ТЕОРИЯ РЕАЛЬНЫХ ВЫРОЖДЕННЫХ КАРЛИКОВ: ОЦЕНКА МИКРОСКОПИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ И РАСЧЕТ МАКРОСКОПИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК

М. В. Ваврух, Н. Л. Тышко, С. В. Смеречинский

Львовский национальный университет имени Ивана Франко, кафедра астрофизики
ул. Кирилла и Мефодия, 8, Львов, 79005, Украина
e-mail: vavrukh@physics.wups.lviv.ua

По данным о массах и радиусах вырожденных карликов, полученным из наблюдательных данных миссии HIPPARCOS, в рамках модели Чандрасекара выполнены оценки параметра релятивизма для реальных карликов. Рассмотрено обобщение модели Чандрасекара на случай “водородных” карликов. Предложена обобщенная модель карлика, учитывающая гравитационные и электрические взаимодействия. Показано, что учет электрических взаимодействий существенно влияет на соотношение “энергия – радиус”. Наблюдаемое распределение карликов по радиусам качественно соответствует рассчитанной зависимости “энергия – радиус”.

ВВЕДЕНИЕ

Наблюдения, выполненные спутниковыми обсерваториями в последние десятилетия, снова привлекли внимание к вырожденным карликам [5–7, 10]. В частности, в рамках миссии HIPPARCOS (Европейское космическое агентство, 1997) [4] получены достоверные данные как о карликах в двойных системах, так и карликах поля. К настоящему времени лишь небольшая часть наблюдательных данных обработана, а различные методы определения характеристик карликов дают различные результаты. Например, отклонения найденных масс достигают 25% и более [6]. Традиционным тестом для теории карликов служит соотношение “масса – радиус”. Однако в связи с погрешностями определения масс и радиусов желательно иметь и другие соотношения, выполняющие роль тестов и позволяющие интерпретировать всю совокупность наблюдательных данных. Элементарная теория холодных вырожденных карликов построена в 40-х годах прошлого века С. Чандрасекаром [2, 3]. Модель Чандрасекара – идеальный релятивистский вырожденный электронный газ и статически распределенные ядра, в которых сосредоточена масса. Химический состав – однородный (не зависит от координат). В этой теории фигурируют два параметра: параметр релятивизма $x_0 = \frac{\hbar}{m_0 c}\left(3\pi^2 n_0\right)^{1/3}$, ($m_0$ – масса электрона, n_0 – концентрация электронов в центре звезды) и параметр $\mu_e = A/Z$, определяющий химический состав (A – число нуклонов, Z – число протонов в ядре). Уравнение механического равновесия позволяет определить характеристики звезды как функции этих параметров. Исключая один из указанных параметров, можно получить соотношения между двумя характеристиками (при фиксированном другом параметре), например известное соотношение “масса – радиус”. Предел Чандрасекара $x_0 \to \infty$, соответствующий звезде нулевого радиуса, устанавливает ограничение на массу карлика: $M < M_{Ch}$ (для гелиевого карлика $M_{Ch} \approx 1.44 M_\odot$). Наблюдательные данные свидетельствуют о том, что карлики малого радиуса не существуют, а массы их значительно ниже M_{Ch} (среднестатистическая масса $\sim 0.6 M_\odot$). Таким образом, модель Чандрасекара не объясняет наблюдаемого распределения карликов по массам и радиусам. Обобщению теории Чандрасекара посвящены работы Солпитера, Хамады, Шацмана, Каплана, Вуда и др. [3], анализирующие роль кулоновского взаимодействия частиц, химического состава, процесса нейтронизации и эффектов общей теории относительности. Заметим, что влияние эффектов нейтронизации и общей теории относительности проявляется при очень высоких плотностях, поэтому не может быть существенным для реальных карликов.

МОДИФИЦИРОВАННОЕ УРАВНЕНИЕ МЕХАНИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ ХОЛОДНОГО КАРЛИКА И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ ДЛЯ РЕАЛЬНЫХ КАРЛИКОВ

В модели Чандрасекара равновесие между давлением электронного газа на расстоянии r от центра звезды и гравитационным сжатием сводится к уравнению для локального химического потенциала электронов

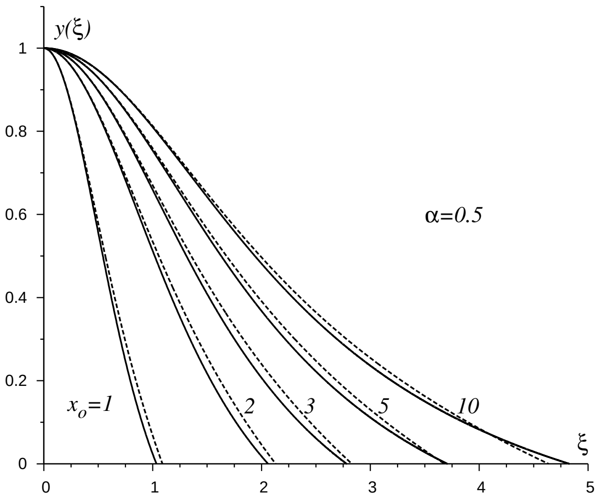

Рис. 1. Семейство решений уравнений (4) и (9)

(локальной энергии Ферми) $\mu(r)$:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\mu(r)}{dr}\right) = -\frac{32\pi^2}{3h^3c^3}G\left(m_u\mu_e\right)^2\left\{2\mu(r)m_0c^2+\mu^2(r)\right\}^{3/2}. \tag{1}$$

Уравнение (1) несколько отличается от уравнений в оригинальных работах Чандрасекара [2], оно напоминает уравнение Лэна–Эмдена [3] и имеет естественную асимптотику на поверхности звезды: $\mu(r) \to 0$ при $r \to R$ (где R – радиус звезды). Переходя от r, $\mu(r)$ к безразмерным величинам ξ, $y(\xi)$ по формулам

$$r = \xi\lambda, \quad \mu(r) = \varepsilon_0(x_0)m_0c^2y(\xi), \quad \varepsilon_0(x_0) = \left(1+x_0^2\right)^{1/2}-1 \tag{2}$$

и выбирая масштаб λ из условия

$$\frac{32\pi^2G}{3(hc)^3}\left[m_0m_u\mu_ec^2\lambda\varepsilon_0(x_0)\right]^2 = 1 \tag{3}$$

(m_u – атомная единица массы), преобразуем уравнение (1) к безразмерной форме:

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{dy}{d\xi}\right) = -\left\{y^2+\frac{2}{\varepsilon_0(x_0)}y\right\}^{3/2}. \tag{4}$$

Уравнение (4) удовлетворяет граничным условиям $y(0) = 1$, $y\,'(0) = 0$ и условию $y(\xi) \geq 0$. Семейство решений уравнения (4) представлено на рис. 1 сплошными кривыми ($1 \leq x_0 \leq 10$). Как видно из рисунка, заданному x_0 соответствует безразмерный радиус звезды $\xi_1 \equiv \xi_1(x_0)$ ($y(\xi_1) = 0$, $y\,'(\xi_1) < 0$). Макроскопические характеристики звезды (радиус R, масса M, энергия E) определяются параметрами x_0 и μ_e:

$$R(x_0,\mu_e) = R_0\frac{\xi_1(x_0)}{\mu_e\varepsilon_0(x_0)}; \quad M(x_0,\mu_e) = \frac{M_0}{\mu_e^2}\xi_1^2(x_0)\left|\frac{dy}{d\xi_1}\right|; \quad E(x_0,\mu_e) = \frac{E_0}{\mu_e^3}I(x_0). \tag{5}$$

Масштабные множители являются комбинациями универсальных констант

$$R_0 = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2}\frac{1}{4\pi}\left(\frac{h^3}{c\,G}\right)^{1/2}\frac{1}{m_0m_u}, \quad M_0 = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2}\frac{1}{4\pi}\left(\frac{hc}{Gm_u^2}\right)^{3/2}m_u, \quad E_0 = G\frac{M_0^2}{R_0}, \tag{6}$$

а $I(x_0)$ определено следующими соотношениями:

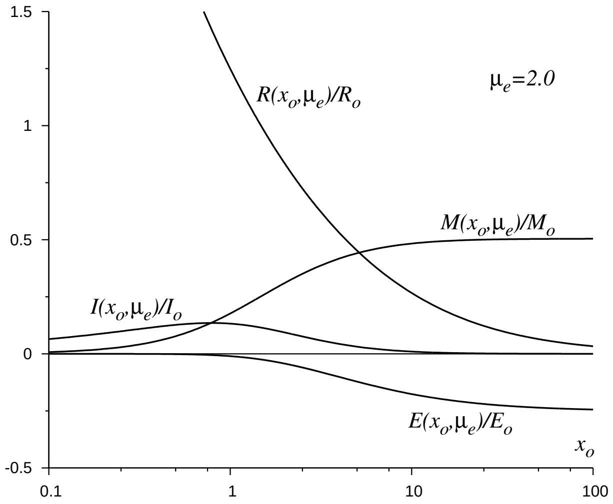

Рис. 2. Зависимость характеристик карликов от параметра x_0 в модели Чандрасекара ($\mu_e = 2.0$)

$$
\begin{aligned}
I(x_0) &= \varepsilon_0^{-3}(x_0) \int\limits_0^{\xi_1(x_0)} d\xi\, \xi^2 \left\{ x^3(\xi)[(1+x^2(\xi))^{1/2} - 1] - \frac{1}{8} f(x(\xi)) \right\} + \\
&\quad + \varepsilon_0^{-2}(x_0) \int\limits_0^{\xi_1(x_0)} d\xi\, \xi^3 \frac{dy}{d\xi}\, x^3(\xi); \quad x(\xi) = \varepsilon_0(x_0) \left\{ y^2(\xi) + \frac{2}{\varepsilon_0(x_0)} y(\xi) \right\}^{1/2}, \qquad (7) \\
f(x) &= x(1+x^2)^{1/2}(2x^2 - 3) + 3 \ln[x + (1+x^2)^{1/2}].
\end{aligned}
$$

При этом R_0 и M_0 имеют значения, вполне адекватные задаче: $R_0 \approx 1.12 \cdot 10^{-2} R_\odot$, $M_0 \cong 3 M_\odot$. Как видно из рис. 2, радиус карлика является монотонно убывающей функцией параметра x_0, масса – монотонно возрастающей, а полная энергия – монотонно убывающей отрицательной функцией.

Используя значения масс и радиусов, найденных в работе [6] по наблюдениям HIPPARCOS, мы решили обратную задачу и нашли по формулам (5) параметры модели x_0 и μ_e для девяти карликов из двойных систем и 11 полевых. Как видно из рис. 3, для 18 звезд $0.9 \le x_0 \le 1.5$. Отсюда следует, что вещество в центральных областях карликов находится на границе релятивистского вырождения, а не в ультрарелятивистском состоянии. Поэтому эффекты общей теории относительности и нейтрализация несущественны, и модель Чандрасекара в первом приближении адекватна реальным карликам. Однако в пределах этой модели трудно объяснить, почему x_0 находится именно в этой области, ведь энергия звезды является монотонно убывающей функцией этого параметра и энергетически выгодна реализация более высоких значений x_0.

МОДЕЛЬ "ВОДОРОДНОГО" КАРЛИКА

Как видно из рис. 3, для некоторых карликов $1.8 \le \mu_e \le 2.0$. Это так называемые "водородные" карлики, содержащие водород в своих приповерхностных слоях. Весьма вероятно, что они являются конечным продуктом эволюции звезд малых масс и обладают неоднородным химическим составом: содержат в основном гелий во внутренних областях и водород – во внешних. Описание таких карликов в рамках химически однородной модели приводит к значениям $\mu_e < 2$, что нефизично. Естественным обобщением модели Чандрасекара для таких звезд может служить модель с пространственно неоднородным параметром $\mu_e \equiv \mu_e(r)$. Мы использовали полуфеноменологическую модель, в которой

$$
\mu_e(r) = \mu_e(0) t(r/R), \qquad t(r/R) = \left\{ 1 + \alpha \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right\}^{-1}, \qquad (8)
$$

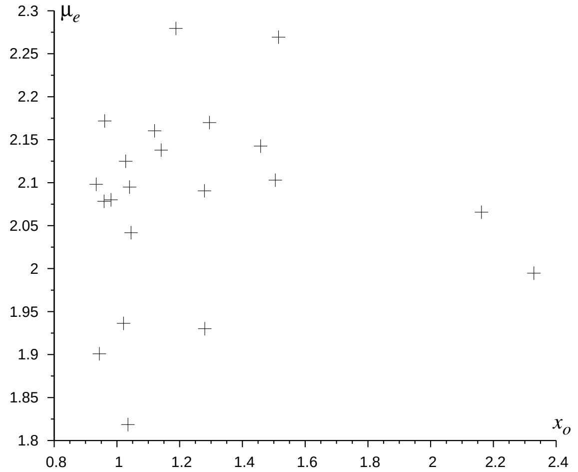

Рис. 3. Микроскопические параметры x_0, μ_e группы реальных карликов

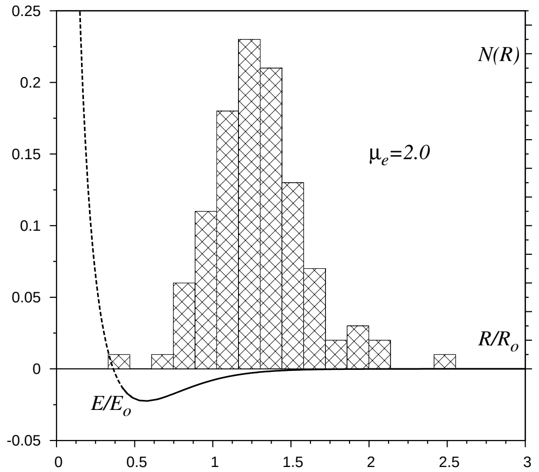

Рис. 4. В верхней части рисунка – наблюдаемое распределение карликов по радиусам, в нижней части – зависимость "энергия – радиус", рассчитанная с учетом гравитационных и кулоновских взаимодействий

где $\mu_e(0) = 2.0$ и соответствует гелию, а α является параметром, постоянным для конкретной звезды. Поскольку плотность вещества $\rho(r) = n(r)m_u\mu_e(r)$, то уравнение механического равновесия в такой модели в безразмерной форме приобретает следующий вид:

$$\frac{1}{\xi^2}\cdot\frac{d}{d\xi}\left\{\frac{\xi^2}{t(\xi)}\cdot\frac{dy}{d\xi}\right\} = -t(\xi)\left\{y^2 + \frac{2}{\varepsilon_0(x_0)}\,y\right\}^{3/2}, \tag{9}$$

где $t(\xi) = \{1+\alpha(\xi/\xi_1)^2\}^{-1}$, а масштаб λ определяется условием $32\pi^2 G(3h^3c^3)^{-1}[m_0 m_u \lambda c^2 \varepsilon_0(x_0)\mu_e(0)]^2 = 1$. Семейство решений этого уравнения при $\alpha = 0.5$ представлено на рис. 1 пунктирными кривыми. Как видно из рисунка, при небольших значениях x_0 область существования решений уравнения (9) больше области существования решений уравнения (4) при том же x_0, что приводит к увеличению радиуса звезды и уменьшению её массы при заданной плотности в центре.

ТЕОРИЯ ВЫРОЖДЕННЫХ КАРЛИКОВ КАК МИКРОСКОПИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ МЕТАЛЛОВ

По своей электронной структуре вещество вырожденных карликов представляет собой простейший металл – кристаллическая решетка ядер и полностью коллективизированная слабо неидеальная подсистема релятивистских электронов. Попытки учета кулоновских взаимодействий в однородной релятивистской модели электронного газа известны с середины прошлого века. В частности, в работе [8] показано, что в пространственно однородной модели это приводит к незначительному уменьшению давления по сравнению с идеальной системой. Однако особенность задачи состоит в том, что в условиях компенсации давления идеального электронного газа и гравитационного сжатия влияние кулоновских взаимодействий может стать существенным. Корректный учет кулоновских взаимодействий между частицами можно выполнить методами современной микроскопической теории металлов, трансформировав их к описанию релятивистской пространственно неоднородной электронной подсистемы [1]. В связи с высокой плотностью электронная подсистема является слабо неидеальной, поэтому при её описании ограничимся приближением хаотических фаз. Для вычисления вклада электрон-ядерных взаимодействий используем базисный подход [11], в котором электронная система служит базисной системой, ограничиваясь в практических расчетах вторым порядком теории возмущений. В этом приближении полная энергия электрон-ядерной модели карлика состоит из гравитационной энергии взаимодействия ядер, энергии взаимодействующего релятивистского электронного газа и энергии эффективных электрических экранированных взаимодействий ядер, расположенных в узлах кристаллической решетки.

Поскольку вклад электронных взаимодействий является малым по сравнению с энергией идеальной подсистемы электронов, мы учли его по теории возмущений, считая, что пространственное распределение электронов соответствует уравнению (4). Наиболее существенный вклад в полную энергию модели за счет кулоновских взаимодействий дает решеточная сумма. Это слагаемое – положительно, в то время как все другие слагаемые – отрицательные. Мы рассмотрели случай простой кубической решетки с учетом 50 координационных сфер. В рассмотренном приближении зависимость "энергия – радиус" представлена в нижней части рис. 4 (энергия – в единицах E_0, радиус – в единицах R_0). В отличие от модели Чандрасекара, полная энергия является немонотонной функцией радиуса, обладающей минимумом в окрестности $R \approx R_0$. В верхней части рис. 4 представлено наблюдаемое распределение 110 карликов по радиусам [6, 9]. При значении радиуса порядка $0.7 \cdot 10^{-2} R_{\odot}$ энергия звезды превращается в нуль, что служит ограничением минимальной величины радиуса звезды.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Определенный в рамках модели Чандрасекара по наблюдательным данным параметр релятивизма в центре вырожденных карликов x_0 свидетельствует о том, что вещество этих звезд не находится в ультрарелятивистском состоянии, поэтому указанная модель вполне обоснована как базовая. В то же время известно, что структура вещества на больших масштабах определяется гравитационными взаимодействиями, а на малых – электромагнитными. Обобщенная модель, учитывающая гравитационные и электрические взаимодействия, приводит к немонотонной зависимости "энергия – радиус", которая может служить еще одним тестом теории. Как видно из рис. 4, максимум наблюдаемого распределения карликов по радиусам приближенно соответствует минимуму полной энергии звезды, а существование некоторого минимального радиуса, вытекающее из этой модели, объясняет отсутствие карликов с очень малыми радиусами.

[1] *Ваврух М. В, Тишко Н. Л.* Кореляційні функції релятивістських вироджених ідеальних фермі-систем у довгохвильовому наближенні // Вісник Львівського університету. – 2001. – **34**. – С. 3–11.

[2] *Чандрасекар С.* Введение в учение о строении звезд. – М.: ИЛ, 1950. – 476 с.

[3] *Шапиро С., Тьюколски С.* Черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды. Т 1. – М.: Мир, 1985. – 256 с.

[4] European Space Agency. The HIPPARCOS and Tycho Catalogues. – Noordwijk, Netherlands: ESA SP-1200, 1997.

[5] *Girard T. M., Wu H., Lee J. T., et al.* A redetermination of the mass of Procyon // Amer. Astron. Soc. – 1996. – **28**, 188th AAS Meeting. – P. 919.

[6] *Provencal J. L., Shipman H. L., Hog E., Thejll P.* Testing the white dwarf mass-radius relation with HIPPARCOS // Astrophys. J. – 1998. – **494**, N 2. – P. 759–767.

[7] *Provencal J. L., Shipman H. L., et al.* Wide field planetary camera 2 photometry of the bright, mysterious white dwarf Procyon B // Astrophys. J. – 1997. – **480**, N 2. – P. 777–783.

[8] *Salpeter E. E.* Energy and pressure of a zero-temperature plasma // Astrophys. J. – 1961. – **134**, N 3. – P. 669–682.

[9] *Shipman H. L.* Masses and radii of white-dwarf stars. III. Results for 110 hydrogen-rich and 28 helium-rich stars // Astrophys. J. – 1979. – **228**, N 1. – P. 240–256.

[10] *Shipman H. L., Provencal J. L., Hog E., Thejll P.* The mass and radius of 40 Eridani B from HIPPARCOS: an accurate test of stellar interior theory // Astrophys. J. – 1997. – **488**, N 1. – P. L43–L46.

[11] *Vavrukh M., Krokhmalskii T.* Reference system approach in the electron liquid theory. I. General relations // Phys. Stat. Sol. (b). – 1991. – **168**. – P. 519–539.