_i, $i \in [1, q]$.

Отметим, что для допустимых значений y (таких, которые удовлетворяют ограничениям) справедливо соотношение

$$L(y, \lambda) = f(y) + \sum_{i=1}^{q} \lambda_i\, g_i(y) = f(y).$$

Отметим также, что данная задача будет иметь единственное решение, если функция $f(y)$ выпукла и функции $g_j(y)$ в общем случае тоже выпуклы. Если в конкретной задаче заданные явные ограничения теоретически не имеют ограничений, то предположение о наличии «безопасных» границ, т. е. границ, включающих оптимум, позволит применить предлагаемый метод.

В соответствии с принципом Лагранжа данная система определяет необходимые условия первого порядка в задаче на относительный (условный) экстремум функции $F(y)$ при ограничении $g_1(y)$, а ее решение $[\hat{y}_1, \hat{y}_2, ..., \hat{y}_q]$ в случае положительной определенности матрицы A_2 есть условно оптимальная точка.

д. Далее идет возврат к пункту в, решается задача для следующего существенного ограничения и вычисляется следующая условно оптимальная точка.

е. Вычисляются значения критериальной функции в условно оптимальных точках для всех $j \in [1, q]$ и выбираются оптимальные точки y^* с учетом ограничений.

Описанный алгоритм обеспечивает решение задачи определения оптимальных проектных параметров системы с учетом ограничений. При этом необходимо решать q раз систему линейных уравнений с q неизвестными, что при больших величинах достаточно затруднительно, а при плохой обусловленности матрицы A_2 может привести к значительным погрешностям. Более эффективным в этом случае является другой метод. Он также базируется на принципе Лагранжа, но предполагает преобразование системы координат в пространстве проектных параметров и в этом, уже преобразованном пространстве, решение гораздо более простой системы уравнений.

Алгоритм решения задачи при таком подходе можно представить в виде (рис. 2):

а. Координаты (в исходной системе) безусловного экстремума критериальной функции определяются как в пункте **а** предыдущего алгоритма.

б. Исходная полиномиальная критериальная функция (2) приводится к каноническому виду

$$f = \sum_{i} \mu_i\, \xi_i^2, \qquad i \in [1, q], \tag{9}$$

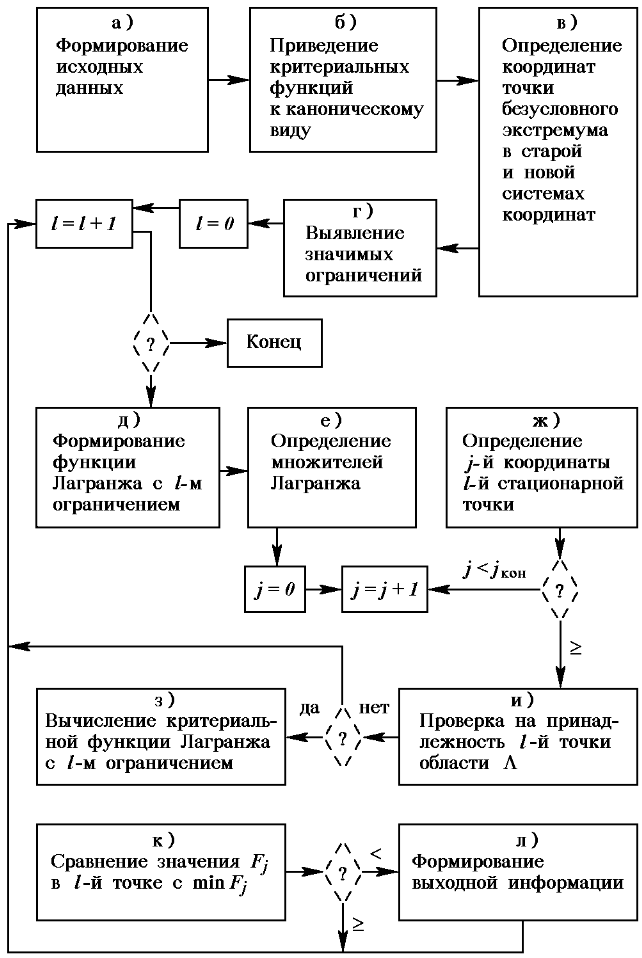

Рис. 2. Алгоритм решения задачи поиска оптимальных характеристик при наличии ограничений

При этом известными методами (Бронштейн, Семендяев, 1980) осуществляется переход от исходной системы координат $\{y\} = \{y_1, y_2, ..., y_q\}$ к преобразованной системе $\{\xi\} = \{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_q\}$, вычисляются собственные значения $\{\mu\} = \{\mu_1, \mu_2, ..., \mu_q\}$ и собственные вектора $\mathbf{R} = \{r_{kl}\}$, а также матрицы коэффициентов $\mathbf{A} = [a_{kl}]$ критериальной функции (2).

Пересчет координат любой точки из старой системы в новую осуществляется в соответствии с выражением

$$\xi_i = \sum_l r_{li}\, y_l, \qquad l, i \in [1, q].$$

в. В новой системе координат определяются координаты точки безусловного экстремума

$$\xi_i^* = \sum_l r_{li}\, y_l^*, \qquad l, i \in [1, q] \tag{10}$$

по информации, полученной в пункте **а** настоящего алгоритма.

г. Выделяются существенные ограничения в исходной (см. пункт **б** предыдущего алгоритма) и в преобразованной системе координат:

$$g_j = \sum_i r_{ji}\, \xi_i - \bar{y}_j = 0, \qquad i \in [1, q], \qquad j \in [1, q]. \tag{11}$$

д. Составляется функция Лагранжа (лагранжиан), соответствующая j-му существенному ограничению в преобразованной системе координат по аналогии с пунктом **в** предыдущего алгоритма

$$L(\xi, \lambda) = \sum_i \mu_i \xi_i^2 + \sum_{j=1}^{q} \lambda_j \left(\sum_i r_{ji}\, \xi_i - \bar{y}_j \right), \qquad l, i \in [1, q]. \tag{12}$$

е. По аналогии с пунктом **г** предыдущего алгоритма формируются системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \xi_i} = 2\mu_i\, \xi_i + \lambda_j\, r_{ji} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_j} = \sum\limits_i r_{ji}\, \xi_i - \bar{y}_j = 0. \end{cases} \tag{13}$$

ж. Системы (13) решаются относительно неизвестных.

В отличие от системы (8), решение системы уравнений (13) можно получить в явном виде. Действительно, так как

$$\xi_i = -\lambda_j \frac{r_{ji}}{2\mu_i},$$

то последнее уравнение в системе (13) для j-го ограничения принимает вид

$$\lambda_j = -\frac{2\bar{y}_j}{\sum \dfrac{r_{ji}^2}{\mu_i}}, \qquad j \in [1, q], \tag{14}$$

Поставляя (14) в (13), получим соотношения для определения координат j-й условно оптимальной точки

$$\hat{\xi}_i = -\frac{2\bar{y}_j}{\sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{\bar{r}_{jk}^{\,2}}{\bar{\mu}_k}},$$

где

$$\bar{r}_{ji} = \frac{r_{jk}}{r_{ij}}, \qquad \bar{\mu}_k = \frac{\mu_k}{\mu_i}, \qquad j, k, i \in [1, q].$$

з. Вычисляются численные значения критериальной функции в тех условно оптимальных точках, которые принадлежат области допустимых решений

$$f_j = \sum_{i=1}^{q} \mu_i \hat{\xi}_i^2, \qquad j \in [1, q], \tag{15}$$

и выбирается минимальное значение, определяющее оптимальную точку (пункты **и**, **к**, **л**). Переход к старой системе координат осуществляется в соответствии с соотношением

$$\hat{y}_i = \sum_{k=1}^{q} r_{ik}^{-1} \hat{\xi}_k, \qquad i \in [1, q], \tag{16}$$

где r_{ik}^{-1} — элементы обратной матрицы $\mathbf{R}^{-1}$.

Второй из предложенных алгоритмов существенно сокращает объем вычислительных операций, так как основной вычислительный ресурс тратится на однократное вычисление собственных значений и собственных векторов матрицы коэффициентов **A** критериальной полиномиальной функции, а также неоднократное обращение матрицы **R** — собственных векторов матрицы **A**.

Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике. — М.: Наука, 1980.—976 с.

Воронин А. Н. Многокритериальный синтез динамических систем. — Киев: Наук. думка, 1992.—160 с.

Краснощеков П. С., Морозов В. В., Федоров В. В. Декомпозиция в задачах проектирования // Техническая кибернетика.—1979.—№ 2.—С. 7—16.

METHODS FOR DETERMINING OPTIMUM DESIGN PARAMETERS OF COMPOUND TECHNICAL SYSTEMS WITH RESTRICTIONS IMPOSED

Yu. K. Ziatdinov

Technique is offered for determining optimum design parameters for a system when obvious restrictions are imposed.