

doi: <https://doi.org/10.15407/kfnt2023.06.036>

УДК 521.135

Віней Кумар¹, Саван Кумар Маріг²

¹Департамент математики, Делійський коледж імені Закіра Хусейна
Делійського університету, Делі-10001, Індія

²Кафедра математики, коледж Рамджас, Університет Делі, Делі-110007, Індія
E-mail: sawanmarig07@gmail.com

Вплив збурення коріолісових і відцентрових сил на басейни збіжності Ньютона — Рафсона у фотогравітаційній магнітно-бінарній задачі зі змінною масою

У цій статті ми досліджували ефекти малих збурень коріолісових (Ω) та відцентрових (ω) сил у фотогравітаційній магнітно-бінарній задачі, що включає вплив третього тіла у вигляді змінної маси. Метою цієї роботи є аналіз впливу відцентрових сил та інших параметрів (магнітного моменту M і радіаційного тиску q) на існування та еволюцію точок рівноваги, басейнів конвергенції (БК), ступінь непередбачуваності у БК. Крім того, вивчення впливу M і q (при наявності інших параметрів) на стійкість точок рівноваги також є одним із аспектів цієї роботи. Для різних значень параметрів загальна кількість випадків неколінеарних точок рівноваги становить 3, 5 і 7. Вплив різних параметрів на еволюцію точок рівноваги демонструється графічно. Усі неколінеарні точки рівноваги виявляються нестабільними для допустимого діапазону параметрів цієї моделі. Зміни геометрії БК також показано та пояснено за допомогою графіків. Вплив M , q і ω на ступінь непередбачуваності у БК досліджується за допомогою методу ентропії басейну. Показано, що для повного діапазону M і q БК лежать у фрактальній області, а для значень $M = 1.37 \dots 1.38$ і $1.40 \dots 1.44$ межі БК лежать у нефрактальній області.

Ключові слова: відцентрова сила, сила Коріоліса, магнітна бінарна задача, басейн конвергенції, ентропія басейну.

1. ВСТУП

У галузі небесної механіки та космічної динаміки ми зазвичай спостерігаємо складні нелінійні моделі. Багато вчених десятиліттями досліджували структуру фазового простору цих моделей. Однією із таких цікавих моделей в цій області є кругова обмежена проблема N тіл. Для того щоб зробити цю модель більш реалістичною, потрібно врахувати різні збурення, такі як радіаційний тиск, вплив сплюсненості, сонячний вітер, зміна маси, атмосферного опору, потенціалу поясу, магнітного дипольного впливу тощо. Останнім часом опубліковано кілька робіт для $N = 3, 4, 5$ і 6 . У цій роботі ми розглядатимемо одну з таких моделей, тобто кругову обмежену проблему трьох тіл, первинними елементами якої є магнітні диполі, а у ролі третього тіла береться змінна маса.

Багато дослідників вивчали обмежену задачу трьох тіл з впливом малих збурень коріолісових і відцентрових сил. Є ціла серія робіт, які стосуються впливу малих збурень коріолісової і відцентрової сил [1—3, 6, 16, 17, 19—21]. У роботі [20] Шебелі досліджував вплив малого збурення сили Коріоліса в обмеженій задачі трьох тіл і обговорив стійкість точок рівноваги. Він вважав, що невелика зміна сили Коріоліса не порушує впливу відцентрової сили і зробив висновок, що сила Коріоліса є стабілізаційною силою. У роботі [2] Бхатнагар і Галлан досліджували вплив малих збурень коріолісових та відцентрових сил на положення та стійкість точок рівноваги. У роботі [3] досліджувався вплив малих збурень у коріолісових і відцентрових силах на нелінійну стійкість точок рівноваги. Було помічено, що трикутні точки рівноваги є стабільними для будь-якого співвідношення мас, крім трьох масових співвідношень, тоді як колінеарні точки рівноваги завжди нестабільні. У роботах [14, 15] Сінгх і Ішвар вивчали збурення коріолісових і відцентрових сил у обмеженій проблемі трьох тіл при наявності змінної маси. Виявилось, що ці збурення мають значний вплив на положення точок рівноваги у системі. Зокрема, було виявлено, що стійкість точок трикутної рівноваги залежить від збурених параметрів.

У роботі [16] Сінгх і Вінсент досліджували вплив збурень коріолісових і відцентрових сил на стійкість точок рівноваги в обмеженій задачі чотирьох тіл. Вони виявили, що на позиції точок рівноваги впливає невелике збурення відцентрової сили, але на них не впливає сила Коріоліса. Також мале збурення впливає на стійкість точок рівноваги.

У роботі [17] Сурай та ін. досліджували обмежену задачу чотирьох тіл на вплив малого збурення коріолісових і відцентрових сил на точки рівноваги і кривих нульової швидкості. Помічено, що невелике збурення відцентрової сили спричиняє істотний вплив на положення точок рівноваги, але невелике збурення сили Коріоліса не впливає на положення точок рівноваги. Однак на стабільність точок рівноваги сильно впливає невелике збурення сили Коріоліса. Досліджено також

вплив невеликих збурень коріолісової та відцентрової сил на топологію басейнів конвергенції Ньютона — Рафсона.

У роботі [1] Аггарвал та ін. вивчали вплив малих збурень сили Коріоліса і відцентрових сил на існування точок рівноваги в обмеженій задачі чотирьох тіл зі змінною масою. Вони показали, що є 8 чи 10 точок лібрації, з яких 2 чи 4 колінеарні, а решта неколінеарні. Крім того, вони виявили, що всі точки лібрації нестабільні. Визначались також можливі області руху з використанням поверхні нульової швидкості та досліджувався вплив сил Коріоліса та відцентрових сил на топологію басейнів конвергенції.

У роботі [18] Сурай та ін. вивчали комбіновану дію малих збурень коріолісових і відцентрових сил і взаємодії трьох тіл на існування стаціонарних точок у R3BP. Вони спостерігали, що на кількість точок рівноваги, положення та переміщення точок рівноваги істотно впливають збурення відцентрової сили. Однак на стійкість рівноваги точок також сильно впливають збурення сили Коріоліса. Відмічено також значний вплив збурення відцентрової сили на топологію басейнів конвергенції.

Нещодавно у роботі Ідрісі та ін. [6] досліджувався вплив сил Коріоліса та відцентрових сил на існування та положення точок рівноваги в обмеженій задачі шести тіл. Спостерігався значний вплив збурених параметрів на положення та стійкість точок рівноваги.

У нашій роботі ми розглядатимемо вплив фотогравітаційної магнітно-бінарної задачі зі змінною масою при наявності малих збурень відцентрової та коріолісової сил. Це перший розгляд впливу збурень сил Коріоліса і відцентрових сил при наявності магнітних диполів та впливу фотогравітації на первинні тіла в R3BP. Ми дослідили еволюції точок рівноваги та їхньої стійкості під дією малих збурень сил Коріоліса та відцентрових сил. Ретельно досліджено природу басейнів конвергенції та ентропію басейну на існування фракталів. Результати представлено графічно.

2. РІВНЯННЯ РУХУ, ПАРАМЕТРИЧНА ЕВОЛЮЦІЯ ТА ЛІНІЙНА СТІЙКІСТЬ ТОЧОК РІВНОВАГИ ДАНОЇ МОДЕЛІ

2.1. Рівняння руху

Ми розглядаємо обмежену задачу трьох тіл, у якій первинні тіла P_1 та P_2 з масами m_1 та m_2 рухаються по колових орбітах навколо спільного центра мас з постійною кутовою швидкістю (рис. 1). Первинні тіла також піддаються впливу магнітного поля. Вивчаємо рух зарядженої частинки P заряду q (третє тіло, маса якого змінюється з часом), під впливом первинних елементів, але на рух первинних елементів третє тіло не впливає. За початок O в синодичній системі координат приймається центр мас. За вісь x приймається лінія, що сполучає центри первинних тіл і проходить через початок O ; центр первинного тіла P_1

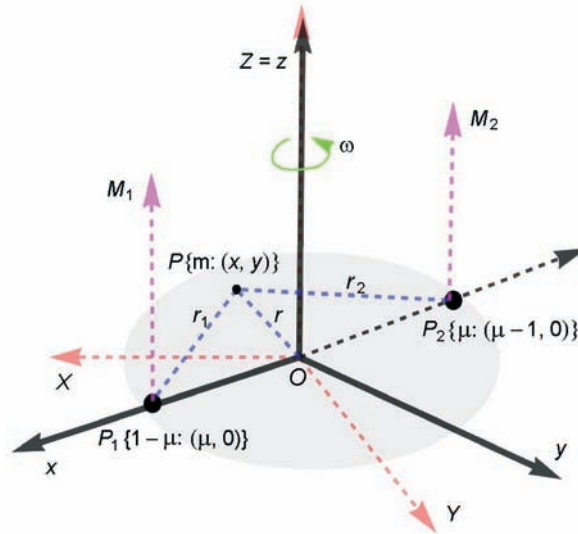


Рис. 1. Конфігурація фотогравітаційної магнітної подвійної задачі

лежить на додатній півосі x , а центр первинного тіла P_2 — на від’ємній півосі x . Пряму, перпендикулярну до площини руху первинних елементів, що проходить через початок координат, прийнято за вісь z , а лінію, що проходить через початок координат O перпендикулярно до осі x , приймається за вісь y . Одиниці вимірювання часу та відстані вибираємо такими, щоб гравітаційна стала, довжина між первинними елементами та сума їхніх мас дорівнювали одиниці. Згідно з даними [8] кутова швидкість стала і дорівнює $\omega = 1$.

Тоді маси первинних елементів P_1 та P_2 дорівнюють $1 - \mu$ та μ відповідно, де $\mu = m_2 / (m_1 + m_2)$. Координати центрів первинних елементів у синодичній системі координат $Oxyz$ суть $P_1(x, y) = (\mu, 0)$, $P_2(x, y) = (\mu - 1, 0)$. Ми розглядали випадок рівних мас обох первинних елементів (тобто $\mu = 0.5$). Тоді рівняння руху для нескінченно малої змінної маси матиме вигляд

$$\frac{\dot{m}}{m}(\dot{x} - A_x - y) = (\ddot{x} - f_1 \dot{y}) - \frac{U}{x}, \quad (1)$$

$$\frac{\dot{m}}{m}(\dot{y} - A_y - x) = (\ddot{y} - f_1 \dot{x}) - \frac{U}{y}, \quad (2)$$

де

$$A_x = y \frac{q}{r_1^3} - \frac{q}{r_2^3}, \quad A_y = x \frac{q}{r_1^3} - \frac{q}{r_2^3} - \frac{q}{r_1^3} \frac{(1 - \mu)}{r_2^3},$$

$$r_1 = \sqrt{(x - \mu)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x - (\mu - 1))^2 + y^2},$$

$$\frac{M_2}{M_1}, \quad f_1 = 2 \frac{q}{r_1^3} - \frac{q}{r_2^3},$$

$$U(x, y) = \frac{q(1 - \frac{1}{r_1})}{r_1} - \frac{1}{r_2} (xA_y - yA_x) - \frac{(x^2 + y^2)}{2}.$$

Тепер розглянемо коріолісові збурення та відцентрову силу за допомогою параметрів r_1 та r_2 , таких, що кожне незбурене значення дорівнюватиме одиниці. Тоді збурені рівняння руху матимуть вигляд

$$\frac{\dot{m}}{m}(\dot{x} - A_x - y) - (\ddot{x} - f_2 \dot{y}) = \frac{U^*}{x}, \tag{3}$$

$$\frac{\dot{m}}{m}(\dot{y} - A_y - x) - (\ddot{y} - f_2 \dot{x}) = \frac{U^*}{y}, \tag{4}$$

де

$$f_2 = 2 \left(\frac{q}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \right),$$

$$U^*(x, y) = \frac{q(1 - \frac{1}{r_1})}{r_1} - \frac{1}{r_2} (xA_y - yA_x) - \frac{(x^2 + y^2)}{2}.$$

У рівняннях (3), (4) нескінченно мала маса змінюється з часом відповідно до закону Джинса [7]:

$$\frac{dm}{dt} = m^n,$$

де n — постійний коефіцієнт, а $n \in [0.4, 4.4]$. Тепер ми представимо просторово-часове перетворення, яке використано у роботі [13]:

$$x = (1/2)u, \quad y = (1/2)v, \quad dt = d,$$

де $m = m / m_0$, а m_0 — маса нескінченно малого тіла в момент часу $t = 0$.

Таким чином, збурені рівняння руху нескінченно малої змінної маси в новій системі координат (u, v) матимуть вигляд

$$\ddot{u} - f_3 \dot{v} = \frac{V}{u} - V_1, \tag{5}$$

$$\ddot{v} - f_3 \dot{u} = \frac{V}{v} - V_2, \tag{6}$$

де

$$V = \frac{1}{2}(u^2 + v^2) - \frac{2}{4} \left(\frac{3}{2} \right)^{3/2} (u^2 + v^2) - \frac{q}{1} - \frac{3}{2}$$

$$u^{-1/2} = \frac{q}{1} - \frac{(1 - \frac{1}{r_1})}{2} \left(\frac{3}{2} \right)^{3/2} \frac{q(1 - \frac{1}{r_1})}{1} - \frac{1}{2},$$

$$V_1 = \frac{3}{2} v^{-3/2} - \frac{q}{1} - \frac{3}{2},$$

$$V_2 = \frac{3}{2} v^{3/2} \frac{q}{3} \frac{1}{2} - \frac{q}{3} \frac{(1)}{3} \frac{2}{2},$$

$$\frac{2}{1} (u^{1/2})^2 v^2,$$

$$\frac{2}{2} (u^{1/2}(1)) ^2 v^2,$$

$$f_3 = 2 \frac{3/2}{3} \frac{q}{3} \frac{1}{2}.$$

Математичне формулювання нашої моделі описується рівняннями (5), (6). При $\mu = 1$, $\nu = 1$, $\omega = 0$ і $\gamma = 1$ ці рівняння мають вигляд рівнянь, представлених в роботі [8]. Крім того, при $q = 1$ і вважаючи співвідношення магнітних моментів первинних елементів за єдину силу, ми отримали рівняння руху, наведені в роботі [23].

2.2. Точки рівноваги та їхня еволюція

Точки рівноваги як точки перетину кривих $u = 0$ і $v = 0$ є розв'язками таких рівнянь:

$$u \frac{V}{u} - V_1 = 0, \quad (7)$$

$$v \frac{V}{v} - V_2 = 0. \quad (8)$$

Для різних значень параметрів μ , ν , q та γ спостерігається відсутність колінеарних точок. Крім того, спостерігається наявність 3, 5 і 7 неколінеарних точок рівноваги для різних значень параметрів, як показано на рис. 2.

У цьому розділі ми розглянули, як точки рівноваги змінюються при зміні значень μ , ν і q та постійних значеннях інших параметрів. Ми використовували програмне забезпечення Mathematica Wolfram [22] для створення графіків, які ілюструють ці зміни.

2.2.1. Вплив параметра μ . Зафіксуємо значення $\nu = 0.7$, $q = 0.5$, $\gamma = 0.1$, $\omega = 1.005$ та будемо змінювати значення параметра μ (0, 22]. Відповідне переміщення точок рівноваги показано на рис. 3а. Видно, що внаслідок збільшення параметра μ в інтервалах [0.1, 3.2] і [3.3, 22] є сім (червоний колір) і п'ять (синій колір) точок рівноваги відповідно. Для всіх значень параметра μ точка рівноваги L_1 рухається до основного тіла m_1 , а точки L_2, L_5 віддаляються від початку системи координат. Натомість L_3, L_4 рухаються до центра основного тіла m_1 . Якщо μ зростає в інтервалі [0.1, 3.2], точки рівноваги L_6 і L_7 рухаються назустріч одна одній, і зрештою стикаються. Для випадку п'яти точок рівноваги рух точки L_1 є повільнішим, ніж для інших точок, а у випадку семи точок рівноваги рух точки L_6 найшвидший серед інших точок рівноваги. Також видно, що рух точок рівноваги $L_1 \dots L_5$ є повільнішим у випадку п'яти точок рівноваги порівняно з випадком семи точок рівноваги.

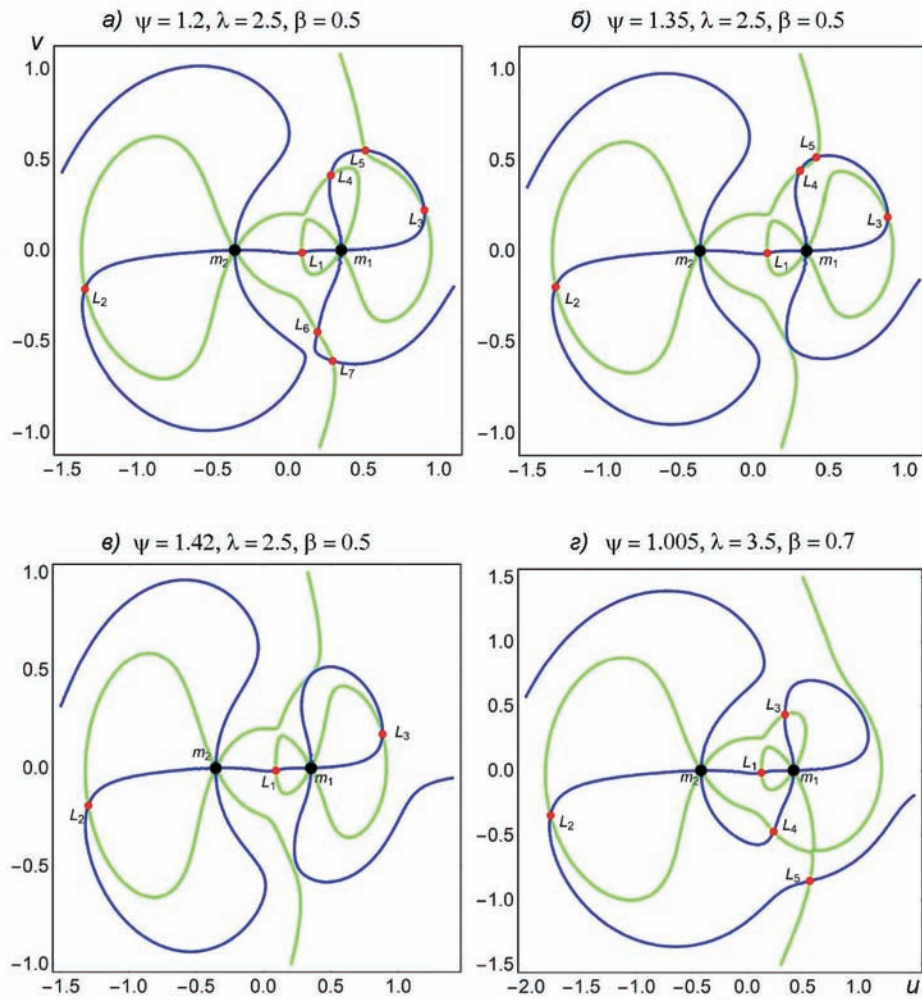


Рис. 2. Чорні точки m_1, m_2 — положення основних елементів, червоні точки $L_1 \dots L_7$ — точки рівноваги. Тут зелена (світліша) крива для $u = 0$ і синя (темніша) крива — для $v = 0$

2.2.2. Вплив параметра. У цьому випадку змінюємо значення параметра в інтервалі (1, 1.4] і фіксуємо інші значення параметрів $q = 0.5, \beta = 0.3, \lambda = 0.1$ і $\mu = 2.5$. Відповідне переміщення точок рівноваги при зміні ψ показано на рис. 3б. За рахунок збільшення значень параметра в інтервалах [1.1, 1.32], [1.33, 1.40] та [1.41, 1.44] існують сім (червоний колір), п'ять (синій колір) і три точки рівноваги відповідно. Для всіх значень параметра точка рівноваги L_1 рухається до первинної m_1 , а L_2, L_3 рухаються до початку системи координат. Якщо зростає в інтервалі [1.1, 1.40], точки рівноваги L_4 і L_5 переміщуються назустріч одна одній і нарешті стикаються, те саме спостерігається в інтервалі [1.1, 1.32] для точок рівноваги L_6, L_7 . Також виявляється, що для всіх значень ψ рух точки рівноваги L_1 є найповільнішим з-поміж інших точок рівноваги.

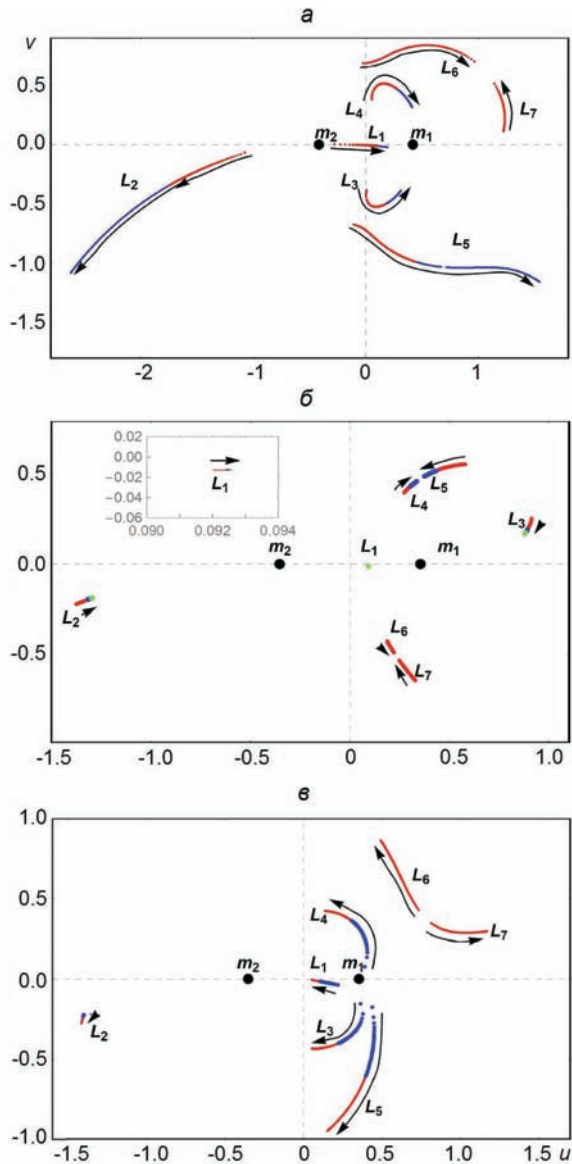


Рис. 3. Еволюція точок рівноваги (чорні точки — положення первинних елементів, чорна стрілка — напрямок руху точок рівноваги): фрагмент а — для змінного μ (0, 22) при фіксованих $\alpha=0.7, q=0.5, \beta=0.1, \gamma=0.5, \delta=1.005$; фрагменті б — для змінного μ (1, 1.44) при фіксованих $\alpha=0.5, q=0.3, \beta=0.1, \gamma=0.5, \delta=2.5$; фрагмент в — для змінного q (0, 1) при фіксованих $\alpha=0.5, \mu=2.51, \beta=0.1, \gamma=0.5, \delta=1.003$. Тут червоний, синій і зелений колір означає 7, 5 і 3 точки рівноваги відповідно

2.2.3 Вплив параметра q . Для цього випадку фіксуємо значення $\mu=2.51, \beta=0.1$ та $\delta=1.003$ та змінюємо значення параметра q (0, 1). Переміщення точок рівноваги через зміну q показано на рис. 3в. Через підвищення значень параметра q в інтервалах (0, 0.2] і [0.21, 0.9] є п'ять (синій колір) і сім (червоний колір) точок рівноваги відповідно. Для всіх значень параметра q всі точки рівноваги віддаля-

ються від початку координат, крім точки L_1 , яка наближається до початку системи координат. Крім того, ми помітили, що точки рівноваги L_6 і L_7 віддаляються одна від одної. Рух точки рівноваги L_2 є повільнішим порівняно з іншими точками рівноваги, тоді як у випадку семи точок рівноваги рух L_6 є найшвидшим порівняно з іншими точками рівноваги.

2.3. Лінійна стійкість

Лінійна стійкість, пов'язана з точками рівноваги, є одним із важливих аспектів будь-якої динамічної системи. Для визначення лінійної стійкості точок рівноваги надамо невеликого зміщення точці рівноваги (u_0, v_0) , за допомогою параметрів $(\delta u, \delta v)$. Тоді нове розташування точки рівноваги:

$$u = u_0 + \delta u, \quad v = v_0 + \delta v \quad (\delta u, \delta v \ll 1),$$

де (u_0, v_0) позначає положення точки рівноваги для фіксованого значення часу t у площині (u, v) . Ми підставляємо ці значення у рівняння (5), (6), і для лінійної стійкості розглядатимемо лише лінійні члени відносно δu та δv . Лінеаризовану форму, що відповідає (5), (6), можна записати так:

$$\ddot{\delta u} + f_3 \delta u = (V_{uu}^0 \delta u + V_{uv}^0 \delta v) - (V_{uv}^0 \delta u + V_{vv}^0 \delta v), \quad (9)$$

$$\ddot{\delta v} + f_3 \delta v = (V_{vu}^0 \delta u + V_{vv}^0 \delta v) - (V_{uv}^0 \delta u + V_{vv}^0 \delta v), \quad (10)$$

тут верхній індекс 0 означає значення в точці рівноваги (u_0, v_0) . Проте при $t > 0$ координати первинні змінюються з часом t . Таким чином, звичайним методом не можна отримати лінійну стабільність цих точок рівноваги. Тому скористаємося просторово-часовим оберненим перетворенням [12]. По-перше, зафіксуємо положення первинних тіл. Запишемо рівняння (9), (10) у фазовому просторі:

$$\begin{pmatrix} \dot{\delta u} \\ \delta u \\ \dot{\delta v} \\ \delta v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -f_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -f_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u \\ \delta u \\ \delta v \\ \delta v \end{pmatrix}, \quad (11)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\delta u} \\ \delta u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -f_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u \\ \delta u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta v \\ \delta v \end{pmatrix}, \quad (12)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\delta v} \\ \delta v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta v \\ \delta v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u \\ \delta u \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Тепер застосуємо обернені просторово-часові перетворення Мещерського, взявши

$$\begin{pmatrix} \tilde{\delta u} \\ \tilde{\delta v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{1/2} \begin{pmatrix} \delta u \\ \delta v \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \tilde{\delta u} \\ \tilde{\delta v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{1/2} \begin{pmatrix} \delta u \\ \delta v \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Потім, використовуючи рівняння (11)—(13), ми запишемо матрицю таким чином:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}, \quad (15)$$

де

$$\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{\delta u}_1, \tilde{\delta u}_2, \tilde{\delta v}_1, \tilde{\delta v}_2),$$

$$\ddot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{d\tilde{d}_1}{dt} & \frac{d\tilde{d}_1}{dt} & \frac{d\tilde{d}_2}{dt} & \frac{d\tilde{d}_2}{dt} \\ /2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & /2 & 0 & 1 \\ V_{uu}^0 & V_{1u}^0 & V_{uv}^0 & V_{1v}^0 & /2 & f_3 \\ V_{vu}^0 & V_{2u}^0 & V_{vv}^0 & V_{2v}^0 & f_3 & /2 \end{pmatrix}.$$

Тепер чисельно визначимо лінійну стійкість точок рівноваги шляхом знаходження характеристичних коренів характеристичної матриці. Характеристичне рівняння характеристичної матриці \mathbf{A} має вигляд

$$\begin{aligned} & \left[\begin{matrix} \lambda^4 - 2\lambda^3 + \lambda^2(3 - 2f_3^2) - (V_{1u}V_{uv} + V_{1v}V_{2v}) \\ \lambda^3 - (f_3^2 + V_{1u}V_{uv} + V_{1v}V_{2v}) \\ (1/16)[\lambda^4 - 4\lambda^2(f_3^2 + V_{1u}V_{uv} + V_{1v}V_{2v}) - 8f_3(V_{2u}V_{1v}) \\ - 16(V_{uv}(V_{2u}V_{1v}) + V_{1u}V_{vv} + V_{2u}V_{1v} + V_{1u}V_{2v} \\ + V_{uu}(V_{vv} + V_{2v}) + V_{uv}^2)] \end{matrix} \right] = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Точка рівноваги (u_0, v_0) є стійкою, якщо всі корені характеристичного рівняння (16) від’ємні дійсні або чисто уявні.

Ми дослідили лінійну стійкість усіх точок рівноваги для ширшого діапазону параметрів: $0 < \mu < 22$, $1 < \nu < 1.44$, $0 < q < 1$. Інші параметри залишаються фіксованими. Ми перевірили близько 150 комбінацій μ і ν для кожного значення $q = 1.1, 1.2, \dots, 1.5$ і виявили, що завжди існує принаймні один позитивний дійсний характеристичний корінь для кожної точки рівноваги. Отже, робимо висновок, що всі точки рівноваги є нестабільними.

3. БАСЕЙНИ КОНВЕРГЕНЦІЇ

Щоб краще зрозуміти динамічну систему, ми побудуємо басейни конвергенції, пов’язані з точками рівноваги. Щоб виявити ці басейни, скористаємося алгоритмом, описаним у роботах [10, 11, 19, 24, 25]. Алгоритм використовує ітераційну схему Ньютона — Рафсона (біваріантну форму) через її швидкість, простоту та точність. Ітераційний метод Ньютона — Рафсона використано для розв’язування багатовимірної форми $f(\mathbf{x}) = 0$ у вигляді

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n - \mathbf{J}^{-1}f(\mathbf{X}_n), \quad (17)$$

де \mathbf{J} — матриця Якобі $f(\mathbf{X}_n)$. Для нашої конкретної задачі ми використовуємо систему рівнянь (7), (8), щоб отримати ітераційну формулу Ньютона — Рафсона:

$$u_{n+1} = u_n \frac{U_1 U_{22} U_2 U_{12}}{U_{22} U_{11} U_{12} U_{21}} \quad (u, v) \quad (u_n, v_n), \quad (18)$$

$$v_{n+1} = v_n \frac{U_1 U_{21} U_2 U_{11}}{U_{22} U_{11} U_{12} U_{21}} \quad (u, v) \quad (u_n, v_n), \quad (19)$$

де

$$U_1 = V_u = V_1, \quad U_2 = V_v = V_2, \quad U_{11} = V_{uu} = V_{1u}, \\ U_{12} = V_{uv} = V_{1v}, \quad U_{21} = V_{vu} = V_{2u}, \quad U_{22} = V_{vv} = V_{2v},$$

тут (u_0, v_0) є початковим наближенням, а (u_n, v_n) позначає n -й крок ітерації.

Щоб зобразити БК, ми виконали всі розрахунки у програмному забезпеченні Mathematica Wolfram [22]. У цьому розділі наша мета полягає в аналізі впливу параметрів μ , q і α на топологію басейнів конвергенції Ньютона — Рафсона. Крім того, параметр β (через силу Коріоліса) не впливає на БК. У наступних розділах ми обговоримо вплив динамічних параметрів μ , q і α .

3.1. Вплив параметра μ збурення відцентрової сили. Дослідимо вплив зміни параметра μ в інтервалі $(1, 1.44)$. Дані, що стосуються цього випадку, приведено на рис. 4 і у табл. 1. Ми побудували басейни конвергенції Ньютона — Рафсона для дев'яти різних значень μ . Тут маємо три випадки за кількістю точок рівноваги: для перших п'яти значень μ знайдено сім точок рівноваги; для наступних трьох значень μ маємо п'ять точок рівноваги; для останнього значення μ є три точки рівноваги. Для всіх випадків БК охоплюють скінченну область на площині (u, v) . БК для точки рівноваги L_1 (зелений колір) простягаються в нескінченність, тоді як для інших точок рівноваги БК має скінченну форму. Слід зазначити, що всі басейни не є симетричними відносно осі u . У всіх випадках спостерігаємо, що басейни конвергенції мають чітку форму. Для випадку семи точок рівноваги (див. рис. 4а...4д і табл. 1, рядки 1...5), помічаємо, що басейни конвергенції, які відповідають скінченним областям, зменшуються, якщо значення параметра μ збільшуються. Помічено, що при збільшенні значень μ половина початкових умов (51 %) наближається до точки рівноваги L_1 . Басейни конвергенції, що відповідають точкам рівноваги L_4, L_6 , вищі від усіх інших басейнів, за винятком точки рівноваги L_1 . Ми спостерігаємо майже однакову кількість початкових умов для конфігурації семи точки рівноваги; для наступних трьох значень (u, v) площа сходиться до точок рівноваги L_2, L_5, L_3, L_7 і L_4, L_7 . В останній графі табл. 1 приведено час, витрачений центральним процесором на створення БК для цих випадків. Завдяки збільшенню значень μ мінімальний і максимальний час, потрібний процесору для зображення БК, дорівнює 10949 с і 24613 с відповідно. Крім того, ми спостерігаємо, що БК точок рівноваги L_2 (червоний колір) і L_7 (рожевий колір) розкидані в середній області.

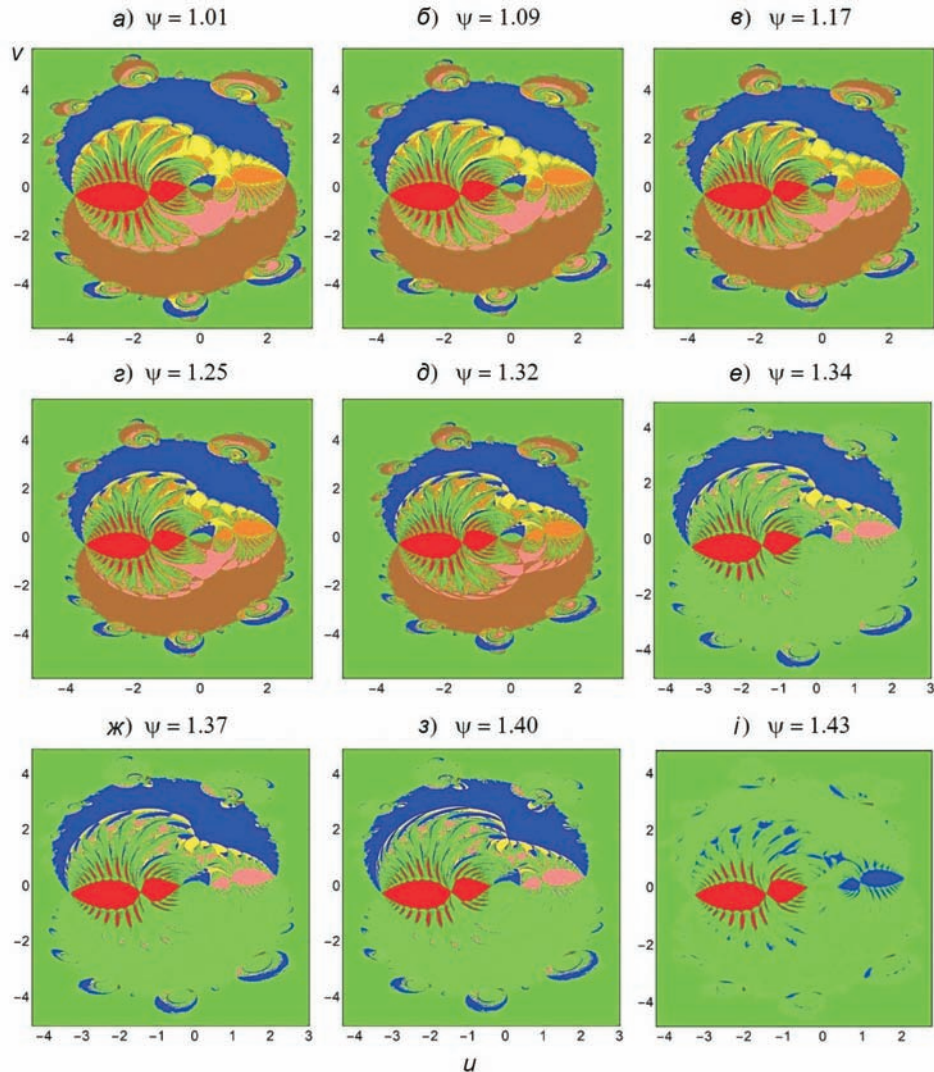


Рис. 4. Басейни збіжності Ньютона — Рафсона на площині (u, v) для змінного параметра ψ при фіксованих значеннях параметрів $\alpha = 0.5, q = 0.3, \beta = 0.1, \gamma = 0.5, \delta = 2.5$ і змінного параметра ψ . Кольором позначено атрактори: на фрагментах а...д — L_1 (зелений), L_2 (червоний), L_3 (помаранчевий), L_4 (синій), L_5 (жовтий), L_6 (коричневий), L_7 (рожевий); на фрагментах е...з — L_1 (зелений), L_2 (червоний), L_3 (рожевий), L_4 (синій), L_5 (жовтий); на фрагменті і — L_1 (зелений), L_2 (червоний), L_3 (синій)

Для випадку п'яти точок рівноваги БК (див. рис. 4е...4з і табл. 1, рядки 6...8) видно, що області басейнів конвергенції, що відповідають $\psi = 1.34 \dots 1.40$, майже однакові. Видно також, що через збільшення значення ψ більше половини початкових умов (64 %) збігаються до точки рівноваги L_1 (зелений колір). Крім того, ми помічаємо, що у площині (u, v) понад 80 % початкових умов від від'ємної півосі v сходяться до точки рівноваги L_1 . Область басейнів конвергенції, що відповідає точці рівноваги L_4 , лежить вище від всіх інших басейнів, за винятком точки рівноваги L_1 . Ми бачимо, що майже однакові кількості початко-

Таблиця 1. Кількість початкових умов, що сходяться до різних точок рівноваги внаслідок зміни параметра при $\mu = 0.5, q = 0.3, \nu = 0.1, \omega = 0.5, \gamma = 2.5$. T — процесорний час для повного виконання програми обчислення БК

| Варіант | L_1 | L_2 | L_3 | L_4 | L_5 | L_6 | L_7 | T, s | |
|---------|-------|---------|--------|---------|---------|--------|---------|--------|-------|
| 1 | 1.01 | 42.64 % | 5.24 % | 4.60 % | 16.5 % | 5.35 % | 18.74 % | 6.92 % | 24613 |
| 2 | 1.09 | 47.17 % | 4.83 % | 4.47 % | 15.22 % | 4.64 % | 17.32 % | 6.35 % | 13009 |
| 3 | 1.17 | 51.15 % | 4.50 % | 4.38 % | 14.15 % | 3.87 % | 16.07 % | 5.88 % | 10949 |
| 4 | 1.25 | 54.65 % | 4.22 % | 4.23 % | 13.23 % | 3.30 % | 15.01 % | 5.36 % | 11058 |
| 5 | 1.32 | 57.34 % | 3.99 % | 4.19 % | 12.38 % | 2.99 % | 14.54 % | 4.55 % | 16560 |
| 6 | 1.34 | 61.67 % | 5.65 % | 7.24 % | 20.16 % | 5.24 % | — | — | 62351 |
| 7 | 1.37 | 63.23 % | 5.44 % | 7.29 % | 18.95 % | 5.09 % | — | — | 24349 |
| 8 | 1.40 | 64.1 % | 5.41 % | 7.13 % | 18.26 % | 5.09 % | — | — | 48358 |
| 9 | 1.43 | 78.75 % | 9.02 % | 12.23 % | — | — | — | — | 36832 |

вих умов на площині конфігурації (u, v) збігаються до точок рівноваги L_2, L_3 і L_5 . Завдяки збільшенню μ час, який витрачає процесор, зменшується, а потім знову збільшується. Крім того, ми спостерігаємо, що БК точок рівноваги L_2 (червоний колір) і L_3 (рожевий колір) розкидані в середній області.

У випадку трьох точок рівноваги (див. рис. 4i та табл. 1, рядок 9) при значенні $\mu = 1.43$ більше трьох чвертей початкових умов (78 %) збігається до точки рівноваги L_1 (зелений колір). Для значення $\mu = 1.43$ час, який витрачає процесор, становить 36832 с. Крім того, БК точок рівноваги L_2 (червоний колір) і L_3 (синій колір) розкидані в середній області.

3.2. Вплив постійної μ , породженої диполем. Тепер розглянемо випадок зміни параметра μ в інтервалі $(0, 22)$. Дані, що стосуються цього випадку, показано на рис. 5 і табл. 2. Ми зобразили басейни конвергенції Ньютона — Рафсона для дев'яти різних значень μ . Маємо два випадки за кількістю точок рівноваги: для перших трьох значень μ знайдено сім точок рівноваги; для останніх шести значень μ є п'ять точок рівноваги. Для всіх випадків БК охоплює скінченну область на площині конфігурації (u, v) , БК точки рівноваги L_1 (зелений колір) простягається до нескінченності, тоді як для інших точок рівноваги БК має скінченну форму. Зазначається, що всі басейни не симетричні відносно осі u . Для всіх випадків басейни мають чітку форму. Для випадку семи точок рівноваги (див. рис. 5a...5e і табл. 2, рядки 1...3), басейни збіжності, що відповідають скінченним областям, розширюються, якщо значення параметра μ збільшується. Помічено, що зі збільшенням значення μ 43 % початкових умов збігаються до точки рівноваги L_1 . Басейн конвергенції, що відповідає точкам рівноваги L_3, L_4 , є вищим за всі інші басейни, за винятком точки рівноваги L_1 . Спостерігаємо, що майже однакова кількість початкових умов на площині (u, v) сходяться до точок рівноваги L_2, L_7, L_5, L_6 і L_3, L_4 . В останній графі табл. 3 приведено час, витрачений центральним процесором на

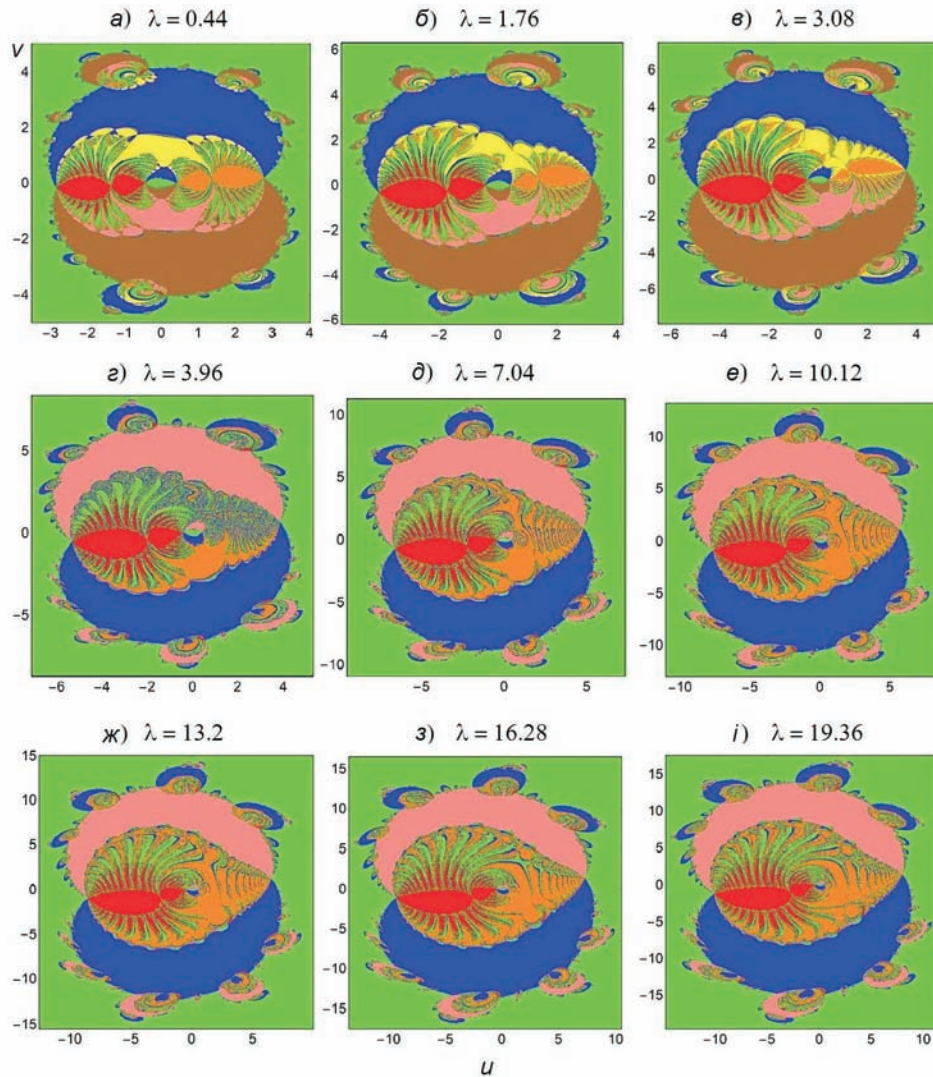


Рис. 5. Басейни збіжності Ньютона — Рафсона на площині (u, v) для змінного параметра при фіксованих значеннях параметрів $\mu = 0.7$, $q = 0.5$, $\nu = 0.1$, $\omega = 0.5$ і $\gamma = 1.005$. Кольором позначено атрактори: на фрагментах $a...в$ — L_1 (зелений), L_2 (червоний), L_3 (коричневий), L_4 (синій), L_5 (рожевий), L_6 (жовтий), L_7 (помаранчевий); на фрагментах $г...і$ — L_1 (зелений), L_2 (червоний), L_3 (синій), L_4 (рожевий), L_5 (помаранчевий)

обчислення БК для цих випадків. Через збільшення значення мінімальний і максимальний час, необхідний ЦП для побудови БК, становить від 11398 с до 11653 с відповідно. Крім того, ми спостерігаємо, що БК точок рівноваги L_2 (червоний колір) і L_5 (рожевий колір) розкидані в середній області.

Для випадку п'яти точок рівноваги БК (див. рис. 5г...5і та табл. 2, рядки 3...8) басейни збіжності, що відповідають скінченним областям, збільшуються при збільшенні значень параметра λ . Помічено, що зі збільшенням значень λ 47 % початкових умов сходяться до точки

Таблиця 2. Кількість початкових умов у відсотках, що сходяться до різних точок рівноваги внаслідок зміни параметра для фіксованих $\alpha = 0.7, q = 0.5, \beta = 0.1, \gamma = 0.5, i = 1.005$. T — процесорний час для повного виконання програми обчислення БК

| Варіант | | L_1 | L_2 | L_3 | L_4 | L_5 | L_6 | L_7 | T, s |
|---------|-------|---------|--------|---------|---------|---------|--------|--------|--------|
| 1 | 0.44 | 41.80 % | 3.44 % | 19.20 % | 19.13 % | 6.32 % | 6.43 % | 3.66 % | 11398 |
| 2 | 1.76 | 42.77 % | 4.82 % | 18.34 % | 17.30 % | 6.73 % | 5.84 % | 4.17 % | 11540 |
| 3 | 3.08 | 43.38 % | 5.14 % | 18.54 % | 16.67 % | 6.68 % | 5.62 % | 3.95 % | 11653 |
| 4 | 3.96 | 45.82 % | 5.43 % | 20.38 % | 17.74 % | 10.63 % | — | — | 13530 |
| 5 | 7.04 | 47.80 % | 5.39 % | 18.75 % | 15.33 % | 12.73 % | — | — | 14953 |
| 6 | 10.12 | 45.90 % | 5.66 % | 19.23 % | 15.09 % | 14.11 % | — | — | 15566 |
| 7 | 13.2 | 47.47 % | 5.66 % | 18.90 % | 14.27 % | 13.70 % | — | — | 14167 |
| 8 | 16.28 | 46.24 % | 5.88 % | 19.80 % | 14.52 % | 13.55 % | — | — | 13270 |
| 9 | 19.36 | 45.76 % | 5.99 % | 20.0 % | 14.45 % | 13.78 % | — | — | 15607 |

рівноваги L_1 (зелений колір). Область збіжності, що відповідає точці рівноваги L_2 , набагато менша, ніж для всіх інших точок рівноваги. Виявилось, що майже однакова кількість початкових умов на площині конфігурації (u, v) сходяться до точок рівноваги L_4, L_5 . При збільшенні значень α час, який витрачає процесор на обчислення, збільшується. Видно, що БК точок рівноваги L_2 (червоний колір) і L_5 (помаранчевий колір) розкидані у середній області.

3.3. Вплив радіаційного параметра q . Дослідимо вплив змін q в інтервалі $(0, 1)$ на БК. Відповідні дані приведено на рис. 6 і у табл. 3. Серед зображень басейнів конвергенції Ньютона — Рафсона для дев'яти різних значень q маємо два випадки: для перших трьох значень q ми маємо п'ять точок рівноваги; для інших шести значень q є сім точок рівноваги. Для всіх випадків БК покривають скінченні області на площині конфігурації (u, v) , а БК точки рівноваги L_1 (зелений колір) простягається до нескінченності, тоді як для інших точок рівноваги БК має скінченну форму. Зазначається, що всі басейни не симетричні відносно осі u . В обох випадках ми спостерігаємо, що БК мають чітку форму. Для п'яти точок рівноваги (див. рис. 6а...6в і табл. 3, рядки 1...3) ми помічаємо, що басейни збіжності, що відповідають кінцевим областям, збільшуються, якщо значення параметра q збільшується. Виявляється, що зі збільшенням значення q половина початкових умов (49 %) наближається до точки рівноваги L_1 . Басейни конвергенції, що відповідають точкам рівноваги L_2 , дуже малі порівняно з іншими. Видно також, що область басейнів для точки рівноваги L_4 (синій колір) збільшується, а для інших точок рівноваги вона зменшується. В останній графі табл. 3 приведено час, необхідний центральному процесору для побудови відповідних БК. Внаслідок збільшення значень α максимальний і мінімальний час обчислень становить 24613 і 18135 с відповідно. Крім того, видно, що БК точок рівноваги L_2 (червоний колір) і L_5 (помаранчевий колір) розсіяні в середній області.

Для випадку семи точок рівноваги (див. рис. 6г...6і та табл. 3, рядки 4...9) помічаємо, що басейни конвергенції, які відповідають скін-

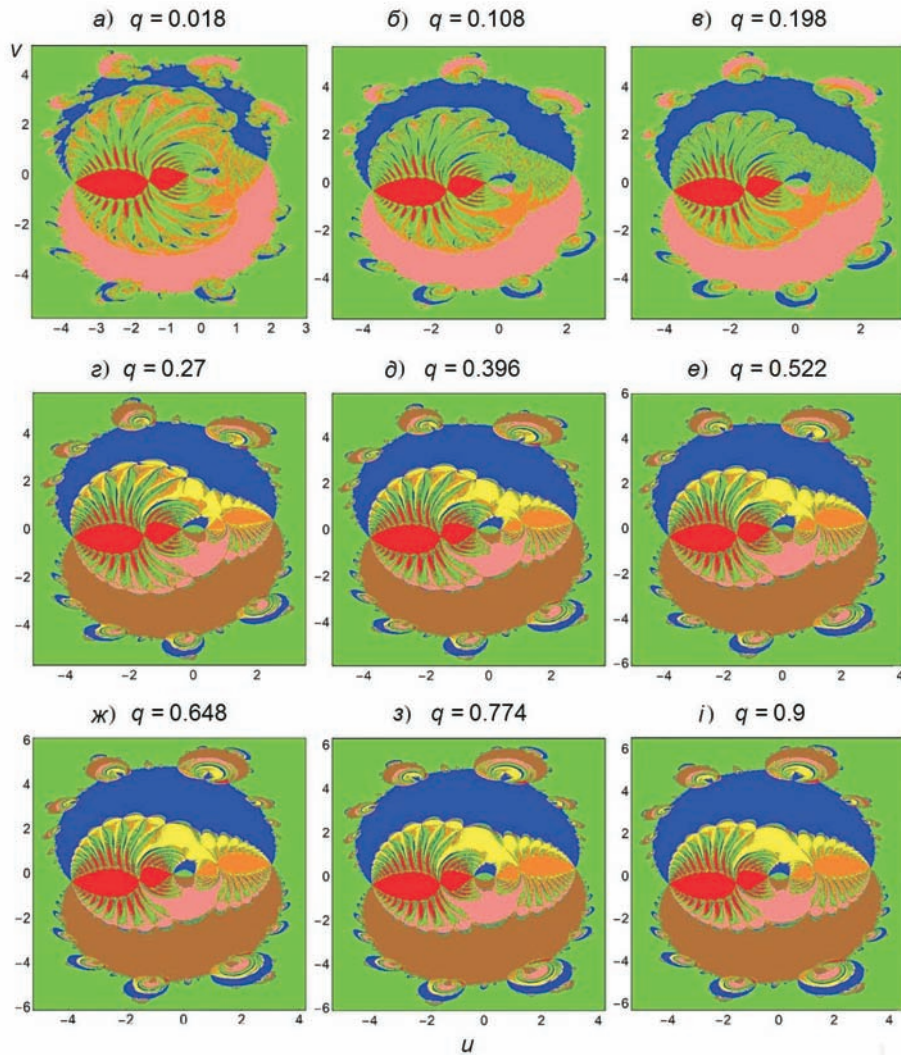


Рис. 6. Зони збіжності Ньютона — Рафсона на площині (u, v) для змінного параметра q при фіксованих значеннях параметрів $\omega = 0.5$, $\Omega = 2.51$, $\mu = 0.1$, $\nu = 0.5$ і $\gamma = 1.003$. Кольором позначено атрактори: на фрагментах $a \dots в$ — L_1 (зелений), L_2 (червоний), L_3 (синій), L_4 (рожевий), L_5 (помаранчевий); на фрагментах $г \dots і$ — L_1 (зелений), L_2 (червоний), L_3 (коричневий), L_4 (блакитний), L_5 (рожевий), L_6 (жовтий), L_7 (помаранчевий)

ченним областям, майже однакові, якщо значення параметра q збільшилося. Помічено, що при збільшенні значень q менше половини початкових умов (42 %) сходяться до точки рівноваги L_1 (зелений колір). Протяжність басейнів конвергенції, що відповідає точкам рівноваги L_3, L_4 , значно вища від всіх інших басейнів, крім точки рівноваги L_1 . Видно, що майже однакова кількість початкових умов на площині (u, v) сходяться до точок рівноваги L_2, L_7, L_3, L_4 і L_5, L_6 . В останній графі табл. 3 приведено час, витрачений центральним процесором на побудову БК. Збільшення значень q призводить до зменшення часу

Таблиця 3. Кількість початкових умов у відсотках, що збігаються до різних точок рівноваги внаслідок зміни параметра q при фіксованих $\alpha = 0.5$, $\beta = 2.51$, $\gamma = 0.1$, $\delta = 0.5$ та $\epsilon = 1.003$. T — процесорний час для повного виконання програми обчислення БК

| Варіант | q | L_1 | L_2 | L_3 | L_4 | L_5 | L_6 | L_7 | T, s |
|---------|-------|---------|--------|---------|---------|---------|--------|--------|--------|
| 1 | 0.018 | 48.20 % | 5.36 % | 21.05 % | 9.26 % | 16.13 % | — | — | 24613 |
| 2 | 0.108 | 48.12 % | 5.30 % | 20.56 % | 14.89 % | 11.13 % | — | — | 20135 |
| 3 | 0.198 | 48.02 % | 5.26 % | 19.85 % | 16.57 % | 10.31 % | — | — | 18135 |
| 4 | 0.27 | 48.83 % | 5.17 % | 18.38 % | 16.01 % | 6.82 % | 5.22 % | 4.57 % | 14322 |
| 5 | 0.396 | 43.30 % | 5.08 % | 18.48 % | 16.62 % | 6.75 % | 5.53 % | 4.24 % | 14074 |
| 6 | 0.522 | 44.39 % | 4.89 % | 18.06 % | 16.58 % | 6.52 % | 5.58 % | 3.97 % | 14344 |
| 7 | 0.648 | 42.79 % | 4.94 % | 18.47 % | 17.20 % | 6.67 % | 6.0 % | 3.93 % | 13535 |
| 8 | 0.774 | 41.26 % | 5.0 % | 18.83 % | 17.76 % | 6.87 % | 6.33 % | 3.97 % | 13926 |
| 9 | 0.9 | 42.11 % | 4.87 % | 18.48 % | 17.54 % | 6.75 % | 6.37 % | 3.88 % | 14068 |

обчислень. Крім того, видно також, що БК точок рівноваги L_2, L_5 і L_6, L_7 розсіяні у середньому регіоні.

4. ЕНТРОПІЯ БАСЕЙНУ ТА ІСНУВАННЯ ФРАКТАЛУ

Даза та ін. [4, 5] запровадили інструмент для вимірювання невизначеності басейнів, яка називається ентропією басейну. Для визначення ентропії басейну (S_b) та ентропії граничного басейну (S_{bb}) використано алгоритм [8, 9]. Згідно з визначенням ентропії граничного басейну при значеннях $S_{bb} > \lg 2$ граничний басейн є фрактальним.

У цьому розділі ми обговорюємо, як параметр α , параметри випромінювання (q) і збурення відцентрової сили (β) впливають на ентропію басейну (S_b) та ентропію прикордонного басейну (S_{bb}).

4.1. Вплив параметра α . Ми обчислили значення ентропії басейну та ентропії прикордонного басейну при збільшенні значень параметра α в інтервалі (1, 1.44] з кроком 0.01 (див. рис. 7а). На цьому графіку інші параметри фіксовані. У цьому випадку S_b і S_{bb} різняться своїми максимальними значеннями (відповідно 1.10970 і 1.25037 при $\alpha = 1.05$) і мінімальними значеннями (0.48137 і 0.55266 при $\alpha = 1.38$). Для $\alpha = 1.37 \dots 1.38$ і $1.40 \dots 1.44$ значення S_b і S_{bb} лежать нижче фрактальної області. Для решти значень α значення S_b і S_{bb} лежать у фрактальній області, тому існування фракталу підтверджено.

4.2. Вплив параметра q . Дослідимо зміну значень ентропії басейну та ентропії прикордонного басейну при збільшенні значень параметра q в інтервалі (0, 22] із кроком 0.01 (рис. 7б). Інші параметри фіксовані. У цьому випадку значення S_b і S_{bb} коливаються між максимальними значеннями (відповідно 1.10162 і 1.23468 при $q = 0.88$) і мінімальними значеннями (0.70343 і 0.82099 при $q = 10.12$). Для всіх значень q значення S_b і S_{bb} лежать у фрактальній області, тому існування фракталу підтверджено.

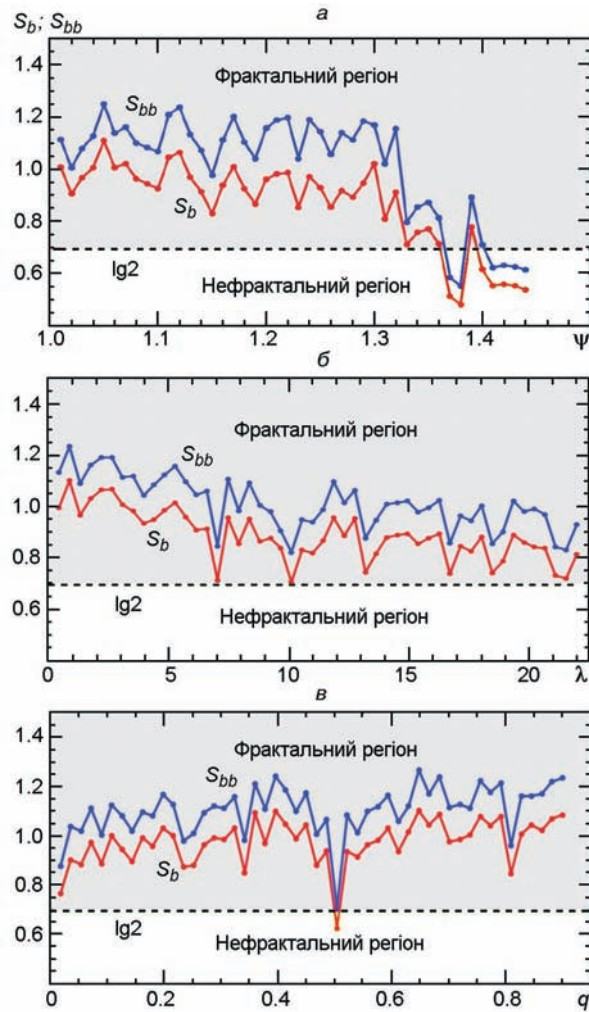


Рис. 7. Варіації ентропії басейну S_b і ентропії граничного басейну S_{bb} : a — для змінного параметра $\psi = 1 \dots 1.44$ при фіксованих значеннях параметрів $\beta = 0.5$, $q = 0.3$, $\gamma = 0.1$, $\delta = 0.5$ і $\epsilon = 2.5$; b — для змінного параметра $\lambda = (0, 22]$ при фіксованих значеннях параметрів $\beta = 0.7$, $q = 0.5$, $\gamma = 0.1$, $\delta = 0.5$ та $\epsilon = 1.005$; c — для змінного параметра $q = (0, 1)$ при фіксованих значеннях параметрів $\beta = 0.5$, $\gamma = 2.51$, $\delta = 0.1$, $\epsilon = 0.5$ і $\delta = 1.003$. Штрихова лінія $\lg 2$ розділяє фрактальну та нефрактальну області

4.3. Вплив параметра q . Дослідимо зміну значень ентропії басейну та ентропії прикордонного басейну при збільшенні значень параметра випромінювання q в інтервалі $(0, 1)$ з розміром кроку 0.01 (рис. 7в). Для цього випадку значення S_b і S_{bb} змінюються від 1.10035 і 1.26559 (при $q = 0.648$) до 0.62147 і 0.70290 (при $q = 0.504$). Майже для всіх значень q значення S_b лежать у фрактальній області, тому існування фракталу підтверджується, за винятком $q = 0.504$.

5. ЗАКЛЮЧНІ ЗАУВАЖЕННЯ

У цій статті досліджувався вплив параметрів μ , ν , q і збурень сил Коріоліса ($1 < \mu < 1.5$) та відцентрових сил ($1 < \nu < 1.44$) на існування та стійкість точок рівноваги, вплив на басейни конвергенції та ентропію басейнів у фотогравітаційній магнітній подвійній задачі, включаючи вплив змінної маси. Вплив малих збурень відцентрових сил на вищевказані аспекти є помітним. Ми показали еволюцію точок рівноваги для різних параметрів, представлених на рис. 3. Перевірка на стабільність точок рівноваги для різних діапазонів параметрів показала, що жодна точка рівноваги не є стабільною.

Для всіх чисельних симуляцій і графіків цієї роботи ми використували комп'ютер на базі процесора Intel (R) Core (TM) i7-1195G7 2.90 ГГц. Основні результати роботи можна окреслити так.

Спостерігається відсутність зміни кількості точок рівноваги після включення у розгляд пертурбацій коріолісових і відцентрових сил. Зафіксовано випадки 3, 5 і 7 неколінеарних точок рівноваги.

Час машинних обчислень басейнів конвергенції Ньютона — Рафсона більший для випадку трьох і п'яти точок рівноваги, ніж для випадку семи точок рівноваги (див. табл. 1—3).

На кожному із рис. 4...6 ми взяли приблизно 1 мільйон початкових умов на конфігураційній площині (u, v) , але не знайшли жодних незбіжних початкових умов у БК.

Для всіх випадків БК Ньютона — Рафсона є складними комбінаціями області конвергенції всіх точок рівноваги. Ці області в основному розташовані до центра конфігураційної площини (u, v) або розвернуті навколо межі круглої області. БК повністю взаємопов'язані один з одним (де б не було, їхнє злиття наявне). У цих регіонах ми не можемо передбачити кінцевого положення початкових умов. Невизначеність БК Ньютона — Рафсона пов'язана з нелінійністю потенціалу поточної моделі.

На рис. 7 ми показали графіки S_b і S_{bb} для змінних значень параметрів μ , ν і q , при фіксованих значеннях інших параметрів. Підтверджено існування фракталів при майже всіх значеннях параметрів.

Ця стаття містить комплексний аналіз фотогравітаційної магнітної подвійної задачі з урахуванням впливу змінної маси та збурень коріолісової та відцентрової сил. Результати показують, що точки рівноваги і басейни конвергенції дуже чутливі до цих параметрів, БК Ньютона — Рафсона демонструють складну та непередбачувану поведінку. Ці висновки мають значення для вивчення періодичних, квазіперіодичних і хаотичних орбіт, а також можливості прорізаних басейнів і басейнів Вада.

Майбутні дослідження в цій галузі можуть включати розширення поточної моделі до тривимірної фотогравітаційної магнітно-бінарної задачі, а також дослідження інших збурень, таких як радіаційний тиск, атмосферний опір і треті тіла. Крім того, вивчення теорії стабільності,

біфуркації та хаосу може дати змогу краще зрозуміти динаміку системи. Такі дослідження можуть мати застосування для проєктування космічних місій, літаючих формувань супутників, для оперування космічним сміттям тощо.

ДЕКЛАРАЦІЯ ПРО КОНФЛІКТ ІНТЕРЕСІВ

Автори заявляють про відсутність конфліктів інтересів щодо публікації цього рукопису.

ПОДЯКИ

Автори висловлюють щиру подяку Центру фундаментальних досліджень космічної динаміки та небесної механіки (CFRSC), Нью-Делі, Індія, за надання дослідницького обладнання для завершення цієї статті.

REFERENCES

1. Aggarwal R., Mittal A., Suraj M. S., Bisht V. (2018). The effect of small perturbations in the Coriolis and centrifugal forces on the existence of libration points in the restricted four-body problem with variable mass. *Astron. Nachr.* 339(6). 492—512. <https://doi.org/10.1002/asna.201813411>.
2. Bhatnagar K. B., Hallan P. P. (1978). Effect of perturbations in Coriolis and centrifugal forces on the stability of libration points in the restricted problem. *Celestial Mech.* 18(2). 105—112. <https://doi.org/10.1007/BF01228710>.
3. Bhatnagar K. B., Hallan P. P. (1983). The effect of perturbations in Coriolis and centrifugal forces on the nonlinear stability of equilibrium points in the restricted problem of three bodies. *Celestial Mech.* 30(1). 97—114. <https://doi.org/10.1007/BF01231105>.
4. Daza A., Bertrand G., Guery-Odelin D., Wagemakers A., Sanjuan M. A. F. (2017). Chaotic dynamics and fractal structures in experiments with cold atoms. *Phys. Rev. A.* 95(1), 013629. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.95.013629>.
5. Daza A., Wagemakers A., Georgeot B., Guery-Odelin D., Sanjuan M. A. F. (2016). Basin entropy: a new tool to analyze uncertainty in dynamical systems. *Sci. Rep.* 6(1), 31416. <https://doi.org/10.1038/srep31416>.
6. Idrisi M. J., Ullah M. S., Sikkandhar A. (2021). Effect of perturbations in Coriolis and centrifugal forces on libration points in the restricted Six-Body problem. *J. Astronaut. Sci.* 68(1), 4—25. <https://doi.org/10.1007/s40295-021-00254-3>.
7. Jeans J. H. (1928). *Astronomy and cosmogony*, Cambridge University. <https://doi.org/10.1017/S0016756800107861>.
8. Kumar V., Arif M., Ullah M. S. (2021). Capricious basins of attraction in photogravitational magnetic binary problem. *New Astron.* 83, 101475. <https://doi.org/10.1016/j.newast.2020.101475>.
9. Kumar V., Idrisi M. J., Ullah M. S. (2021). Unpredictable basin boundaries in restricted six-body problem with square configuration. *New Astron.* 82, 101451. <https://doi.org/10.1016/j.newast.2020.101451>.
10. Kumar V., Marig S. K. (2023). Effect of variable mass on N-R basins of convergence in photogravitational magnetic binary problem. *Astron. Repts.* 67(2), 194—208. <https://doi.org/10.1134/S1063772923020105>
11. Kumar V., Sharma P., Aggarwal R., Yadav S., Kaur B. (2020). The unpredictability of

- the basins of attraction in photogravitational Chermnykh's problem. *Astrophys. and Space Sci.* 365(6), 1—19. <https://doi.org/10.1007/s10509-020-03815-4>.
12. Meshcherskii I. V. (1949). *Study on the mechanics of bodies of variable mass*. Moscow.
 13. Shrivastava A. K., Ishwar B. (1983). Equations of motion of the restricted problem of three bodies with variable mass. *Celestial Mech.* 30(3), 323—328. <https://doi.org/10.1007/BF01232197>.
 14. Singh J., Ishwar B. (1984). Effect of perturbations on the location of equilibrium points in the restricted problem of three bodies with variable mass. *Celestial Mech.* 32(4), 297-305. <https://doi.org/10.1007/BF01229086>.
 15. Singh J., Ishwar B. (1985). Effect of perturbations on the stability of triangular points. In the restricted problem of three bodies with variable mass. *Celestial Mech.* 35(3), 201—207. <https://doi.org/10.1007/BF01227652>
 16. Singh J., Vincent A. E. (2015). Effect of perturbations in the Coriolis and centrifugal forces on the stability of equilibrium points in the restricted four-body problem. *Few-Body Syst.* 56(10), 713-723. <https://doi.org/10.1007/s00601-015-1019-3>.
 17. Suraj M. S., Aggarwal R., Arora M. (2017). On the restricted four-body problem with the effect of small perturbations in the Coriolis and centrifugal forces. *Astrophys. and Space Sci.* 362(9), 1—11. <https://doi.org/10.1007/s10509-017-3123-y>.
 18. Suraj M. S., Aggarwal R., Asique M. C., Mittal A. (2021). On the basins of convergence in the magnetic-binary problem with angular velocity. *Comput. and Math. Meth.* 3(4), e1161. <https://doi.org/10.1002/cmm4.1161>.
 19. Suraj M. S., Sachan P., Mittal A., Aggarwal R. (2019). The effect of small perturbations in the Coriolis and centrifugal forces in the axisymmetric restricted five-body problem. *Astrophys. and Space Sci.* 364(3), 1—13. <https://doi.org/10.1007/s10509-019-3528-x>.
 20. Szebehely V. (1967). Stability of the points of equilibrium in the restricted problem. *Astron. J.* 72, 7. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-395732-0.50007-6>.
 21. Wintner A. (1941). *The analytical foundations of celestial mechanics*. Princeton. <https://doi.org/10.1038/149534a0>.
 22. Wolfram Research, Inc. (2019), *Mathematica*, Version 12.0, Champaign, IL.
 23. Zotos E. E. (2017). Determining the Newton-Raphson basins of attraction in the electromagnetic Copenhagen problem. *Int. J. Non-Linear Mech.* 90, 111—123. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2017.01.009>.
 24. Zotos E. E., Abouelmagd E. I., Abd El Motelp N. S. (2020). Introducing a new version of the restricted three-body problem with a continuation fraction potential. *New Astron.* 81, 101444. <https://doi.org/10.1016/j.newast.2020.101444>.
 25. Zotos E. E., Chen W., Abouelmagd E. I., Han H. (2020). Basins of convergence of equilibrium points in the restricted three-body problem with modified gravitational potential. *Chaos, Solitons and Fractals.* 134, 109704. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.109704>.

Vinay Kumar¹, Sawan Kumar Marig²

¹Department of Mathematics, Zakir Husain Delhi College, University of Delhi, Delhi -110001, India

²Department of Mathematics, Ramjas College, University of Delhi, Delhi-110007, India

PERTURBATIONS IN CORIOLIS AND CENTRIFUGAL FORCES AND N-R BASINS OF CONVERGENCE OF PHOTOGRAVITATIONAL MAGNETIC-BINARY PROBLEM WITH VARIABLE MASS

In this paper, we have investigated the effect of small perturbations in the Coriolis () and centrifugal () forces in the photogravitational magnetic binary problem including the ef-

fect of third body as variable mass. The objective of this work is to analyse the effect of μ and other parameters (magnetic moments m_1 and m_2 and radiation pressure q) on the existence and evolution of equilibrium points, basins of convergence (BoC), degree of unpredictability in BoC. In addition, to examine the effect of μ and μ_0 (in the presence of other parameters) on the stability of equilibrium points are also one of the aspect of this work. For different values of parameters, a total number of cases of non-collinear equilibrium points are 3, 5 and 7. The effect of various parameters on the evolution of equilibrium points are explained with the help of graphs. All non-collinear equilibrium points are found to be unstable for permissible range of parameters present in this model. The change in geometry of BoC's is also shown and explained using graphs. The effect of μ , q and μ_0 on the degree of unpredictability in BoC's is examined using the method of basin entropy. It is found that for the complete range of μ and q , the BoC's are in fractal region. Also, for the values of $\mu = 1.37, 1.38$ and 1.40 to 1.44 , the boundaries of BoC's are in non-fractal region.

Keywords: centrifugal force, Coriolis force, magnetic binary problem, basin of convergence, basin entropy.

Стаття надійшла до редакції 12.03.2023

Після доопрацювання 23.07.2023

Прийнята до друку 10.08.2023