

doi: <https://doi.org/10.15407/kfnt2022.03.076>

УДК 521.135

APS/123-QED

С. Юсуф, Р. Кішор

Факультет математики Центрального університету Раджастану,
Аджмер, Індія-305817
E-mail: sf07bhu@gmail.com

**Вплив диска та сил опору на існування та лінійну
стійкість точок рівноваги та басейнів притягання
Ньютона — Рафсона у задачі трьох тіл**

У роботі представлено дослідження кривих нульової швидкості, аналіз лінійної стійкості та басейнів притягання, що відповідають точкам рівноваги в системі Сонце — Юпітер із поясом астероїдів та системі Ріс з пиловим поясом відповідно під впливом збурювальних факторів у вигляді опору Пойнтінга — Робертсона (PR-опір), опору сонячного вітру та диска, який обертається навколо спільного центра мас системи. Отримано криві нульової швидкості і виявлено, що при наявності збурювальних факторів деформуються заборонені області руху частинок нескінченно малої маси. Проаналізовано лінійну стабільність і вплив збурювальних факторів для трикутних точок рівноваги. Помічено, що через PR-опір трикутні точки рівноваги стають нестабільними у межах діапазону стабільності. Обчислено басейни Ньютона — Рафсона, які відповідають точкам рівноваги, і встановлено, що при наявності диска змінюється геометрія басейнів притягання, тоді як вплив інших збурювальних факторів на структуру басейнів притягання дуже малий.

Ключові слова: криві нульової швидкості, лінійна стабільність, НР-басейни притягання, опір Пойнтінга — Робертсона, опір сонячного вітру, диск.

PACS 02.30.Hq, 02.60.Cb, 05.45.a, 95.10.Ce, 95.10.Eg

ВСТУП

В останні роки важливість обмеженої проблеми трьох тіл (ОПТТ) для дослідження космосу зросла через її широке застосування в космічних місіях. ОПТТ застосовується до багатьох планетних систем для дослідження динаміки тестових частинок, таких як комети в системі Сонце — Земля, астероїди в системі Сонце — Юпітер, супутник навколо системи Сонце — Земля тощо. У класичному випадку ОПТТ є три колінеарні точки рівноваги, нестабільні в діапазоні $0 < \mu < 0.5$, і дві неколінеарні точки рівноваги, стійкі в діапазоні $0 < \mu < 0.03852\dots$ [20].

Ряд дослідників пояснюють динаміку нескінченно малої маси в околиці точок рівноваги впливом радіаційного тиску у Сонячній системі чи зоряних подвійних системах [1, 6]. Багато науковців [19, 22] досліджували ОПТТ під впливом кількох сил опору. Пойнтінг [23] і Робертсон [25] модифікували вираз для загальної сили тиску випромінювання на рухому сферичної частинки в релятивістській формі, враховуючи члени, що не залежать від швидкості, і члени, що залежать від швидкості. Отриманий ефект відомий як опір Пойнтінга — Робертсона (PR-опір). Вираз для повної сили випромінювання на частинку пилу записується [2, 14] як

$$\mathbf{F} = F_p \left(1 - (1 - sw)\frac{\mathbf{v}\mathbf{r}}{cr}\right) \frac{\mathbf{r}}{r} + (1 - sw)\frac{\mathbf{V}}{c},$$

де F_p — сила тиску радіаційного відштовхування, \mathbf{v} — швидкість частинки, \mathbf{r} — радіус-вектор, c — швидкість світла, sw — відношення опору сонячного вітру до PR-опору. У роботі [7] вивчався вплив радіаційного тиску та PR-опору на існування точок рівноваги та їхню лінійну стабільність в узагальненій фотогравітаційній ОПТТ. Було виявлено, що нестабільність неколінеарних точок рівноваги зумовлена PR-опором. Крім цього, проведено ряд досліджень з аналізу впливу сил опору на точки рівноваги в ОПТТ [11, 26].

Останні спостереження космічного телескопа «Спітцер» виявили наявність пилового пояса у багатьох подвійних системах [5, 32]. Через наявність пилового пояса навколо подвійної зоряної системи або системи подвійної чорної діри динамічна поведінка пилових частинок може змінитися. Круговий диск навколо системи пост-AGB відіграє значну роль у вивчені еволюції бінарної системи [33]. Це спонукає багатьох астрономів, дослідників і вчених модифікувати ОПТТ шляхом введення у розгляд гравітаційного потенціалу пилового поясу [8, 9]. Кушвах [13] і Кішор [10] досліджували лінійну стійкість точок рівноваги в задачі Чермних з урахуванням гравітаційного потенціалу пилового поясу як додаток до радіаційного тиску та сплющеності. Багато дослідників [10, 27, 28, 34] досліджували стійкість точок рівноваги до впливу різних збурень, таких як радіаційний тиск, альбедо, PR-опір, сплющеність тощо.

Вивчення точок рівноваги відіграє життєво важливу роль у проектуванні траекторій для космічних місій [15]. У роботі [22] на основі розгляду радіаційного тиску і сили опору для аналізу стабільності точок рівноваги в системі Сонце — (Земля + Місяць) було виявлено, що трикутні точки рівноваги стають нестабільними через PR-опір. Басейни притягання забезпечують спосіб опису динамічної поведінки атракторів [21]. У ОПТТ найпростішим прикладом атрактора є точки рівноваги. Набір вихідних точок у просторі станів, що веде до певної точки рівноваги (як атрактора), утворює область, відому як басейн притягання або зближення, яку можна отримати ітераційними чисельними методами. Дускос [3] визначив басейни притягання за допомогою методу Ньютона — Рафсона в задачі Хілла при наявності сплюснутості та радіаційного тиску. У кількох роботах [30, 31, 35] використовувався багатовимірний метод Ньютона — Рафсона в рамках системи кількох тіл для опису басейнів притягання, що відповідають точкам рівноваги.

У цій роботі нас цікавить аналіз кривих нульової швидкості та аналіз лінійної стійкості трикутних точок рівноваги при наявності сил опору та диска, а також обчислення басейнів притягання в системі Сонце — Юпітер із поясом астероїдів та системою Ріс з пиловим поясом під впливом радіаційного тиску, PR-опору, опору сонячного вітру.

РІВНЯННЯ РУХУ

Розглянемо, що дві маси m_1 (більша основна) і m_2 (менша основна) обертаються навколо свого центра мас завдяки взаємним силам притягання. Передбачається, що пробна частинка з незначною масою (нескінченно малою масою) рухається під дією гравітаційного поля як основної, так і дископодібної структури, але не впливає на рух основних мас. Нехай більша основна маса є джерелом випромінювання, яке діє силою радіаційного тиску F_p на нескінченно малу масу в напрямку, протилежному силі тяжіння F_g . Далі гравітаційний потенціал пилового диска у моделі Міямото і Нагаї [17] задається як

$$(r, z) = \frac{M_d}{\sqrt{r^2 - (a - \sqrt{z^2 - b^2})^2}},$$

де M_d — загальна маса диска; r — опорний радіус диска; $T = a + b$ — параметр, який визначає профіль щільності диска. Параметр a визначає сплюснутість профілю, а b називають параметром ядра, який контролює розмір ядра профілю щільності диска. Припустимо, що $(x, y, 0)$ — координата нескінченно малої маси в синодичній системі відліку $Oxyz$. Нехай масовий параметр $m_2 / (m_1 - m_2)$, тоді координати більшої та меншої основних мас дорівнюють $(-, 0)$ і $(1 -, 0)$

відповідно. Тому рівняння руху нескінченно малої маси у площині xy [19, 22] записуються у вигляді

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} = \frac{(1 - sw)F_{PR,x}}{x} - \frac{U}{x}, \quad (1)$$

$$\ddot{y} - 2n\dot{x} = \frac{(1 - sw)F_{PR,y}}{y} - \frac{U}{y}, \quad (2)$$

де U — ефективний потенціал, і

$$\frac{n^2}{2}(x^2 - y^2) = \frac{q(1 - q)}{r_1} - \frac{M_d}{(r^2 - T^2)^{1/2}}, \quad (3)$$

n відповідає збуреному середньому руху, $n = \sqrt{1 - \frac{2M_d r_c}{(r_c^2 - T^2)^{3/2}}}$, r_c —

радіальна відстань нескінченно малої маси у класичній ОПТТ [12, 13, 29, 34]. Компоненти $F_{PR,x}$, $F_{PR,y}$ у рівняннях (1)–(2) дорівнюють [12]

$$F_{PR,x} = \frac{W_1}{r_1^2} \frac{(x -)\dot{x} - y\dot{y}}{r_1^2} [(x -)\dot{x} - y\dot{y}] - (\dot{x} - ny),$$

$$F_{PR,y} = \frac{W_1}{r_1^2} \frac{y}{r_1^2} ((x -)\dot{x} - y\dot{y}) - \dot{y} - n(x -),$$

де $W_1 = (1 - q)(1 - q)/c_d$ — параметр опору, а c_d розглядається як безрозмірна швидкість світла, еквівалентна постійній швидкості світла c [12, 24]; q — безрозмірний параметр, який відповідає коефіцієнту зменшення маси і виражається як [12]

$$0 < q - 1 - \frac{5.6 \cdot 10^{-5}}{a} - 1,$$

де величини a , — радіус обмеженої маси, щільність та коефіцієнт ефективності радіаційного тиску відповідно (у системі СГС); $r_1 = \sqrt{(x -)^2 + y^2}$, $r_2 = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2}$ і $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ — відстані нескінченно малої маси від m_1 , m_2 і центра мас відповідно. Для всіх числових результатів ми встановили $c_d = 299792458$, $= 0.000954$ для системи Сонце — Юпітер і $= 0.00703881$ для системи Ріс [4].

ТРИКУТНІ ТОЧКИ РІВНОВАГИ

Для динамічної системи точка (x, y) , в якій швидкість досліджуваної частинки стає нульовою, називається точкою рівноваги. Ті точки рівноваги, для яких $y = 0$, називаються колінеарними точками рівноваги, а ті, для яких $y \neq 0$, — трикутними точками рівноваги. Тут ми будемо цікавитися умовами існування лише трикутних точок рівноваги. Щоб отримати трикутні точки рівноваги, підставимо умови $\dot{x} = \dot{y} = 0$ та

$\ddot{x} - \dot{y} = 0$ у рівняння руху (1) і (2), в результаті чого отримаємо рівняння

$$\begin{aligned} n^2 x - \frac{q(1-s)(x-1)}{r_1^3} - \frac{(x-1)}{r_2^3} \\ - \frac{M_d x}{(r_c^2 - T^2)^{3/2}} - \frac{(1-sw)W_1 ny}{r_1^2} = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} n^2 y - \frac{q(1-s)y}{r_1^3} - \frac{y}{r_2^3} \\ - \frac{M_d y}{(r_c^2 - T^2)^{3/2}} - \frac{(1-sw)W_1 n(x-1)}{r_1^2} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

При відсутності збурювальних параметрів рівняння (4) і (5) дають значення $r_1 = 1$ та $r_2 = 1$, що узгоджується з класичним результатом [16]. З іншого боку, при наявності збурювальних параметрів значення r_1 і r_2 можуть дещо відрізнятися від 1. Подамо їх у вигляді $r_1 = 1 + \epsilon_1$ і $r_2 = 1 + \epsilon_2$, де ϵ_1, ϵ_2 — дуже малі реальні величини. Використовуючи ці параметри у виразах r_1 і r_2 , визначених у попередньому розділі, розв'яжемо отримані вирази відносно x і y , нехтуючи членами другого та вищого порядку відносно ϵ_1, ϵ_2 :

$$x = \frac{1}{2} - 2(\epsilon_1 - \epsilon_2), \quad (6)$$

$$y = \frac{1}{2} \sqrt{3 - 4(\epsilon_1 - \epsilon_2)}. \quad (7)$$

Використовуючи ці x, y на додаток до прийнятих значень r_1 і r_2 в (4) і (5), розв'яжемо лінеаризовану систему рівнянь відносно ϵ_1, ϵ_2 :

$$\epsilon_1 = \frac{b_2 c_1 - b_1 c_2}{a_2 b_1 - a_1 b_2}, \quad (8)$$

$$\epsilon_2 = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_2 b_1 - a_1 b_2}, \quad (9)$$

де

$$\begin{aligned} a_1 &= 2n^2 - 2 - \frac{q(1-s)}{2} - \frac{2M_d}{(r_c^2 - T^2)^{3/2}} - \frac{2n(1-sw)W_1}{\sqrt{3}}, \\ b_1 &= 2n^2 - \frac{1}{2} - 2q(1-s) - \frac{2M_d}{(r_c^2 - T^2)^{3/2}} - \frac{n(1-sw)W_1}{\sqrt{3}}, \\ c_1 &= n^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{q(1-s)}{2} \right) - \frac{(2-1)M_d}{2(r_c^2 - T^2)^{3/2}} - \frac{\sqrt{3}n(1-sw)W_1}{2}, \\ a_2 &= \frac{n^2}{\sqrt{3}} - \frac{7q(1-s)}{2\sqrt{3}} - \frac{M_d}{\sqrt{3}(r_c^2 - T^2)^{3/2}} - n(1-sw)W_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{n^2}{\sqrt{3}} \quad \frac{7}{2\sqrt{3}} \quad \frac{q(1)}{\sqrt{3}} \quad \frac{M_d}{\sqrt{3}(r_c^2 - T^2)^{3/2}} \quad 2n(1 - sw)W_1, \\ c_2 &= \frac{\sqrt{3}n^2}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{\sqrt{3}q(1)}{2} \quad \frac{\sqrt{3}M_d}{2(r_c^2 - T^2)^{3/2}} \quad \frac{n(1 - sw)W_1}{2}. \end{aligned}$$

З рівнянь (6) і (7) зрозуміло, що при відсутності збурювальних параметрів вони дають класичні координати $L_{4,5}$, тобто $(1/2 - , \sqrt{3}/2)$.

Для точки L_4 проаналізовано вплив PR-опору, опору сонячного вітру та наявності дископодібної структури в системі Сонце — Юпітер із поясом астероїдів (табл. 1) та системі Ріс із пиловим поясом (табл. 2). Аналіз для L_5 подібний до аналізу L_4 . Видно, що положення (x, y) точки L_4 зміщується у бік початку координат зі збільшенням параметра PR-опору W_1 (табл. 1, 2). Крім того, приріст опору сонячного вітру sw зменшує значення x -координати і збільшує координату y , але з дуже малою швидкістю. Врахування наявності диска призводить до зменшення значень координат трикутних точок рівноваги. Отже, радіаційний тиск, PR-опір, опір сонячного вітру та потенціал від пилового поясу в системах (система Сонце — Юпітер з поясом астероїдів і система Ріс з пиловим поясом) відхиляють положення трикутних точок рівноваги.

Таблиця 1. Координати $L_{4,5}$ (x_4 , y_4) у системі Сонце — Юпітер із поясом астероїдів при $r_c = 0.999$, $T = 0.01$ та $= 0.000954$

$W_1, 10^{-10}$	sw	(x_4, y_4)	
		$M_d = 0$	$M_d = 0.02$
0	0	(0.4990460000, ± 0.8660254038)	(0.4990459999, ± 0.8584136822)
1.7	0	(0.4822371968, ± 0.8561009269)	(0.4824578278, ± 0.8485345281)
3.3	0	(0.4651307381, ± 0.8455381532)	(0.4655759069, ± 0.8380238563)
4.9	0	(0.4477043472, ± 0.8342798095)	(0.4483782533, ± 0.8268249508)
4.9	0.15	(0.4477043157, ± 0.8342798263)	(0.4483782220, ± 0.8268249678)
4.9	0.25	(0.4477042948, ± 0.8342798376)	(0.4483782011, ± 0.8268249791)
4.9	0.35	(0.4477042738, ± 0.8342798489)	(0.4483781803, ± 0.8268249904)

Таблиця 2. Координати $L_{4,5}$ (x_4 , y_4) у системі Ріс з пиловим поясом при $r_c = 0.999$, $T = 0.1$ і $= 0.00703881$

$W_1, 10^{-10}$	sw	(x_4, y_4)	
		$M_d = 0$	$M_d = 0.02$
0	0	(0.4929611900, ± 0.8660254038)	(0.4904297520, ± 0.8591872686)
3.3	0	(0.4685030498, ± 0.8315126549)	(0.4655940829, ± 0.8243275173)
6.6	0	(0.4449351211, ± 0.7889470938)	(0.4415964439, ± 0.7813514393)
9.9	0	(0.4179364423, ± 0.7368531304)	(0.4144064405, ± 0.7286649104)
6.2	0.05	(0.4449351210, ± 0.7889470938)	(0.4415964438, ± 0.7813514393)
6.2	0.10	(0.4449351208, ± 0.7889470939)	(0.4415964436, ± 0.7813514394)
6.2	0.15	(0.4449351206, ± 0.7889470940)	(0.4415964435, ± 0.7813514395)

КРИВІ НУЛЬОВОЇ ШВИДКОСТІ

Інтеграл відносної енергії (також відомий як інтеграл Якобі) для задачі [16] має вигляд

$$\dot{x}^2 - \dot{y}^2 = 2U - C, \quad (10)$$

де C — постійна Якобі, U — ефективний потенціал [12], який дорівнює

$$U = \frac{n^2}{2}(x^2 - y^2) - \frac{q(1)}{r_1} - \frac{q(1)}{r_2} - \frac{M_d}{\sqrt{r^2 - T^2}}$$

$$W_1 = \frac{((x - y)\dot{x} - y\dot{y})}{2r_1^2} - n \operatorname{arctg} \frac{y}{x}. \quad (11)$$

Рівняння (10) описує зв'язок між компонентами швидкості та координатами положення частинки нескінченно малої маси в орбітальній площині. Криві при нульовій швидкості відомі як криві нульової швидкості, які отримуються при $\dot{x} = \dot{y} = 0$ у рівнянні (10), описуються виразом

$$n^2(x^2 - y^2) - \frac{2q(1)}{r_1} - \frac{2}{r_2} - \frac{2M_d}{\sqrt{r^2 - T^2}}$$

$$2W_1 - n \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = C, \quad (12)$$

який визначає криві нульової швидкості, пов'язані зі значенням C . Тепер з рівняння (12) зрозуміло, що для великих значень просторових координат x і y воно зводиться до вигляду

$$x^2 - y^2 - \frac{C}{n^2}, \quad (13)$$

де

$$\frac{2q(1)}{r_1} - \frac{2}{r_2} - \frac{2M_d}{\sqrt{r^2 - T^2}} = 2W_1 - n \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \quad (14)$$

є малою величиною. Рівняння (13) описує коло радіуса $\sqrt{(C -)/n^2}$. При великому значенні C одна гілка контура наближається до асимптотичного кола, оскільки C стає дуже малим. З іншого боку, для малих значень просторових координат x і y рівняння (12) записується у вигляді

$$\frac{C}{2} - \frac{q(1)}{r_1} - \frac{q(1)}{r_2} - \frac{M_d}{\sqrt{r^2 - T^2}} = W_1 - n \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad (15)$$

де $n^2(x^2 - y^2)/2$ — мала дійсна величина. Рівняння (15) описує еквіпотенціальні криві. Значення C при $L_{4,5}$ ($0.4823484, \pm 0.8522949$) у

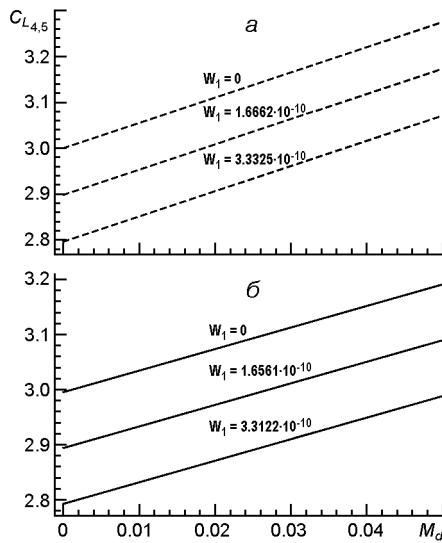


Рис. 1. Зміна значень $C_{L_{4,5}}$: а — в системі Сонце — Юпітер із поясом астероїдів, б — в системі Ріс з пиловим поясом

системі Сонце — Юпітер із поясом астероїдів виражається через параметри збурення як

$$C_{L_{4,5}} = 0.959067 - 5.49619M_d - 2.04223q + 2.11159W_1 - 1.06369, \quad (16)$$

а у випадку системи Ріс з пиловим поясом при $L_{4,5}$ (0.4762637, ± 0.8522948) —

$$C_{L_{4,5}} = 0.953234 - 3.9119M_d - 2.04847q + 2.12244W_1 - 1.07266. \quad (17)$$

При відсутності всіх збурень вирази (16) та (17) збігаються з виразами у класичному випадку [20]. Швидкість зміни значень $C_{L_{4,5}}$ зі збільшенням значення M_d показано на рис. 1. Видно, що зміна значень $C_{L_{4,5}}$ більша для системи Сонце — Юпітер із поясом астероїдів, ніж для системи Ріс з пиловим поясом. Збільшення параметра PR-опору (W_1) зменшує значення $C_{L_{4,5}}$, що впливає на геометрію кривих нульової швидкості і, отже, — на області руху частинок нескінченно малої маси, а наявність опору сонячного вітру спричиняє незначну зміну $C_{L_{4,5}}$. Заборонені області для різних значень $C_{L_{4,5}}$ в системі Сонце — Юпітер з поясом астероїдів і системі Ріс з пиловим поясом показано на рис. 2 і 3. Для малих значень $C_{L_{4,5}}$ область, де рух виключено, залишається навколо $L_{4,5}$. Крім того, обмежена область розширяється зі збільшенням значення $C_{L_{4,5}}$, охоплюючи L_3 і меншу основну масу. З рис. 2 видно, що для $C_{L_{4,5}} = 3.080$ нескінченно мала маса може переміщатися лише всередині забороненої області, а подальше збільшення значення $C_{L_{4,5}}$ зменшує область для руху нескінченно малої маси. Подібну зміну було виявлено у випадку системи Ріс з пиловим поясом (рис. 3).

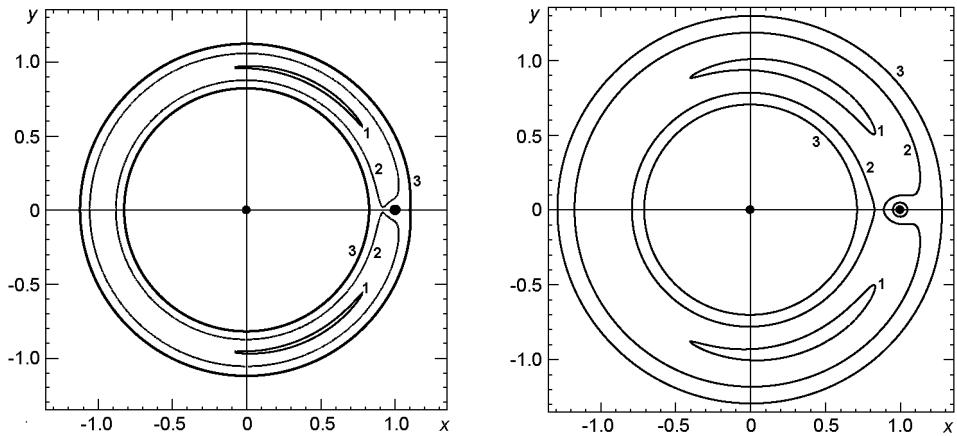


Рис. 2. Криві нульової швидкості в системі Сонце — Юпітер з поясом астероїдів: криві 1, 2 і 3 — для значень $C_{L_{4,5}} = 3.008, 3.034$ і 3.080 відповідно

Рис. 3. Криві нульової швидкості в системі Ріс з пиловим поясом: криві 1, 2 і 3 — для значень $C_{L_{4,5}} = 2.978, 3.10$ і 3.25 відповідно

ЛІНІЙНА СТАБІЛЬНІСТЬ ТРИКУТНИХ ТОЧОК РІВНОВАГИ

Коли досліджувану частинку зміщувати зі свого початкового положення, надаючи дуже малої швидкості, вона або коливатиметься навколо початкової точки, або відійде від неї. Якщо перший сценарій відбувається протягом значного інтервалу часу, то початкова точка стає стабільною, інакше вона нестабільна [18]. Для тесту лінійної стабільності точки рівноваги, скажімо (x_0, y_0) , ми трохи зміщуємо нескінченно малої масу, надаючи невеликого зміщення Pe^t і Qe^t з (x_0, y_0) , де P , Q і ϵ параметрами, які потрібно визначити. Тоді результатуюче положення нескінченно малої маси у будь-який момент часу становитиме

$$x = x_0 + Pe^t, \quad y = y_0 + Qe^t. \quad (18)$$

Підставимо значення x і y з рівняння (18) у рівняння руху (1) — (2) і застосуємо розвинення в ряд Тейлора навколо точки (x_0, y_0) у правих частинах отриманих рівнянь. Залишивши у ряді лише лінійні члени, ми отримуємо

$$\ddot{x} = 2n \cdot U_x^0 + U_{xx}^0 \cdot \dot{U}_{xy}^0 + U_{xy}^0 \cdot \dot{U}_{xx}^0 + U_{xy}^0 \cdot \dot{U}_{yy}^0, \quad (19)$$

$$\ddot{y} = 2n \cdot U_y^0 + U_{yx}^0 \cdot \dot{U}_{yy}^0 + U_{yy}^0 \cdot \dot{U}_{yx}^0 + U_{yy}^0 \cdot \dot{U}_{xy}^0, \quad (20)$$

де верхній індекс «0» означає, що часткові похідні обчислюються в точці (x_0, y_0) . Оскільки $U_x^0 = 0 = U_y^0$, після підстановки значень Pe^t і Qe^t у рівняння (19) і (20) отримуються сумісні лінійні рівняння

$$(2 - U_{xx}^0 \quad U_{xx}^0)P - (2n \quad U_{xy}^0 \quad U_{xy}^0)Q = 0, \quad (21)$$

$$(2n \quad U_{yx}^0 \quad U_{yx}^0)P - (2 \quad U_{yy}^0 \quad U_{yy}^0)Q = 0. \quad (22)$$

При спрощенні часткових похідних другого порядку потенціальної функції U в точці (x_0, y_0) ці лінійні рівняння далі зводяться до рівнянь

$$P_1 P - Q_1 Q = 0, \quad (23)$$

$$P_2 P - Q_2 Q = 0. \quad (24)$$

де

$$P_1 = n^2 - a^0 - b^0 - (1 - sw)\{K_{x,x}^0 - K_{x,\dot{x}}^0\},$$

$$Q_1 = 2n - c^0 - (1 - sw)\{K_{x,y}^0 - K_{x,\dot{y}}^0\},$$

$$P_2 = 2n - c^0 - (1 - sw)\{K_{y,x}^0 - K_{y,\dot{x}}^0\},$$

$$Q_2 = n^2 - a^0 - d^0 - (1 - sw)\{K_{y,y}^0 - K_{y,\dot{y}}^0\},$$

3

$$a^0 = \frac{q(1 -)}{r_{10}^3} - \frac{M_d}{r_{20}^3} - \frac{M_d}{(r_c^2 - T^2)^{3/2}},$$

$$b^0 = \frac{3q(1 -)(x_0 -)^2}{r_{10}^5} - \frac{3(x_0 - 1)^2}{r_{20}^5} - \frac{9M_d x_0^2}{(r_c^2 - T^2)^{5/2}},$$

$$c^0 = \frac{3q(1 -)(x_0 -)y_0}{r_{10}^5} - \frac{3(x_0 - 1)y_0}{r_{20}^5} - \frac{9M_d x_0 y_0}{(r_c^2 - T^2)^{5/2}},$$

$$d^0 = \frac{3q(1 -)y_0^2}{r_{10}^5} - \frac{3y_0^2}{r_{20}^5} - \frac{9M_d y_0^2}{(r_c^2 - T^2)^{5/2}}.$$

Система лінійних рівнянь (23) і (24) має нетривіальний розв'язок, якщо визначник матриці коефіцієнтів дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} P_1 & Q_1 \\ P_2 & Q_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (25)$$

При спрощенні рівняння (25) шляхом взяття лінійного порядку сил опору ми отримуємо рівняння четвертого степеня відносно :

$$A^4 - A^3(B_0 \quad B_1)^2 - C - (D_0 \quad D_1) = 0, \quad (26)$$

яка є характеристичним рівнянням системи, де

$$A = (1 - sw)[K_{x,\dot{x}}^0 \quad K_{y,\dot{y}}^0],$$

$$B_0 = 2n^2 - 2a^0 - b^0 - d^0,$$

$$B_1 = (1 - sw)[K_{x,x}^0 \quad K_{y,y}^0],$$

$$C = (1 - sw)[2n(K_{x,y}^0 \quad K_{y,x}^0)] - (1 - sw)(a^0 - b^0 - n^2)K_{y,\dot{y}}^0 - (1 - sw)(a^0 - d^0 - n^2)K_{y,\dot{x}}^0,$$

$$\begin{aligned}
D_0 &= (a^0 - b^0 - n^2)(a^0 - d^0 - n^2) - (c^0)^2, \\
D_1 &= (1 - sw)[c^0(K_{x,y}^0 - K_{y,x}^0)] - (1 - sw)(a^0 - b^0 - n^2)K_{y,y}^0 \\
&\quad + (1 - sw)(a^0 - d^0 - n^2)K_{xx}^0, \\
K_{x,x}^0 &= \frac{\frac{F_{PR,x}}{x}}{x}, \quad K_{x,y}^0 = \frac{\frac{F_{PR,x}}{y}}{y}, \\
K_{x,\dot{x}}^0 &= \frac{\frac{F_{PR,x}}{\dot{x}}}{\dot{x}}, \quad K_{x,\dot{y}}^0 = \frac{\frac{F_{PR,x}}{\dot{y}}}{\dot{y}}, \\
K_{y,x}^0 &= \frac{\frac{F_{PR,y}}{x}}{x}, \quad K_{y,y}^0 = \frac{\frac{F_{PR,y}}{y}}{y}, \\
K_{y,\dot{x}}^0 &= \frac{\frac{F_{PR,y}}{\dot{x}}}{\dot{x}}, \quad K_{y,\dot{y}}^0 = \frac{\frac{F_{PR,y}}{\dot{y}}}{\dot{y}}.
\end{aligned}$$

При відсутності сил опору коефіцієнти A , B_1 , C , D_1 зникають. Таким чином, є два випадки.

Випадок I: *Відсутність сил опору.* У цьому випадку характерне рівняння (26) зводиться до

$$B_0^4 - D_0^2 = 0. \quad (27)$$

Корені (27) залежать від знаку дискримінанта ($B_0^2 - 4D_0$), тому від нього залежить стійкість даної точки рівноваги. Корені рівняння (27) задано як

$$j = ik; \quad j = 1, 2, 3, 4, \quad i = \sqrt{-1}. \quad (28)$$

де k — дійсна величина, задана як

$$k = \sqrt{\frac{B_0^2 - \sqrt{B_0^2 - 4D_0}}{2}}. \quad (29)$$

Коли всі чотири корені (28) є чисто уявними, тоді рівновага буде стабільною, інакше вона нестабільна. Ми знайшли діапазон параметра маси $0.0779809 < m < 0.0854518$, в якому трикутна точка рівноваги стабільна для системи Сонце — Юпітер з поясом астероїдів, тоді як діапазон стабільності для системи Ріс з пиловим поясом лежить в діапазоні $0 < m < 0.0153601$, як показано на рис. 4a і 5a.

Випадок 2: *Наявність сил опору.* Нехай у цьому випадку корені мають вигляд [19, 22]

$$(1 - i)_j = (1 - (1 - i)i)k, \quad (30)$$

де i — малі реальні величини. Беручи лише члени першого порядку в i , ми маємо

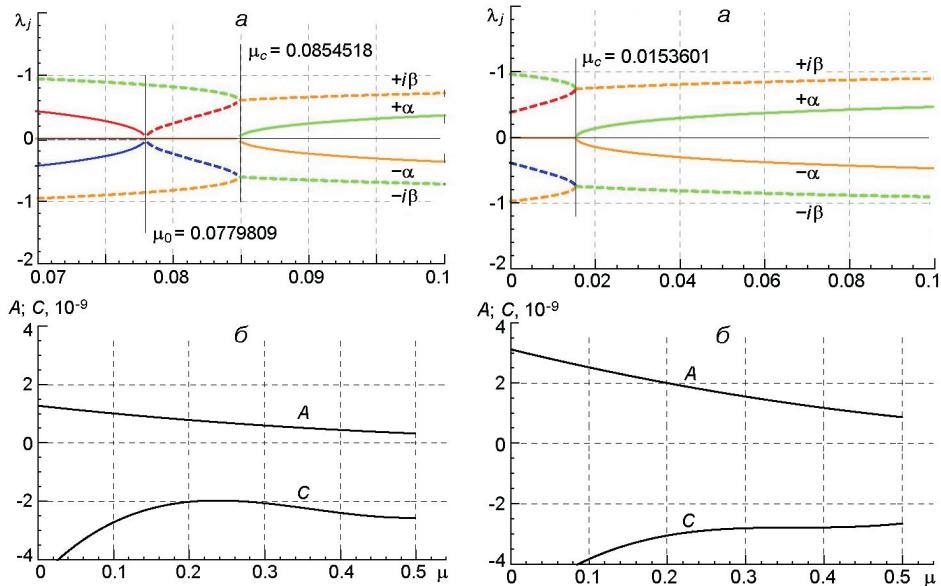


Рис. 4. Характер коренів у системі Сонце — Юпітер із поясом астероїдів: *а* — при відсутності PR-опору та опору сонячного вітру, *б* — при наявності PR-опору та опору сонячного вітру

Рис. 5. Характер коренів у системі Ріс з пиловим поясом: *а* — при відсутності PR-опору та опору сонячного вітру, *б* — при наявності PR-опору та опору сонячного вітру

$$^2 [(1 \ 2) \ 2 \ i] k^2, \quad (31)$$

$$^3 [3 \ (1 \ 3) i] k^3, \quad (32)$$

$$^4 [(1 \ 4) \ 4 \ i] k^4. \quad (33)$$

Підставляючи значення $, ^2, ^3$ і 4 у рівняння (26) і нехтуючи членами другого і вищого порядку та добутками чи в отриманому рівнянні, отримуємо розв'язки:

$$\frac{(D_0 \ D_1) \ (B_0 \ B_1) k^2 \ k^4}{2k^2(B_0 \ 2k^2)}, \quad (34)$$

$$\frac{Ak^2 \mp C}{2k(2k^2 \ B_0)}. \quad (35)$$

У класичному випадку розв'язки характеристичного рівняння є чисто уявними при виконанні умови відношення мас. Ситуація ускладнюється із наявністю сил опору. Виникають такі можливості: якщо всі дійсні частини коренів від'ємні, то система асимптотично стійка, а якщо одна або всі дійсні частини коренів додатні, то система лінійно нестійка. Для 0 рух частинок нескінченно малої маси може бути асимптотично стійким лише у випадку, коли всі розв'язки мають від'ємну дійсну частину. Таким чином, для асимптотично стійкого руху

$$() < 0,$$

Оскільки відношення мас $0, \text{ ця нерівність означатиме}$
 $0 < C < A,$

що є умовою асимптотичної стійкості. Для чисельного розрахунку ми вибрали L_4 (0.42649986, 0.72773569) у системі Сонце — Юпітер із поясом астероїдів і виявили, що для всіх значень параметра в діапазоні $0 < q < 1, 0 < sw < 1 \text{ і } 0 < M_d < 1$ коефіцієнти A і C не задовольняють нерівність (36), що призводить до лінійної нестійкості (рис. 4б). Аналогічний результат отримано для системи Pic із пиловим поясом (рис. 5б). Отже, ми робимо висновок, що рух нескінченно малої маси в околиці трикутних точок рівноваги є лінійно нестійким.

БАСЕЙНИ ПРИТЯГАННЯ

У нелінійній системі $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, важливим аспектом динамічного вивчення є нулі системи $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$. Через наявність нелінійних членів важко знайти точний розв'язок системи, тому для її розв'язання використовуються декілька ітераційних методів, серед яких найпопулярніші модифікований метод Бродена, метод Ньютона — Рафсона тощо [3, 35]. За допомогою цих ітераційних методів можна знайти наближений розв'язок системи $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$, при цьому багатовимірний метод Ньютона — Рафсона є більш точним ітераційним методом, ніж інші. Алгоритм методу Ньютона — Рафсона починається з початкової точки (x_0, y_0) і припиняється, коли буде досягнуто наперед визначену точність для бажаних точок рівноваги. Таким чином, сукупність усіх початкових точок, які сходяться до певної точки рівноваги (також відомої як атрактор), утворює область притягання, відому як басейн притягання або конвергенції [36]. Для розв'язання системи рівнянь формулу N-D багатовимірного методу Ньютона — Рафсона для $(i + 1)$ -го наближення записують у вигляді [35]

$$\begin{array}{cccccc} & \frac{f_1}{x_1} & \frac{f_1}{x_2} & \dots & \frac{f_1}{x_n} & ^1 \\ x_1 & x_1 & \frac{x_1}{f_2} & \frac{x_2}{f_2} & \dots & \frac{x_n}{f_2} & f_1(\mathbf{x}) \\ x_2 & x_2 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & & & & & \dots \\ x_{n-i+1} & x_{n-i} & \frac{f_n}{x_1} & \frac{f_n}{x_2} & \dots & \frac{f_n}{x_n} & f_n(\mathbf{x}) \end{array},$$

де $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$. У випадку ОПТТ функції матимуть вигляд

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f_1(x_1, x_2) \ f_2(x_1, x_2)]^T = [U_x \ U_y]^T,$$

де U — ефективний потенціал, а U_x, U_y — часткові похідні від U відносно x та y відповідно. Таким чином, обчислюючи якобіан цих функцій, після спрощення отримуємо ітераційну формулу:

$$\begin{array}{ccccc} x & x & \frac{U_x}{x} & \frac{U_x}{y} & ^1 \\ & & \frac{U_y}{U_y} & \frac{U_y}{U_y} & U_x \\ y_{i+1} & y_i & x & y & U_y(x_i, y_i) \end{array}.$$

Для спрощення можна записати координати x і y окремо [35]:

$$\begin{array}{ccccc} x_{i+1} & x_i & \frac{U_x U_{yy}}{U_{yy} U_{xx}} & \frac{U_y U_{xy}}{U_{xy}^2} & , \\ & & (x_i, y_i) & & \end{array} \quad (37)$$

$$\begin{array}{ccccc} y_{i+1} & y_i & \frac{U_x U_{yx}}{U_{yy} U_{xx}} & \frac{U_y U_{xx}}{U_{xy}^2} & . \\ & & (x_i, y_i) & & \end{array} \quad (38)$$

Наведені вище вирази є положенням точок рівноваги на $(i + 1)$ -му ітераційному кроці методу. Для отримання басейну притягання вибираємо набір початкових умов у вигляді рівномірної сітки 1000 × 1000 з фазового простору, які будуть використані як початкова умова в ітераційному процесі, а потрібна точність приймається рівною 10^{-14} . Ми класифікували басейни в сенсі конкретної початкової умови для шуканого атрактора (точки рівноваги) і взяли $i_{\max} = 500$. Усі обчислення виконуються за допомогою MATLAB 2017b.

Таким чином, щоб зрозуміти поведінку точок рівноваги, ми отримали басейни притягання, що відповідають цим точкам, під впливом радіаційного тиску, PR-опору, опору сонячного вітру та наявності диска за допомогою багатовимірного методу Ньютона — Рафсона. Види басейнів притягання при різних значеннях збурювального параметра показано на рис. 6. Точками позначені точки рівноваги L_1, L_2, L_3, L_4 і L_5 , а різні кольори використовуються для позначення окремих басейнів, що відповідають цим точкам рівноваги. Рис. 6a і 6b відповідають структурі басейнів, отримані при відношенні мас $= 0.1$ і $= 0.0070881$ (для системи Ріс з пиловим поясом) через зближення початкової умови до точок рівноваги L_1, L_2, L_3, L_4 і L_5 (такий же тип структур басейнів отримано у випадку системи Юпітер — Європа, яку тут не представлено). Видно, що для $= 0.1$ всі структури басейнів притягання формує нагадують жуків, а басейни, що відповідають точкам L_4 і L_5 , нагадують крила метелика. Спостерігається також збільшення та спотворення басейнів притягання зі зменшенням відношения мас (рис. 6b). Цікавою частиною формування басейну є те, що область басейну, яка відповідає точці L_1 , необмежена щодо положення L_1 (рис. 6c), тоді як вона обмежена щодо L_2, L_3, L_4 і L_5 . З аналізу рис. 6d і 6e також випливає, що внаслідок цих збурень, викликаних PR-опором, та опором сонячного вітру, розміри басейнів притягання зменшуються поступово, проте їхня геометрія залишається незмінною. Наявність диска впливає на геометрію басейнів, як показано на рис. 6f—6z. Помічено, що при збільшенні маси диска збільшуються басейни притягання, що відповідають точкам L_3, L_4, L_5 .

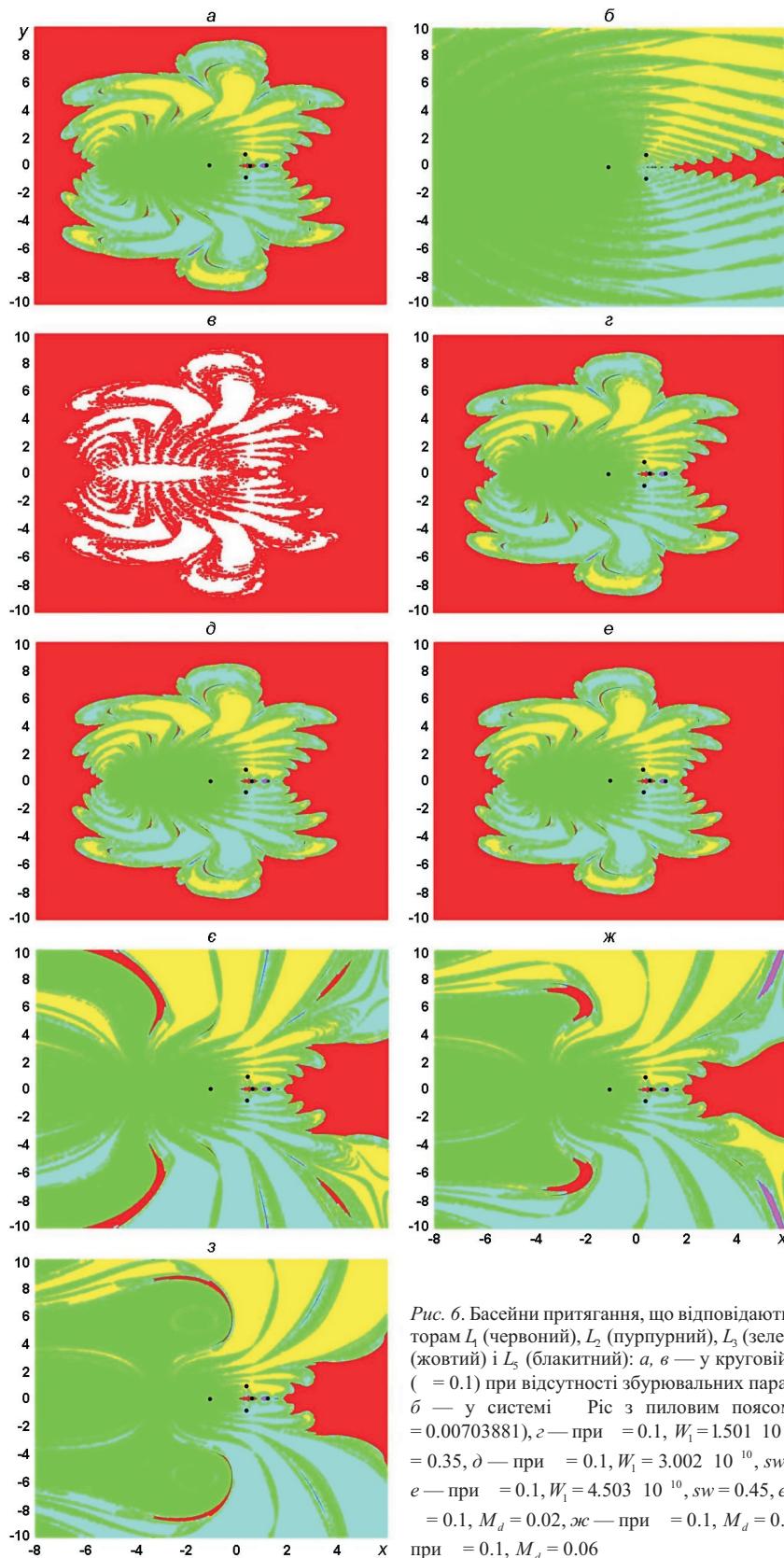


Рис. 6. Басейни притягання, що відповідають атракторам L_1 (червоний), L_2 (пурпурний), L_3 (зелений), L_4 (жовтий) і L_5 (блакитний): a, b — у круговій ОПТТ ($\gamma = 0.1$) при відсутності збурювальних параметрів, b — у системі Pic з пиловим поясом ($\gamma = 0.00703881$), c — при $\gamma = 0.1$, $W_1 = 1.501 \cdot 10^{-10}$, $sw = 0.35$, d — при $\gamma = 0.1$, $W_1 = 3.002 \cdot 10^{-10}$, $sw = 0.45$, e — при $\gamma = 0.1$, $W_1 = 4.503 \cdot 10^{-10}$, $sw = 0.45$, f — при $\gamma = 0.1$, $M_d = 0.02$, g — при $\gamma = 0.1$, $M_d = 0.04$, h — при $\gamma = 0.1$, $M_d = 0.06$

(рис. 6c—6z). Крім того, басейни притягання, що відповідають точкам L_4 , L_5 , починають розширюватися до точки колінеарної рівноваги L_3 (рис. 6c—6z).

Таким чином, наявність збурювальних параметрів у вигляді PR-опору, опору сонячного вітру та диска впливає на форму і розмір басейнів притягання. Виявлено, що випадкові початкові умови у площині конфігурації сходяться до однієї з точок рівноваги (атрактора) у межах визначеного діапазону та точності.

ВИСНОВКИ

Ми розглянули систему Сонце — Юпітер із поясом астероїдів та систему Ріс з пиловим поясом та вивели рівняння руху в рамках обмеженої задачі трьох тіл при наявності PR-опору, опору сонячного вітру та диска. Спочатку ми обчислили трикутні точки рівноваги і виявили, що при наявності сил опору точки $L_{4,5}$ рухаються до початку координат, тоді як через вплив диска вони зміщуються від початку координат (табл. 1, 2). Далі ми визначили криві нульової швидкості для обох систем, проаналізували заборонену область для руху тіл нескінченно малої маси та спостерігали вплив сил опору та диска. Через наявність PR-опору і опору диска спостерігається збільшення значень $C_{L_{4,5}}$, і отже, області для руху нескінченно малої маси матимуть вигляд, показаний на рис. 2 і 3. Перевірка лінійної стійкості для трикутних точок рівноваги показала, що при наявності сил опору точки $L_{4,5}$ є нестійкими, тоді як при його відсутності трикутні точки рівноваги стають стійкими в діапазоні $0.0779809 < \epsilon < 0.0854518$ для системи Сонце — Юпітер із поясом астероїдів і в діапазоні $0 < \epsilon < 0.0153601$ для системи Ріс з пиловим поясом. Відтак ми отримали геометрію басейнів притягання за допомогою багатовимірного методу Ньютона — Рафсона та проаналізували вплив на неї PR-опору (W_1), опору сонячного вітру sw та наявності диска (M_d) (рис. 6). Виявлено, що випадкові початкові умови у межах визначеного діапазону сходяться до однієї з п'яти точок рівноваги. Помічено, що область басейнів притягання поступово зменшується зі збільшенням величини PR-опору, але внаслідок опору сонячного вітру істотних змін у басейнах не відбувається (рис. 6z—6e).

Через наявність диска в задачі порушується збіжність початкових умов, що призводить до деформації форми та структури басейнів притягання (рис. 6c—6z). Таким чином, наявність PR-опору, опору сонячного вітру та диска впливає на рух нескінченно малої маси в контексті точок рівноваги, їхньої лінійної стійкості, кривих нульової швидкості та басейнів притягання, що відповідають точкам рівноваги.

Ці результати будуть корисні для вивчення більш узагальненої динамічної задачі з урахуванням інших збурювальних факторів, таких як сплющеність, альбедо, ефект Ярковського тощо.

ПОДЯКИ

Ми вдячні Комісії з надання університетських грантів (UGC), уряду Індії за надання часткової підтримки через грант UGC на початок дослідження №-F.30-356/2017(BSR) та UGC-JRF (Ref. No-21/06/2015(i) EU-V). Ми також вдячні Міжуніверситетському центру астрономії та астрофізики (IUCAA), Пуна (Індія) за поширення деяких посилань, використаних у цій статті.

КОНФЛІКТ ІНТЕРЕСІВ

Автори декларують, що вони не мають конфлікту інтересів.

1. AbdulRaheem A., Singh J. (2006). Combined effects of perturbations, radiation, and oblateness on the stability of equilibrium points in the restricted three-body problem. *Astron. J.* 131. 1880—1885.
2. Burns J. A., Lamy P. L., Soter S. (1979). Radiation forces on small particles in the Solar system. *Icarus*. 40(1). 1—48.
3. Douskos C. (2010). Collinear equilibrium points of Hill’s problem with radiation and oblateness and their fractal basins of attraction. *Astrophys. Space Sci.* 326(2). 263—271.
4. Freistetter F., Krivov A. V., Lohne T. (2007). Planets of ff Pictoris revisited. *Astron. Astrophys.* 466(1). 389—393.
5. Greaves J., Holland W., Moriarty-Schieven G., Jenness T., Dent W., Zuckerman B., McCarthy C., Webb R., Butner H., Gear W. K., et al. (1998). A dust ring around epsilon Eridani: analog to the young Solar system. *Astrophys. J. Lett.* 506(2). L133.
6. Ishwar B., Elipe A. (2001). Secular solutions at triangular equilibrium point in the generalized photogravitational restricted three body problem. *Astrophys. Space Sci.* 277(3). 437—446.
7. Ishwar B., Kushvah B. (2006). Linear stability of triangular equilibrium points in the generalized photogravitational restricted three body problem with Poynting-Robertson drag. *J. Dyn. Sys. Geo. Theories*. 4(1). 79—86.
8. Jiang I.-G., Yeh L.-C. (2004). Dynamical effects from asteroid belts for planetary systems. *Int. J. Bifurcat. Chaos*. 14(09). 3153.
9. Jiang I.-G., Yeh L.-C. (2004). On the chaotic orbits of disk-star-planet systems. *Astron. J.* 128. 923.
10. Kishor R., Kushvah B. S. (2013). Linear stability and resonances in the generalized photogravitational Chermnykh-like problem with a disc. *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.* 436(2). 1741.
11. Kushvah B., Sharma J., Ishwar B. (2007). Normalization of hamiltonian in the generalized photogravitational restricted three body problem with Poynting-Robertson drag. *Earth, Moon, and Planets*. 101(1-2). 55—64.
12. Kushvah B. S. (2008). The effect of radiation pressure on the equilibrium points in the generalized photogravitational restricted three body problem. *Astrophys. Space Sci.* 315(1-4). 231—241.
13. Kushvah B. S. (2008). Linear stability of equilibrium points in the generalized photogravitational Chermnykh’s problem. *Astrophys. Space Sci.* 318. 41—50.
14. Liou J.-C., Zook H. A., Jackson A. A. (1995). Radiation pressure, Poynting-Robertson drag, and solar wind drag in the restricted three-body problem. *Icarus*. 116. 186.

15. Lo M. W. (1997). *Libration point trajectory design. Numerical Algorithms*, 14(1-3). 153—164.
16. McCuskey S. W. (1963). *Introduction to celestial mechanics*. Reading Mass., Addison-Wesley Pub. Co.
17. Miyamoto M., Nagai R. (1975). Three-dimensional models for the distribution of mass in galaxies. *Publ. Astron. Soc. Jap.* 27. 533—543.
18. Moulton F. R. (2012). *An introduction to celestial mechanics*. Courier Corporation.
19. Murray C. D. (1994). Dynamical effects of drag in the circular restricted three-body problem: I. Location and stability of the Lagrangian equilibrium points. *Icarus*. 112(2). 465—484.
20. Murray C. D., Dermott S. F. (1999). *Solar system dynamics*. Cambridge University Press.
21. Ott E. (2002). *Chaos in dynamical systems*. Cambridge university press.
22. Pal A. K., Kushvah B. S. (2014). Geometry of halo and lissajous orbits in the circular restricted three-body problem with drag forces. *Mon. Notic. Roy. Astron.* 446(1). 959—972.
23. Poynting J. (1903). *Radiation pressure*. Proc. Phys. Soc. London, 19(1). 475.
24. Ragos O., Zafiropoulos F., Vrahatis M. (1995). A numerical study of the influence of the Poynting-Robertson effect on the equilibrium points of the photogravitational restricted three-body problem ii. out of plane case. *Astron. and Astrophys.* 300. 579.
25. Robertson H. (1937). Dynamical effects of radiation in the solar system. *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.* 97. 423.
26. Singh J., Amuda T. O. (2014). Poynting-Robertson (PR) drag and oblateness effects on motion around the triangular equilibrium points in the photogravitational R3BP. *Astrophys. Space Sci.* 350(1). 119—126.
27. Singh J., Amuda T. O. (2019). Stability analysis of triangular equilibrium points in restricted three-body problem under effects of circumbinary disc, radiation and drag forces. *J. Astrophys. Astron.* 40(1). 5.
28. Singh J., Leke O. (2014). Analytic and numerical treatment of motion of dust grain particle around triangular equilibrium points with post-AGB binary star and disc. *Adv. Space Res.* 54(8). 1659—1677.
29. Singh J., Taura J. J. (2013). Motion in the generalized restricted three-body problem. *Astrophys. Space Sci.* 343(1). 95—106.
30. Suraj M. S., Asique M. C., Prasad U., Hassan M., Shalini K. (2017). Fractal basins of attraction in the restricted four-body problem when the primaries are triaxial rigid bodies. *Astrophys. Space Sci.* 362(11). 211.
31. Suraj M. S., Mittal A., Arora M., Aggarwal R. (2018). Exploring the fractal basins of convergence in the restricted four-body problem with oblateness. *Int. J. Non Linear Mech.* 102. 62—71.
32. Trilling D. E., Stansberry J., Stapelfeldt K., Rieke G. H., Su K., Gray R., Corbally C., Bryden G., Chen C., Boden A., et al. (2007). Debris disks in main-sequence binary systems. *Astrophys. J.* 658(2). 1289.
33. Van Winckel H., Evans T. L., Briquet M., De Cat P., Degroote P., De Meester W., De Ridder J., Deroo P., Desmet M., Drummond R., et al. (2009). Post-AGB stars with hot circumstellar dust: binarity of the low-amplitude pulsators. *Astron. and Astrophys.* 505(3). 1221—1232.
34. Yousuf S., Kishor R. (2019). Effects of the albedo and disc on the zero velocity curves and linear stability of equilibrium points in the generalized restricted three-body problem. *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.* 488(2). 1894—1907.

35. Zotos E. E. (2016). Fractal basins of attraction in the planar circular restricted three-body problem with oblateness and radiation pressure. *Astrophys. Space Sci.* 361(6). 181.
36. Zotos E. E. (2017). Basins of convergence of equilibrium points in the pseudo-newtonian planar circular restricted three-body problem. *Astrophys. Space Sci.* 362(10). 195.

S. Yousuf, R. Kishor

Department of Mathematics, Central University of Rajasthan, Ajmer, India-305817

IMPACT OF A DISC AND DRAG FORCES ON THE EXISTENCE
LINEAR STABILITY OF EQUILIBRIUM POINTS
AND NEWTON-RAPHSON BASINS OF ATTRACTION

This paper presents a study of zero velocity curves, linear stability analysis and basins of attraction corresponding to the equilibrium points in the Sun-Jupiter system with asteroid belt and -Pictoris system with dust belt, respectively under the influence of perturbing factors in the form of Poynting-Robertson drag (P-R drag), solar wind drag and a disc, which is rotating about the common center of mass of the system. Zero velocity curves are obtained and it is observed that in the presence of perturbing factors, the prohibited regions of the motion of infinitesimal mass get disturbed. Again, linear stability and effects of perturbing factors are analyzed for the triangular equilibrium points. It is noticed that because of P-R drag, triangular equilibrium points become unstable within the stability range. Finally, the Newton-Raphson basins of attraction corresponding to the equilibrium points are computed and it is found that in the presence of the disc, geometry of the basins of attraction gets change, whereas the effects of remaining perturbing factors on the structure of basins of attraction are very small.

Keywords: zero velocity curves, linear stability, N-R basins of attraction, Poynting-Robertson drag, solar wind drag, disc

Стаття надійшла до редакції 23.11.2020

Після доопрацювання 26.11.2021

Прийнята до друку 17.02.2021