

doi: <https://doi.org/10.15407/kfnt2023.06.003>

УДК 551.511.31; 534.015.1

**О. К. Черемних<sup>1</sup>, А. К. Федоренко<sup>1</sup>,  
С. О. Черемних<sup>1</sup>, О. О. Кронберг<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Інститут космічних досліджень Національної академії наук України  
та Державного космічного агентства України  
03187, Київ-187, просп. Академіка Глушкова, 40, к. 4/1

<sup>2</sup>Департамент наук про Землю та навколишнє середовище Мюнхенського університету,  
Мюнхен, Німеччина

E-mails: oleg.cheremnykh@gmail.com, fedorenkoak@gmail.com,  
ikdchereremnykh@gmail.com, kronberg@mps.mpg.de

## **Розщеплення спектру хвильових збурень в ізотермічній атмосфері внаслідок її обертання**

*Досліджено вплив ефекту обертання на спектр низькочастотних хвильових збурень у ізотермічній атмосфері. У «традиційному» наближенні та у наближенні  $\omega$ -площини отримано систему рівнянь для малих лінійних збурень з врахуванням частоти обертання атмосфери. Знайдені рівняння відрізняються від раніше отриманих тим, що ліві частини рівнянь залежать тільки від часу, а праві частини виражаються через збурений тиск. Показано, що при нульовому збуреному тиску врахування у рівняннях обертання атмосфери призводить до «розщеплення» отриманої системи на окремі рівняння, що описують вертикальні і горизонтальні збурення. Для обох видів збурень отримано компактні аналітичні розв'язки. Встановлено, що вертикальні збурення реалізуються у вигляді хвиль Брента — Вяйсяля, а горизонтальні — у вигляді хвиль Россбі та інерційних коливань.*

**Ключові слова:** атмосфера, що обертається, наближення  $\omega$ -площини, дисперсійне рівняння, акустико-гравітаційні хвилі, хвилі Россбі, інерційні коливання.

### **ВСТУП**

Акустико-гравітаційні хвилі (АГХ) в атмосферах Землі, Сонця та інших планет інтенсивно досліджуються впродовж багатьох років [6,

13—15, 26, 29, 30]. Відомо, що ці хвилі дають значний внесок у динаміку та енергетику атмосфери Землі та відіграють значну роль у формуванні атмосферної конвекції і турбулентності. Вивчення АГХ також пов'язане з необхідністю прогнозування стану атмосфери у різних метеорологічних та геофізичних умовах. Незважаючи на те що основні характеристики лінійних АГХ досить докладно вивчено [14, 28, 29], а також досягнуто значного прогресу в розвитку лінійної [9, 15, 29, 31] і нелінійної теорії цих хвиль [16, 27], інтерес до їхнього вивчення залишається значним [2, 10, 11, 12, 18].

За допомогою математичних перетворень, запропонованих в роботах [15, 29], лінеаризована система газодинамічних рівнянь для стратифікованої ізотермічної атмосфери приводиться до системи рівнянь з постійними коефіцієнтами. З цієї системи можна отримати дисперсійні рівняння, що описують акустичні та внутрішні гравітаційні хвилі [15], які поширюються під кутом до горизонтальної площини, а також горизонтально поширювані еванесцентні хвилі [9]. Відмітимо, що неперервні спектри власних частот цих хвиль на діагностичній діаграмі «частота — поздовжній хвильовий вектор» не перекриваються [17].

Ключовим фактором, який зумовлює наявність ще одного типу хвиль в атмосфері, є її обертання з частотою  $\Omega$ . Хвилі, що виникають внаслідок ефекту обертання атмосфери, досліджувались багаторазово. Зокрема, в роботах [4, 16] було показано, що нижче частоти  $2\Omega$  можуть породжуватися еванесцентні хвилі. В роботах [1, 16] встановлено, що тільки вертикальний компонент вектора частоти обертання істотно впливає на дисперсію АГХ. В роботі [23] аналізувалася можливість генерування ультранизкочастотних хвиль Россбі в обертовій атмосфері. Ці хвилі, відомі також як планетарні хвилі, або  $r$ -моди, є поширеним типом великомасштабних рухів атмосфери та океанів Землі [25]. Вони беруть участь у формуванні циклонів та антициклонів, відіграють значну роль у перенесенні тепла від екваторіальних до полярних областей і, таким чином, здійснюють значний вплив на формування погоди [32]. Також хвилі Россбі відіграють важливу роль у великомасштабній динаміці різних астрофізичних об'єктів, таких як Сонце (надра і атмосфера), зорі, атмосфери планет Сонячної системи та екзопланет [33].

В роботі [23] для аналізу атмосферних хвиль Россбі було використано просторове масштабування збурень, що призвело до громіздких виразів, складних для інтерпретації. Зокрема, з результатів цієї роботи незрозуміло, чи можуть ультранизкочастотні хвилі Россбі генеруватися в атмосфері одночасно з акустико-гравітаційними хвилями. Одним із завдань даної роботи є відповідь на це питання. Нижче ми обмежимося, як і в роботі [23], розглядом ізотермічної атмосфери. Виявляється, що рівняння малих коливань для лінійних збурень можна привести до такого вигляду, з якого відповідь на вказане вище питання випливає одразу. Для отримання результатів ми будемо використовувати

вати наближення  $\theta$ -площини. Отримані нами аналітичні розв'язки для вертикальних і горизонтальних коливань мають простий і зручний для інтерпретації вигляд.

## ВИХІДНІ РІВНЯННЯ І МОДЕЛЬ

Для розгляду малих збурень у атмосфері Землі з урахуванням її обертання використаємо таку просту модель. Атмосферу представимо як шар газу, що обертається з кутовою швидкістю  $\omega$  разом із Землею. Рух будь-якого елементарного об'єму атмосфери всередині цього шару описується рівняннями динаміки ідеального газу, який перебуває в полі сили тяжіння [5, 19]:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\text{grad}P - \vec{g}, \quad (1)$$

$$\frac{dP}{dt} = -\rho(\vec{v} \cdot \vec{g}) - c_s^2 \frac{d\rho}{dt}, \quad (2)$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{g} - 2[\vec{\omega} \times \vec{v}]. \quad (3)$$

Тут  $\vec{v}$  — гідродинамічна швидкість елементарного об'єму атмосфери по відношенню до атмосфери, що обертається,  $P$  і  $\rho$  — тиск і щільність атмосферного середовища,  $\vec{g}$  — прискорення вільного падіння,  $c_s^2 = (P/\rho)_{s, \text{const}}$  — швидкість звуку при постійній ентropії. Рівняння (1) — (3) записані в системі координат, яка обертається разом з атмосферою Землі [3].

Будемо розглядати збурення, короткі порівняно з радіусом Землі, для яких атмосферу можна наближено вважати плоскою. Тому рівняння (1) — (3) можна розглядати на площадці малих розмірів, що дотикається до сферичної атмосфери Землі у певній точці  $A$  (рис. 1). Це наближення називається наближенням  $\theta$ -площини [7, 22]. Введемо на цій площині локальну декартову систему координат  $(x, y, z)$  таким чином, щоб вісь  $z$  була спрямована назовні перпендикулярно до поверхні площини, так що  $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ . Осі  $x$  та  $y$  спрямуємо паралельно до поверхні області, причому вісь  $x$  направимо вздовж паралелі, а вісь  $y$  — вздовж меридіана. Точка  $A$  з координатами  $x = y = 0$  є точкою дотику сферичної атмосфери до площини.

Ми також будемо використовувати так зване традиційне наближення, яке часто застосовують у геофізиці [7]. У межах цього наближення враховується лише вертикальний компонент кутової швидкості обертання атмосфери Землі, тобто вектор  $\vec{\omega}$  замінюється на його вертикальну проєкцію ( $\vec{\omega} = \omega_z \vec{e}_z$ ,  $\omega_z = \omega \sin \theta$ , де  $\theta$  — широта, вимірювана в напрямку від екватора). У роботах [1, 4] було показано, що горизон-

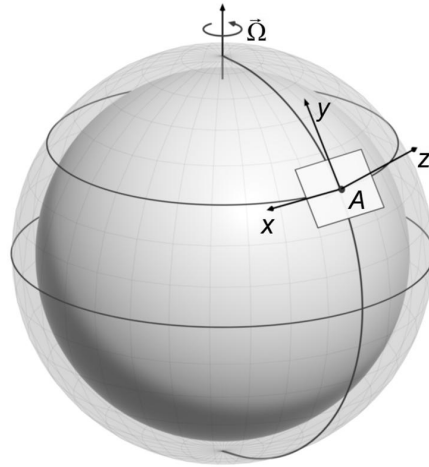


Рис. 1. До визначення  $\Omega$ -площини

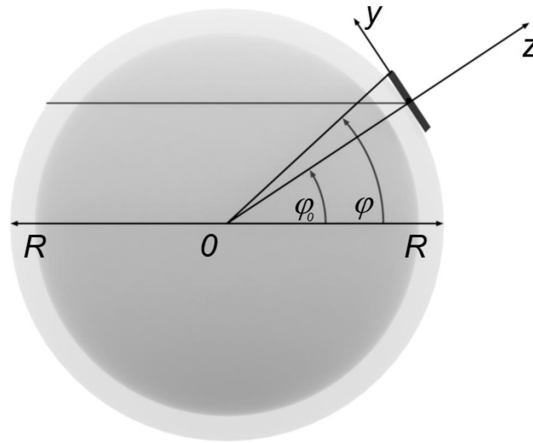


Рис. 2. Зв'язок координати  $z$  з широтою

тальний компонент кутової швидкості обертання атмосфери Землі не призводить до істотної модифікації дисперсійного рівняння для акустико-гравітаційних збурень в обертій атмосфері. Цей результат є основою для використання при нашому розгляді «традиційного» наближення.

У межах наближення  $\Omega$ -площини врахуємо лінійну залежність  $\Omega_z$  від координати  $z$ . Нехай точка  $A$  лежить на відстані  $R$  від центра Землі, а її географічна широта дорівнює  $\varphi_0$  (рис. 1). Розкладаючи  $\Omega_z$  в ряд Тейлора і обмежуючись, через малі розміри  $\Omega$ -площини, двома першими доданками, отримуємо

$$\Omega_z = \Omega_z(\varphi_0) + \left. \frac{d\Omega_z}{d\varphi} \right|_{\varphi_0} (\varphi - \varphi_0), \quad \varphi_0 \approx 0.$$

Враховуючи, що локальна координата  $y$  зв'язана з широтою співвідношенням  $y = R \sin \theta$  (див. рис. 2), знаходимо:

$$z = R \cos \theta = R \frac{y}{R}. \quad (4)$$

Після лінеаризації рівнянь (1) — (3) відносно рівноважного стану, диференціювання отриманих рівнянь по часу та виключення збурених щільності і тиску, отримуємо таке рівняння малих коливань для збуреної швидкості:

$$\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial t^2} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} = (c_s^2 \operatorname{div} \tilde{v}) e_z - g \operatorname{div} \tilde{v}_{\parallel} - g \tilde{v}_z, \quad (5)$$

де

$$\operatorname{div} \tilde{v}_{\parallel} = e_x \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial x} + e_y \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial y}, \quad \operatorname{div} \tilde{v} = \operatorname{div} \tilde{v}_{\parallel} + \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial z},$$

$$\operatorname{div} \tilde{v}_{\parallel} = \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial y},$$

$$\operatorname{div} \tilde{v} = \operatorname{div} \tilde{v}_{\parallel} + \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial z}.$$

Тут і надалі збурені величини будемо позначати тильдою.

### РЕДУКЦІЯ РІВНЯННЯ МАЛИХ КОЛИВАНЬ

Для спрощення рівняння (5), як і в роботі [9], ми обмежимося розглядом збурень в ізотермічній атмосфері, яка в незбуреному стані перебуває у стані спокою ( $\tilde{v} = 0$ ). У такій атмосфері рівноважні щільність і тиск у рівняннях (1) — (3) є функціями  $z$  і задовольняють умови гідростатичної рівноваги:

$$\frac{dp}{dz} = -g, \quad \frac{p(z)}{p(0)} = e^{-z/H}, \quad H = \frac{RT}{g}, \quad (6)$$

де  $T = \text{const}$  — температура атмосферного газу,  $R$  — універсальна газова стала,  $m$  — молекулярна маса газу.

Проекції рівняння (5) на осі введеної вище системи координат з врахуванням (5) мають вигляд

$$\frac{\partial^2 \tilde{v}_x}{\partial t^2} + \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial t} = -\frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} [ (c_s^2 \operatorname{div} \tilde{v}) - g \tilde{v}_z ], \quad (7)$$

$$-\frac{\partial^2 \tilde{v}_y}{t^2} - 2 \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial y} [(c_s^2 \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}} - g \tilde{v}_z)], \quad (8)$$

$$-\frac{\partial^2 \tilde{v}_z}{t^2} - N^2 \tilde{v}_z - \frac{\partial}{\partial z} [(c_s^2 \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}} - g \tilde{v}_z)] - \frac{g}{c_s^2} (c_s^2 \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}} - g \tilde{v}_z), \quad (9)$$

де  $N$  — частота Брента — Вайсяля,  $N^2 = \frac{g^2}{c_s^2} (\dots)$  (1). Відмітимо, що

$(c_s^2 \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}} - g \tilde{v}_z) = \tilde{P} / t$ , тому праві частини рівнянь (7) — (8) виражаються через збурений тиск, а ліві частини залежать тільки від часу.

Якщо в рівняннях (7) — (9) знехтувати частотою обертання атмосфери Землі та залежністю збурених величин від координати  $y$ , отримаємо відомі рівняння:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{v}_x}{t^2} - \frac{\partial}{\partial x} (c_s^2 \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}}) &= g \frac{\tilde{v}_z}{x}, \\ \frac{\partial^2 \tilde{v}_z}{t^2} - \frac{\partial}{\partial z} (c_s^2 \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}}) &= g \frac{\tilde{v}_x}{x}, \end{aligned}$$

де

$$\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{v}_x \mathbf{e}_x + \tilde{v}_z \mathbf{e}_z.$$

Ці рівняння зазвичай використовуються при розгляді акустико-гравітаційних хвиль без врахування обертання [8, 29].

Спростимо рівняння (7) — (9), вважаючи, що

$$\operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}} = \frac{g \tilde{v}_z}{c_s^2}. \quad (10)$$

В результаті отримаємо залежності для складових швидкостей від часу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{v}_x}{t} - 2 \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial \tilde{v}_y}{t} - 2 \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial z}, \\ \frac{\partial^2 \tilde{v}_z}{t^2} - N^2 \tilde{v}_z = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Перепишемо (10) у вигляді

$$\frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial z} - \frac{g \tilde{v}_z}{c_s^2} = -\operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}}_{\parallel}, \quad \tilde{\mathbf{v}}_{\parallel} = \tilde{v}_x \mathbf{e}_x + \tilde{v}_y \mathbf{e}_y. \quad (12)$$

Видно, що ліва та права частини рівняння (12) мають різні часові залежності. Тому вертикальні компоненти швидкості «відщеплюються»

від горизонтальних компонентів. В результаті ми отримуємо окремі рівняння для вертикальної і двох горизонтальних складових швидкості:

$$\frac{\partial^2 \tilde{v}_z}{\partial t^2} - N^2 \tilde{v}_z = 0, \quad \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial z} = \frac{g \tilde{v}_z}{c_s^2}, \quad (13)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial t} - 2 \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial t} - 2 \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial z}, \quad \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial y} = 0. \quad (14)$$

Зазначимо, що «розщеплення» вихідної системи рівнянь (7) — (9) на системи (13) і (14) відбувається тільки при врахуванні кутової швидкості обертання атмосфери, тобто при  $\omega \neq 0$ . При цьому  $\omega$  залежить від координати  $y$ .

Системи (13) і (14) дають два незалежні розв'язки, які будуть отримані у наступному розділі.

### ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

З виразу (13) знаходимо аналітичний розв'язок у вигляді хвилі Брента — Вайсяля:

$$\tilde{v}_z = \tilde{v}_{z0} \exp i(Nt - k_x x - k_y y) \frac{gz}{c_s^2}, \quad (15)$$

яка раніше досліджувалася у роботі [9]. Ця хвильова мода описує адиабатичні повільні вертикальні зміщення елементарних об'ємів газу під дією виштовхувальної сили (тиск встигає вирівнятися, оскільки  $\tilde{P} / t = (c_s^2 \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}} - g \tilde{v}_z) = 0$ , докладніше див. у роботі [24]). В роботі [31] моду (15) було названо коливаннями плавучості. Беручи до уваги, що  $k_x, k_y = 0$  у виразі (15), та щоб надалі уникнути термінологічної плутанини, називатимемо цей режим поширення збурень хвильовою модою Брента — Вайсяля, на відміну від коливань плавучості, для яких  $k_x, k_y = 0$ .

Рівняння (14) описують періодичні збурення в горизонтальній площині. Останнє рівняння в системі (14) автоматично виконуватиметься, якщо ввести в розгляд функцію  $\tilde{v}_x(x, y)$ , таку що

$$\tilde{v}_x = \frac{\tilde{v}_y}{y}, \quad \tilde{v}_y = \frac{\tilde{v}_x}{x}. \quad (16)$$

З (4) і (14) випливає

$$\frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial t} - \frac{\tilde{v}_x}{x} - \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial y} - 2 \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial z} - \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial y} = 0. \quad (17)$$

де

$$\frac{2}{R} \cos \theta_0. \quad (18)$$

У рівнянні (18) ми врахували, що на  $\theta_0$ -площині частота обертання не є постійною величиною, а лінійно залежить від координати  $y$  (див. (4)). Отже, завихреність  $\omega_z = (\text{rot} \tilde{v})_z$  горизонтальної течії збуреного газу дорівнює

$$\omega_z = \frac{\tilde{v}_y}{x} - \frac{\tilde{v}_x}{y} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \tilde{v}_x. \quad (19)$$

Диференціюючи (19) по часу, з урахуванням рівнянь (11) знаходимо

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\tilde{v}_y}{x} - \frac{\tilde{v}_x}{y} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \tilde{v}_y. \quad (20)$$

Використовуючи рівняння (16), з (20) отримуємо

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\tilde{v}_y}{x^2} - \frac{\tilde{v}_x}{y^2} \right) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{v}_y. \quad (21)$$

Підстановка у вираз (21) величини  $\tilde{v}_y$  у вигляді періодичного збурення

$$\tilde{v}_y = \tilde{v}_0 \exp(i(t - k_x x - k_y y)) \quad (22)$$

дає

$$\frac{k_x}{k_x^2 - k_y^2}. \quad (23)$$

Отримане дисперсійне рівняння зазвичай пов'язують із планетарними хвилями в океані [3], які також називають хвилями Россбі [25]. Воно описує основні особливості цих хвиль: великий період (маленьке значення величини  $\omega$ ) і виділений напрямок поширення ( $\omega$  і  $k_x$  мають різні знаки, докладніше див. [20]).

Поблизу екватора ( $\theta_0 = 0$ ), де  $\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{R^2}$ , величина  $\omega$  змінюється мало, тому можуть збуджуватися хвилі Россбі з постійною частотою.

Поблизу полюсів ( $\theta_0 = \pi/2$ ) величину  $\omega_z$  можна вважати постійною. У цьому випадку з (14) та (21) отримуємо

$$\frac{\tilde{v}_x}{x} - \frac{\tilde{v}_y}{y} = 0, \quad \frac{\tilde{v}_y}{x} - \frac{\tilde{v}_x}{y} = 0. \quad (24)$$

З (16), (22) і (24) випливає, що компоненти  $\tilde{v}_x, \tilde{v}_y$  не залежать від координат  $x$  і  $y$ , тому реалізуються коливання в часі. Рівняння (14) для коливань  $\tilde{v}_x, \tilde{v}_y = \exp(i t)$  дають



$$i \tilde{v}_{\parallel} = 2 [v_{\parallel} e_z]. \quad (25)$$

Далі знайдемо дисперсійне рівняння, виключивши  $v_{\parallel}$  з (25). Помноживши для цього (25) векторно на  $e_z$ , отримаємо

$$i2 \tilde{v}_{\parallel} = [\tilde{v}_{\parallel} e_z]. \quad (26)$$

Порівняння виразів (25) і (26) дає

$$2, \quad i\tilde{v}_{\parallel} = [\tilde{v}_{\parallel} e_z]. \quad (27)$$

Підставляючи у вираз (27) поздовжню швидкість  $\tilde{v}_{\parallel} = \tilde{v}_x e_x + \tilde{v}_y e_y$ , отримуємо  $\tilde{v}_y = i\tilde{v}_x$ . Потім, відокремивши дійсну та уявну частини у виразах для швидкостей, знаходимо

$$\tilde{v}_x = v_0 \cos(2t - \phi), \quad \tilde{v}_y = v_0 \sin(2t - \phi), \quad (28)$$

де величини  $v_0$  і  $\phi$  — амплітуда і фаза. Розв'язок (28) описує періодичний інерційний рух елемента середовища у площині  $(x, y)$  по круговій орбіті (інерційному колу) з частотою  $2$ . Вимірювання з супутників [21] свідчать про переважання в океанічному середовищі таких інерційних коливань, які реалізуються у вигляді твердотільного обертання шарів води.

## ВИСНОВКИ

Досліджено вплив обертання атмосфери на спектр низькочастотних хвильових збурень. Отримано такі основні результати.

Для стратифікованої ізотермічної атмосфери, що обертається, у «традиційному» наближенні та в наближенні  $\omega$ -площини отримано замкнуту систему гідродинамічних рівнянь для складових збурень швидкості. Знайдені нами рівняння відрізняються від раніше отриманих тим, що ліві частини рівнянь залежать тільки від часу, а праві частини виражаються через збурений тиск.

Показано, що умова прирівнювання до нуля збуреного тиску призводить до «розщеплення» рівнянь за часом і компонентами швидкостей. Два компоненти швидкості лежать у  $\omega$ -площині, а один є перпендикулярним до цієї площини. Зазначено, що «розщеплення» відбувається лише при врахуванні в рівняннях малих коливань кутової швидкості обертання атмосфери. Компоненти швидкостей, що лежать у  $\omega$ -площині, описують хвилі Россбі та інерційні коливання, а вертикальний компонент швидкості описує хвильову моду Брента — Вайсяля.

Таким чином, з проведеного розгляду випливає, що акустико-гравітаційні хвилі та хвилі з частотами менше або порядку частоти обертання атмосфери при нульовому збуреному тиску розділені у просторі та часі і відповідають за різні хвильові процеси в атмосфері. Однак не можна виключати існування акустико-гравітаційних хвильових мод, «зачеплених» з хвилями Россбі та інерційними коливаннями через ненульові збурені щільності та тиски.

Роботу виконано за підтримки Національного фонду досліджень України, проєкт 2020.02/0015 «Теоретичні та експериментальні дослідження глобальних збурень природного і техногенного походження в системі Земля — атмосфера — іоносфера». Черемних С. О. та Кронберг О. О. дякують за підтримку гранту № 97742 Volkswagen Foundation («VW-Stiftung»).

1. Кришталь О. Н., Войцеховська А. Д., Черемних О. К., Черемних С. О. Про одну властивість дисперсійного рівняння для широтних акустико-гравітаційних хвиль. *Космічна наука і технологія*. 2023. № 5.
2. Крючков Е. И., Черемных О. К., Федоренко А. К. Особенности акустико-гравитационных волн в полярной термосфере Земли. *Кинематика и физика небес. тел.* 2017. 33, № 3. С. 41—53.
3. Ладиков-Роев Ю. П., Черемных О. К. *Математические модели сплошных сред*. Киев: Наукова думка, 2010. 552 с.
4. Черемних О. К., Черемних С. О., Власов Д. І. Вплив обертання атмосфери Землі на спектр акустико-гравітаційних хвиль. *Кинематика і фізика небес. тіл.* 2022. 38, № 3. С. 3—19. <https://doi.org/10.15407/kfnt2022.03.003>.
5. Batchelor G. K. *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press, 2000, 615 p.
6. Beer T. *Atmospheric waves*. John Wiley, New York, 1974. 300 p.
7. Brekhovskikh L. M., Goncharov V. V. *Introductions are the mechanics of continuous media*. Moscow: Nauka. 1982. 335 p.
8. Cheremnykh O. K., Fedorenko A. K., Kryuchkov E. I., Selivanov Y. A. Evanescent acoustic-gravity modes in the isothermal atmosphere: systematization, applications to the Earth's and Solar atmospheres. *Ann. Geophys.* 2019. 37, № 3. P. 405—415. <https://doi.org/10.5194/angeo-37-405-2019>.
9. Cheremnykh O., Fedorenko A., Selivanov Y., Cheremnykh S. Continuous spectrum of evanescent acoustic-gravity waves in an isothermal atmosphere. *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.* 2021. 503, № 4. P. 5545—5553. DOI:10.1093/mnras/stab845.
10. Cheremnykh O., Kaladze T., Selivanov Yu. A., Cheremnykh S. Evanescent acoustic-gravity waves in a rotating stratified atmosphere. *Adv. Space Res.* 2022. 69, № 3. P. 1272—1280. DOI:10.1016/j.asr.2021.10.050.
11. Fedorenko A. K., Bepalova A. V., Cheremnykh O. K., Kryuchkov E. I. A dominant acoustic-gravity mode in the polar thermosphere. *Ann. Geophys.* 2015. 33, № 1. P. 101—108. DOI:10.5194/angeo-33-101-2015.
12. Fedorenko A. K., Kryuchkov E. I., Cheremnykh O. K., Klymenko Yu. O., Yampolski Yu. M. Peculiarities of acoustic-gravity waves in inhomogeneous flows of the polar thermosphere. *J. Atmos. and Solar-Terr. Phys.* 2018. 178. P. 17—23. [doi.org/10.1016/j.jastp.2018.05.009](https://doi.org/10.1016/j.jastp.2018.05.009).
13. Gill A. E. *Atmosphere-ocean dynamics*, Academic Press, New York, 1982. 662 p.

14. Gossard E. E., Hooke W. H. *Waves in the atmosphere: Atmospheric infrasound and gravity waves: Their generation and propagation*. Elsevier Scientific Publishing Company, 1975. 456 p.
15. Hines C. O. Internal atmospheric gravity waves at ionospheric heights. *Can. J. Phys.* 1960. 38. P. 1441—1481.
16. Kaladze T. D., Pokhotelov O. A., Shan H. A., Shan M. I., Stenflo L. Acoustic-gravity waves in the Earth ionosphere. *J. Atmos. and Solar-Terr. Phys.* 2008. 70. 1607—1616.
17. Kertz W. *This Encyclopedia*. 1957. 48. P. 928—981.
18. Kshevetskii S. P., Kurdyayeva Y. A., Gavrilov N. M. Spectra of acoustic gravity waves in the atmosphere with a quasi-isothermal upper layer. *Atmosphere*. 2021. 12. P. 818. <https://doi.org/10.3390/atmos12070818>.
19. Lamb H. *Hydrodynamics*. Dover, New York, 1932. 362 p.
20. Landa P. S. *Nonlinear vibrations and waves*. M., Nauka, 1977. 496 p.
21. Lavrova O. Y., Sabinin K. D. Manifestations of inertial oscillations in satellite images of the sea surface. *Sovrem. probl. distantsionnogo zondirovaniya Zemli iz kosmosa*. 2016. 13. P. 60—73.
22. Longuet-Higgins M. S. Planetary waves on a rotating sphere. P. 1. *Proc. Roy. Soc. A*. 1964. 279. P. 446—473.
23. Pokhotelov O. A., Kaladze T. D., Shukla P. K., Stenflo L. Three-dimensional solitary vortex structures in the upper atmosphere. *Phys. Scr.* 2001. 64. P. 245—252. DOI: 10.1238/Physica.Regular.064a00245.
24. Priest E. *Magnetohydrodynamics of the Sun*. Cambridge University Press. 2014. DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9781139020732>.
25. Rossby C.-G. Planetary flow patterns in the atmosphere. *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.* 1940. 66. P. 68—87.
26. Roy A., Roy S., Misra A. P. Dynamical properties of acoustic-gravity waves in the atmosphere. *J. Atmos. and Solar-Terr. Phys.* 2019. 186. P. 78—81. DOI: 10.1016/j.jastp.2019.02.009.
27. Stenflo L., Shukla P. K. Nonlinear acoustic gravity wave. *J. Plasma Phys.* 2009. 75. 841—847. doi.org/10.1017/S0022377809007892.
28. Sutherland B. R. *Internal gravity waves*. Cambridge University Press, 2010. 377 p.
29. Tolstoy I. The theory of waves in stratified fluids including the effect of gravity and rotation. *Rev. Mod. Phys.* 1963. 35, № 1. P. 207—230. DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.35.207>.
30. Tolstoy I. Long-period gravity waves in the atmosphere. *J. Geophys. Res.* 1967. 72, № 18. P. 4605—4610.
31. Waltercheid R. L., Hecht J. H. A reexamination of evanescent acoustic-gravity waves: Special properties and aeronomical significance. *J. Geophys. Res.* 2003. 108(D11). 4340. doi:10.1029/2002JD002421.
32. Woollings T., Li C., Drouard M., Dunn-Sigouin E., Elmestekawy K. A., Hell M., Hoskins B., Mbengue C., Patterson M., Spengler T. The role of Rossby waves in polar weather and climate. 2023. *Weather and Climate Dyn.* 4, is. 1. P. 61—80. <https://doi.org/10.5194/wcd-2022-43>.
33. Zaqarashvili T. V., Albekioni M., Ballester J. L., Bekki Y., Biancofiore L., Birch A. C., Dikpati M., Gizon L., Gurgenchvili E., Heifetz E., Lanza A. F., McIntosh S. W., Ofman L., Oliver R., Proxauf B., Umurhan O. M., Yellin-Bergovoy R. Rossby waves in astrophysics. *Space Sci. Rev.* 2021. 217, № 15. P. 61—80. <https://doi.org/10.1007/s11214-021-00790-2>.

## REFERENCES

1. Krystal O. N., Voytsekhovska A. D., Cheremnykh O. K., Cheremnykh S. O. (2023). On one property of the dispersion equation for latitudinal acoustic-gravitational waves. *Space Science and Technology*. 5 (in print).
2. Kryuchkov E. I., Cheremnykh O. K., Fedorenko A. K. (2017). Properties of acoustic-gravity waves in the Earth's polar thermosphere. *Kinematics and Phys. Celestial Bodies*. 33(3). 122—129. <https://doi.org/10.3103/s0884591317030047>.
3. Ladykov-Roev Yu. P., Cheremnykh O. K. (2010). *Mathematical models of continuous media*. Kyiv: Naukova Dumka, 552.
4. Cheremnykh O. K., Cheremnykh S. O., Vlasov D. I. (2022). The influence of the Earth's atmosphere rotation on the spectrum of acoustic-gravity waves. *Kinematics and Phys. Celestial Bodies*. 38(3). 121—131. DOI:10.3103/s0884591322030023.
5. Batchelor G. K. (2000). *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press, 615.
6. Beer T. (1974). *Atmospheric waves*. John Wiley, New York, 300.
7. Brekhovskikh L. M., Goncharov V. V. (1982). *Introductions are the mechanics of continuous media*. Moscow: Nauka. 335.
8. Cheremnykh O. K., Fedorenko A. K., Kryuchkov E. I., Selivanov Y. A. (2019). Evanescent acoustic-gravity modes in the isothermal atmosphere: systematization, applications to the Earth's and solar atmospheres. *Ann. Geophys.* 37(3). 405—415. <https://doi.org/10.5194/angeo-37-405-2019>.
9. Cheremnykh O., Fedorenko A., Selivanov Y., Cheremnykh S. (2021). Continuous spectrum of evanescent acoustic-gravity waves in an isothermal atmosphere. *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.* 503(4). 5545—5553. DOI:10.1093/mnras/stab845.
10. Cheremnykh O., Kaladze T., Selivanov Yu. A., Cheremnykh S. (2022). Evanescent acoustic-gravity waves in a rotating stratified atmosphere. *Adv. Space Res.* 69(3). 1272—1280. DOI:10.1016/j.asr.2021.10.050.
11. Fedorenko A. K., Bespalova A. V., Cheremnykh O. K., Kryuchkov E. I. (2015). A dominant acoustic-gravity mode in the polar thermosphere. *Ann. Geophys.* 33(1). 101—108. DOI:10.5194/angeo-33-101-2015.
12. Fedorenko A. K., Kryuchkov E. I., Cheremnykh O. K., Klymenko Yu. O., Yampolski Yu. M. (2018). Peculiarities of acoustic-gravity waves in inhomogeneous flows of the polar thermosphere. *J. Atmos. and Solar-Terr. Phys.* 178. 17—23. [doi.org/10.1016/j.jastp.2018.05.009](https://doi.org/10.1016/j.jastp.2018.05.009).
13. Gill A. E. (1982). *Atmosphere-ocean dynamics*, Academic Press, New York, 662 p.
14. Gossard E. E., Hooke W. H. (1975). *Waves in the atmosphere: Atmospheric infrasound and gravity waves: Their generation and propagation*. Elsevier Scientific Publishing Company, 456 p.
15. Hines C. O. (1960). Internal atmospheric gravity waves at ionospheric heights. *Can. J. Phys.* 38. 1441—1481.
16. Kaladze T. D., Pokhotelov O. A., Shan H. A., Shan M. I., Stenflo L. (2008). Acoustic-gravity waves in the Earth ionosphere. *J. Atmos. and Solar-Terr. Phys.* 70. 1607—1616.
17. Kertz W. (1957). *This encyclopedia*. 48. P. 928—981.
18. Kshevetskii S. P., Kurdyayeva Y. A., Gavrilov N. M. (2021). Spectra of acoustic gravity waves in the atmosphere with a quasi-isothermal upper layer. *Atmosphere*. 12. 818. <https://doi.org/10.3390/atmos12070818>.
19. Lamb H. (1932). *Hydrodynamics*. Dover, New York, 362 p.
20. Landa P. S. (1977). *Nonlinear vibrations and waves*. M., Nauka, 496.

21. Lavrova O. Y., Sabinin K. D. (2016). Manifestations of inertial oscillations in satellite images of the sea surface. *Sovrem. probl. distantionnogo zondirovaniya Zemli iz kosmosa*. 13. 60—73.
22. Longuet-Higgins M. S. (1964). Planetary waves on a rotating sphere. P. 1. *Proc. Roy. Soc. A*. 279. 446—473.
23. Pokhotelov O. A., Kaladze T. D., Shukla P. K., Stenflo L. (2001) Three-dimensional solitary vortex structures in the upper atmosphere. *Phys. Scr.* 64. 245—252.  
DOI: 10.1238/Physica.Regular.064a00245.
24. Priest E. (2014). *Magnetohydrodynamics of the Sun*. Cambridge University Press.  
DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9781139020732>.
25. Rossby C.-G. (1940). Planetary flow patterns in the atmosphere. *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.* 66. 68—87.
26. Roy A., Roy S., Misra A. P. (2019). Dynamical properties of acoustic-gravity waves in the atmosphere. *J. Atmos. and Solar-Terr. Phys.* 186. 78—81.  
DOI: 10.1016/j.jastp.2019.02.009.
27. Stenflo L., Shukla P. K. (2009). Nonlinear acoustic gravity wave. *J. Plasma Phys.* 75. 841—847. [doi.org/10.1017/S0022377809007892](https://doi.org/10.1017/S0022377809007892).
28. Sutherland B. R. (2010). *Internal gravity waves*. Cambridge University Press, 377.
29. Tolstoy I. (1963). The theory of waves in stratified fluids including the effect of gravity and rotation. *Rev. Mod. Phys.* 35(1). 207—230.  
DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.35.207>.
30. Tolstoy I. (1967). Long-period gravity waves in the atmosphere. *J. Geophys. Res.* 72(18). 4605—4610.
31. Waltercheid R. L., Hecht J. H. (2003). A reexamination of evanescent acoustic-gravity waves: Special properties and aeronomical significance. *J. Geophys. Res.* 108(D11). 4340. [doi:10.1029/2002JD002421](https://doi.org/10.1029/2002JD002421).
32. Woollings T., Li C., Drouard M., Dunn-Sigouin E., Elmetekawy K. A., Hell M., Hoskins B., Mbengue C., Patterson M., Spengler T. (2023). The role of Rossby waves in polar weather and climate. *Weather and Climate Dyn.* 4(1). 61—80.  
<https://doi.org/10.5194/wcd-2022-43>.
33. Zaqarashvili T. V., Albekioni M., Ballester J. L., Bekki Y., Biancofiore L., Birch A. C., Dikpati M., Gizon L., Gurgenchvili E., Heifetz E., Lanza A. F., McIntosh S. W., Ofman L., Oliver R., Proxauf B., Umurhan O. M., Yellin-Bergovoy R. (2021). Rossby waves in astrophysics. *Space Sci. Rev.* 217(15). 61—80.  
<https://doi.org/10.1007/s11214-021-00790-2>.

O. K. Cheremnykh<sup>1</sup>, A. K. Fedorenko<sup>1</sup>, O. S. Cheremnykh<sup>1</sup>, O. O. Kronberg<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Space Research Institute of the National Academy of Sciences of Ukraine and the State Space Agency of Ukraine

<sup>2</sup>Department of Earth and Environmental Sciences University of Munich, Munich, Germany

#### SPLITTING OF THE WAVE DISTURBANCE SPECTRUM IN THE ISOTHERMAL ATMOSPHERE DUE TO ITS ROTATION

The influence of the Earth's rotation on the spectrum of low-frequency wave disturbances in an isothermal atmosphere is investigated. The system of equations for small linear disturbances is obtained in the "traditional" approximation and in the  $\omega$ -plane approximation, taking into account the frequency of rotation of the atmosphere. The found equations differ from the previously obtained ones in that the left parts of the equations depend only on

time, whereas the right parts are expressed in terms of disturbed pressure. It is shown that at zero perturbed pressure, taking into account the atmospheric rotation in the equations, leads to the “splitting” of the obtained system into separate equations describing vertical and horizontal perturbations. Compact analytical solutions were obtained for both types of disturbances. It was established that vertical disturbances are realized in the form of Brunt — Väisälä waves, and horizontal — in the form of Rossby waves and inertial oscillations.

**Keywords:** rotating atmosphere,  $f$ -plane approximation, dispersion equation, acoustic-gravity waves, Rossby waves, inertial oscillations

Стаття надійшла до редакції 06.06.2023

Після доопрацювання 06.06.2023

Прийнята до друку 10.08.2023