

doi: <https://doi.org/10.15407/kfnt2021.03.003>

УДК 523.9-72

**Ю. І. Федоров**

Головна астрономічна обсерваторія Національної академії наук України,  
вул. Академіка Заболотного 27, Київ, Україна, 03143  
E-mail: fedorov@mao.kiev.ua

## Потік космічних променів у дифузійному наближенні

*На основі кінетичного рівняння Фоккера — Планка розглянуто поширення космічних променів у міжпланетному середовищі. У наближенні малої анізотропії кутового розподілу частинок отримано аналітичний вираз для анізотропної складової функції розподілу космічних променів. Показано, що за ізотропного розсіяння частинок високої енергії на флуктуаціях міжпланетного магнітного поля функція розподілу космічних променів залежить від косинуса кута між швидкістю частинки і радіальним напрямком за експоненційним законом. Отримано співвідношення для щільності потоку космічних променів. Показано, що щільність потоку частинок визначається просторовим розподілом концентрації космічних променів і залежністю концентрації частинок від часу. Отримані рівняння переносу космічних променів (рівняння гіпердифузії і телеграфне рівняння). На основі розв'язків цих рівнянь досліджено просторово-часовий розподіл інтенсивності сонячних космічних променів і анізотропії кутового розподілу частинок.*

**Ключові слова:** космічні промені, кінетичне рівняння, рівняння переносу, міжпланетне середовище.

## ВСТУП

Поширення заряджених частинок високої енергії у турбулентних космічних магнітних полях є фундаментальною проблемою астрофізики космічних променів (КП). У галузі кінетики космічних променів у випадкових магнітних полях галактичного і міжпланетного простору в останні десятиріччя було отримано унікальні спостережні дані і виконані важливі теоретичні дослідження [5, 8, 11, 15, 22, 24, 30, 31].

Помітна частина енергії сонячних спалахів витрачається на прискорення заряджених частинок. Прискорені частинки поширюються у магнітних полях міжпланетного простору та реєструються на космічних апаратах і на світовій мережі нейтронних моніторів. Якщо розсіяння КП на флуктуаціях міжпланетного магнітного поля є достатньо інтенсивним, то функція розподілу частинок швидко стає близькою до ізотропної, а транспортний пробіг КП виявляється малим у порівнянні з відстанню до джерела частинок. В цьому випадку часовий профіль інтенсивності сонячних космічних променів (СКП) має плавну форму, а процес переносу СКП у міжпланетному середовищі може бути представлений рівнянням дифузії [14, 22—24]. Дійсно, спостереження показують, що у багатьох спалахах СКП інтенсивність частинок в даній точці простору змінюється досить повільно: інтенсивність КП поступово збільшується до максимального значення, а потім повільно зменшується, наближаючись до рівня фону галактичних космічних променів [5, 30].

Дифузійне наближення може бути застосовано, якщо функція розподілу достатньо повільно змінюється в просторі і в часі [14, 21, 23, 24, 34]. Зміни концентрації частинок на масштабах порядку транспортного пробігу КП і за період часу порядку часу розсіяння  $t_s = l/v$  (де  $v$  — швидкість частинки) повинні бути малими порівняно з величиною концентрації КП  $N(r, t)$ :

$$\frac{N}{N} \frac{N}{r} \ll 1; \quad \frac{N}{vN} \frac{N}{t} \ll 1.$$

В деяких роботах для опису поширення СКП у міжпланетному середовищі було використане телеграфне рівняння [6, 7, 14, 20]. На відміну від рівняння дифузії, якому відповідає нескінченна швидкість поширення збурень, телеграфне рівняння характеризується скінченною швидкістю поширення «сигналу», яка пропорційна швидкості частинки. Телеграфному рівнянню, яке отримано в роботах [6, 7, 14, 20], відповідає швидкість поширення збурень  $v/\sqrt{3}$ . Модифікованому телеграфному рівнянню, виведення якого приведено в роботі [21], відповідає інша швидкість «сигналу». Виявляється, що швидкість поширення збурень залежить від характеру розсіяння частинок [17, 21, 32]. У випадку розсіяння частинок на довільні кути, яке описується інтегралом зіткнень Больцмана, телеграфне рівняння характеризується швидкістю «сигналу»  $v\sqrt{5}/3$ , яка перевищує швидкість частинки [17, 21, 32]. За багатократного, ізотропного розсіяння на малі кути (кінетичне рівняння Фоккера — Планка) для відповідного телеграфного рівняння характерною є швидкість «сигналу»  $v\sqrt{5}/11$ , яка виявляється меншою за швидкість частинки [17, 21, 32]. Відмітимо особливість розв'язку телеграфного рівняння, яка полягає в наявності сингулярного дифузійного фронту, що розташований на границі заповненої частинками області [13, 16, 29]. Якщо час після інжекції частинок в міжпланетне середовище значно перевищує обернену частоту

зіткнень ( $t \gg \lambda/v$ ), то розв'язок телеграфного рівняння співпадає з розв'язком рівняння дифузії [6, 7, 14, 20]. Поширення СКП у міжпланетних магнітних полях на основі рівняння гіпердифузії досліджено в роботах [16, 26, 28].

У деяких спалахах СКП спостерігався імпульсний сплеск інтенсивності частинок, а частинки надходили в точку спостереження у вигляді вузького пучка [31, 33]. В цих протонних подіях розсіяння частинок на флуктуаціях міжпланетного магнітного поля було слабким, а транспортний пробіг КП виявлявся порівнюваним з відстанню до джерела частинок [31, 33]. Для таких спалахів СКП дифузійне наближення стає некоректним, а для опису поширення КП у міжпланетному середовищі необхідно використовувати кінетичні рівняння [2, 5, 11, 12, 15, 22].

В даній роботі на основі кінетичного рівняння розглянуто поширення СКП у міжпланетному середовищі. Функція розподілу КП представлена у вигляді суми ізотропної та анізотропної складової. У наближенні слабкої анізотропії кутового розподілу частинок отримано аналітичний вираз для анізотропної компоненти функції розподілу КП і співвідношення для щільності потоку частинок. Отримані рівняння переносу КП, на основі розв'язків цих рівнянь досліджено просторово-часовий розподіл концентрації СКП та анізотропії кутового розподілу частинок.

## КІНЕТИЧНЕ РІВНЯННЯ

Наведемо кінетичне рівняння, яке описує поширення заряджених частинок високої енергії у міжпланетних магнітних полях [2, 11, 15]

$$\frac{df}{dt} + v \cos \theta \frac{df}{r} - \frac{v}{r} \sin \theta \frac{df}{d\theta} - \frac{f}{2} \frac{v}{\sin \theta} \frac{d^2 f}{d\theta^2} = \frac{f}{16} \frac{v}{r^2} \frac{d^2 f}{dr^2}, \quad (1)$$

де  $f(r, \theta, t)$  — функція розподілу КП,  $\theta$  — кут між вектором швидкості частинки  $v$  і радіальним напрямком,  $r$  — транспортний пробіг КП. Останній доданок у лівій частині кінетичного рівняння (1) відповідає ізотропному розсіянню заряджених частинок на неоднорідностях магнітного поля. Припускаємо, що функція розподілу КП залежить від єдиної просторової координати  $r$ . Права частина кінетичного рівняння являє собою миттєве джерело частинок, яке розташовано у початку координат.

Введемо безрозмірну координату  $r/r_0$  і безрозмірний час

$$\frac{r}{r_0}; \quad \frac{vt}{r_0}, \quad (2)$$

де  $r_0$  — постійна величина (що дорівнює, наприклад, одній астрономічній одиниці). Визначимо безрозмірний транспортний пробіг КП згідно із співвідношенням

$$\frac{f}{r_0} \tag{3}$$

У безрозмірних змінних кінетичне рівняння (1) набуває вигляду

$$\frac{df}{dt} = \frac{f}{2} - (1 - \mu^2) f - \frac{(\mu)(\mu)}{16 r_0^3 \mu^2}, \tag{4}$$

де

$$\cos \mu. \tag{5}$$

Припустимо, що час після інжекції частинок у міжпланетне середовище значно перевищує час поширення частинок ( $t \gg r/v$ ) і характерний час розсіяння КП ( $t \gg r/v$ ). За цієї умови частинки встигають багатократно розсіятись на неоднорідностях міжпланетного магнітного поля, а їхня функція розподілу стає близькою до ізотропної. Запишемо функцію розподілу частинок у вигляді суми [8, 15, 25]

$$f(\mu, \mu) = \frac{1}{2} f_0(\mu, \mu) + f(\mu, \mu), \tag{6}$$

де

$$f_0(\mu, \mu) = \int_0^1 d f(\mu, \mu), \tag{7}$$

а анізотропна складова функції розподілу КП  $f$  задовольняє рівняння

$$\int_0^1 d f(\mu, \mu) = 0. \tag{8}$$

Середнє значення функції розподілу КП є пропорційним величині  $f_0$ :

$$\langle f \rangle = \frac{\int_0^1 d f(\mu, \mu)}{\int_0^1 d} = \frac{1}{2} f_0(\mu, \mu). \tag{9}$$

Після інтегрування кінетичного рівняння (4) по  $\mu$  отримаємо рівняння неперервності:

$$\frac{df_0}{dt} = \frac{1}{2} - \int_0^1 d f = \frac{(\mu)(\mu)}{8 r_0^3 \mu^2}. \tag{10}$$

Підставимо вираз для функції розподілу КП (6) в кінетичне рівняння (4). Врахувавши рівняння неперервності (10), отримаємо з кінетичного рівняння (4) рівняння

$$-(1 - \mu^2) \frac{1}{2} \frac{df}{dt} = \frac{df}{dt}$$

$$-\frac{f_0}{2} - \frac{f}{2} - \frac{1}{2} - \frac{f}{2} \frac{1}{d} \frac{1}{f}. \quad (11)$$

### Анізотропна складова функції розподілу космічних променів

Припустимо, що час після інжекції СКП у міжпланетне середовище значно перевищує обернену частоту зіткнень. Частинки КП встигають багатократно розсіятися на флуктуаціях міжпланетного магнітного поля, а функція розподілу КП стає майже ізотропною. Отже, виконується умова  $f \ll f_0$ , а у правій частині рівняння (11) домінує перший доданок. Представимо анізотропну складову функції розподілу КП у вигляді

$$f(\theta, \varphi) = f(\theta, \varphi) = f(\theta, \varphi) = f(\theta, \varphi) = f(\theta, \varphi), \quad (12)$$

де величина  $f$  задовольняє рівняння [8, 15, 25]

$$-(1 - \mu^2) \frac{1}{2} \frac{f}{d} - \frac{f}{2} = \frac{f_0}{2}. \quad (13)$$

Запишемо це рівняння у вигляді

$$-(1 - \mu^2) \exp \frac{2}{d} = \exp \frac{2}{d} f(\theta) = \frac{f_0}{2}. \quad (14)$$

Розв'язок рівняння (14) має вигляд

$$f(\theta) = f(0) \exp \frac{2}{d} = \frac{f_0}{2} \exp \frac{2}{d} = d \exp \frac{2}{d}. \quad (15)$$

Постійну величину  $f(0)$  можна знайти, врахувавши співвідношення (8) [8, 18]

$$f(\theta) = \frac{f_0}{4} \frac{2}{\text{sh}(2/\mu)} \exp \frac{2}{d} = 1, \quad (16)$$

де  $\text{sh}x$  — гіперболічний синус змінної  $x$ . Згідно з формулою (16), яка відповідає ізотропному розсіянню частинок, функція розподілу КП залежить від косинуса кута між швидкістю частинки і радіальним напрямком за експоненціальним законом [8, 10, 15, 18, 25].

Рівняння неперервності (10) містить перший момент функції розподілу КП. Після інтегрування співвідношення (16) отримуємо

$$\int_1^1 d f(\theta) = \frac{f_0}{2} \text{cth} \frac{2}{d} = \frac{f_0}{2}, \quad (17)$$

де  $\text{cth}x$  — гіперболічний котангенс змінної  $x$ .

За досить інтенсивного розсіяння КП у міжпланетному середовищі транспортний пробіг частинок виявляється значно меншим, ніж відстань до джерела частинок. Якщо виконується нерівність  $\ll r$ , формула (17) набуває вигляду

$$d f(\theta) = \frac{f_0}{3}. \quad (18)$$

За відомою ізотропною складовою функції розподілу КП  $f_0$  можна обчислити концентрацію частинок  $N(r, \theta)$ :

$$N(r, \theta) = d f(r, \theta) = 2 f_0(r, \theta). \quad (19)$$

Інтегрування в формулі (19) виконується за кутами вектора швидкості частинки. Врахувавши співвідношення (18), запишемо рівняння неперервності (10)

$$\frac{N}{3^2} - 2 \frac{N}{4 r_0^3} = \frac{d f(r, \theta)}{4 r_0^3}. \quad (20)$$

Розв'язок рівняння дифузії КП (20) має вигляд

$$N(r, \theta) = \frac{1}{8 r_0^3} \frac{3}{4} \exp\left(\frac{3}{4}\right). \quad (21)$$

З даного співвідношення випливає, що за великих значень безрозмірного часу концентрація СКП змінюється з часом пропорційно  $\frac{3}{4}$ .

Наведемо вираз для анізотропної складової функції розподілу КП (16), яке нормовано на середнє значення (9)

$$\frac{f(r, \theta)}{\langle f \rangle} = \frac{1}{2} \frac{N}{N} \frac{2}{\text{sh}(2/r)} \exp\left(\frac{2}{r}\right) = 1. \quad (22)$$

На рис. 1а наведено залежність анізотропної складової функції розподілу КП (22) від величини  $r$  в точці  $\theta = 1$ . Значення безрозмірного часу наведено біля відповідних кривих, параметр  $\beta = 0.5$ . Відмітимо, що при розрахунку функції розподілу КП (22) було використано вираз для концентрації КП (21), який є розв'язком рівняння дифузії. Видно, що функція розподілу КП монотонно зростає при збільшенні  $r$ , у відповідності з тим, що кількість частинок, які рухаються від джерела ( $r > 0$ ), більша, ніж кількість частинок, що рухаються у протилежному напрямку. Має місце експоненційна залежність функції розподілу КП від  $r$ . З часом абсолютна величина функції розподілу КП (22) і кривина відповідних кривих зменшуються, а кутовий розподіл частинок стає більш ізотропним. Розподіл частинок виявляється суттєво анізотропним в момент часу  $t = 2$  і близьким до ізотропного за  $t = 10$ .

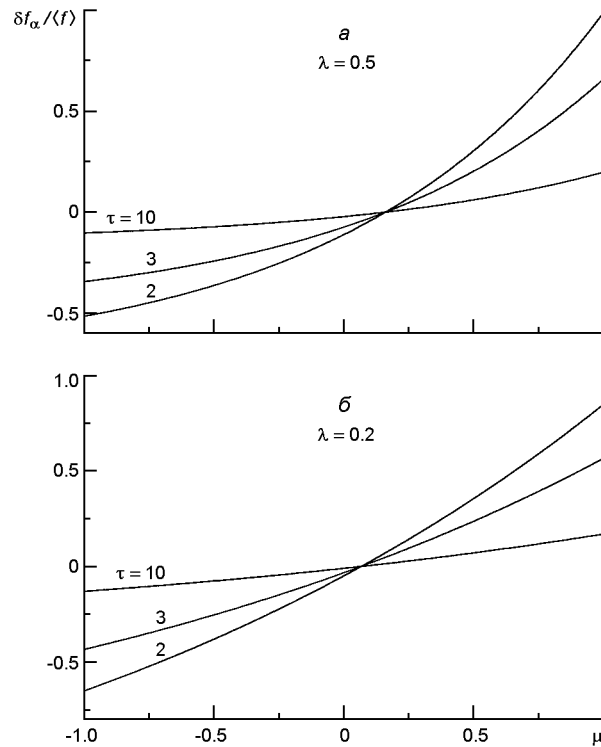


Рис. 1. Залежність функції розподілу КП (22) від величини  $\mu$  в точці  $\mu = 1$  в різні моменти часу (числа біля кривих) та при різних значеннях відносного транспортного пробігу частинок:  $a$  —  $\lambda = 0.5$ ,  $b$  —  $\lambda = 0.2$

Залежність безрозмірної величини (22) від  $\mu$  при більш інтенсивному розсіянні наведено на рис. 1б. Видно, що з часом кутовий розподіл частинок стає все більш ізотропним. Відмітимо, що за тих же значень безрозмірного часу  $\tau$  криві на рис. 1б характеризуються меншою кривиною, ніж відповідні криві на рис. 1а. Цей ефект зумовлений тією обставиною, що показник експоненти у формулі (22) пропорційний до транспортного пробігу частинки.

Наведемо рівняння для величини  $f$ , яка є частиною функції розподілу КП (12):

$$-(1 - \lambda^2) \frac{1}{2} \frac{df}{d\mu} - \frac{f}{\mu} = -\frac{f}{\mu}. \quad (23)$$

Вважаємо розсіяння частинок достатньо інтенсивним, так що відносний транспортний пробіг частинки  $\lambda$  виявляється малою величиною. У даному наближенні ( $\lambda < 1$ ) рівняння (23) набуває вигляду

$$-(1 - \lambda^2) \exp \frac{2}{\mu} = \exp \frac{2}{\mu} f(\mu) = \frac{2}{\mu} f_0. \quad (24)$$

Відмітимо, що рівняння (24) є подібним до рівняння (14). Таким чином, можна записати розв'язок рівняння (24)

$$f(\theta) = \frac{1}{4} \frac{f_0}{\text{sh}(2\theta)} \exp\left(\frac{2\theta}{3}\right) \quad (25)$$

Рівняння для величини  $f$  має наступний вигляд

$$-(1 - \mu^2) \frac{1}{2} \frac{f}{r} - \frac{f}{r^2} - \frac{1}{2} \mu^2 f = \frac{1}{2} d_1 f \quad (26)$$

Враховуючи вираз для величини  $f$  (16) в наближенні сильного розсіювання частинок ( $\mu \ll 1$ ), отримаємо рівняння

$$\frac{1}{3} (1 - \mu^2) \exp\left(\frac{2\theta}{3}\right) = \exp\left(\frac{2\theta}{3}\right) f(\theta) \\ \frac{1}{3} (3 - \mu^2) \frac{1}{2} \mu^2 \frac{f_0}{r} = \frac{1}{3} (3 - \mu^2) \frac{1}{2} \mu^2 \frac{f_0}{r} \quad (27)$$

В результаті отримаємо такий вираз для величини  $f$ :

$$f(\theta) = \frac{1}{6} \frac{1}{\text{sh}(2\theta/3)} \exp\left(\frac{2\theta}{3}\right) = \frac{1}{2} \frac{1}{3 - \mu^2} \frac{f_0}{r} \\ \frac{1}{24} \frac{1}{\text{sh}(2\theta/3)} \mu^2 \exp\left(\frac{2\theta}{3}\right) = \frac{3 - \mu^2}{2} \frac{3 - \mu^2}{2} \frac{1}{r} \\ \frac{1}{24} \mu^2 \frac{f_0}{r} \quad (28)$$

Запишемо рівняння для величини  $f$ :

$$-(1 - \mu^2) \frac{1}{2} \frac{f}{r} - \frac{f}{r^2} - \frac{1}{2} \mu^2 f = \frac{1}{2} d_1 f \quad (29)$$

Розв'язок цього рівняння має вигляд

$$f(\theta) = \frac{1}{72} \mu^2 \frac{1}{\text{sh}(2\theta/3)} \exp\left(\frac{2\theta}{3}\right) \\ \frac{3 - \mu^2}{2} \frac{3 - \mu^2}{2} \frac{1}{r} \frac{1}{2} \mu^2 \frac{f_0}{r} \quad (30)$$

Враховавши співвідношення (16), (25), (28), (30), можна записати вираз для анізотропної складової функції розподілу КП (12):



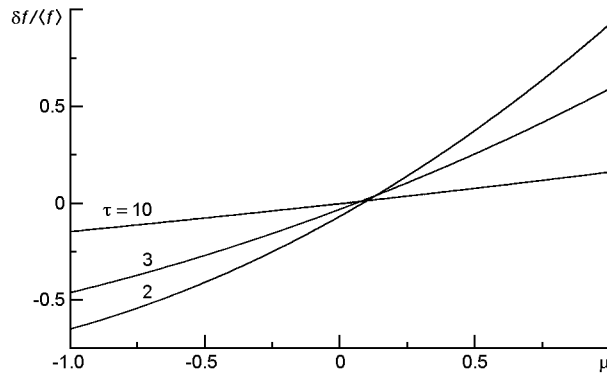


Рис. 2. Залежність функції розподілу КП  $f / \langle f \rangle$  від величини  $\mu$  в точці  $\mu = 1$  в різні моменти часу  $\tau$ . Відносний транспортний пробіг частинок  $\tau = 0.5$ , анізотропну складову функції розподілу КП визначено співвідношенням (31)

$$\begin{aligned}
 f(\mu) = & \frac{2}{\text{sh}(2\mu)} \exp\left(\frac{2\mu}{3}\right) \left[ 1 - \frac{f_0}{4} - \frac{2f_0}{4} \right] \\
 & + \frac{1}{6} \frac{1}{\text{sh}(2\mu/3)} \exp\left(\frac{2\mu}{3}\right) \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{f_0}{2} \right] \\
 & + \frac{1}{24} \frac{(4 - 3(\mu^2/3))}{\text{sh}(2\mu/3)} \exp\left(\frac{2\mu}{3}\right) \left[ 3 - \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \right] \\
 & + \frac{1}{3} \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{f_0}{3} .
 \end{aligned} \tag{31}$$

На рис. 2 наведено залежність безрозмірної величини  $f / \langle f \rangle$  від величини  $\mu$  в точці  $\mu = 1$  у різні моменти часу. Значення безрозмірного часу  $\tau$  наведено біля відповідних кривих, безрозмірний пробіг частинок  $\tau = 0.5$ . При розрахунках використано розв'язок рівняння дифузії КП (21). З часом кутовий розподіл частинок стає все більш ізотропним. Функція розподілу КП монотонно зростає при збільшенні  $\mu$ . Відмітимо, що при тих же значеннях безрозмірного часу  $\tau$  криві на рис. 2 характеризуються меншою кривиною, ніж відповідні криві на рис. 1а. Наприклад, за  $\tau = 10$  залежність функції розподілу від  $\mu$  виявляється приблизно лінійною. Отже, при даному значенні  $\tau$  в кутовому розподілі частинок домінує перша гармоніка.

### ЩІЛЬНІСТЬ ПОТОКУ КОСМІЧНИХ ПРОМЕНІВ

Поряд з величиною  $f_0$  рівняння неперервності КП (10) містить також і першу гармоніку кутового розподілу частинок. Першу гармоніку

можна обчислити на основі виразу для анізотропної складової функції розподілу КП  $f(\vec{r}, t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{d} f(\vec{r}, t) &= \frac{f_0}{3} - \frac{v^2}{3} \frac{f_0}{r^2} - \frac{4}{135} \frac{v^3}{r^3} + \frac{2}{45} \frac{v^2}{r^2} \frac{f_0}{r} - \frac{4}{135} \frac{v^3}{r^3} + \frac{2}{45} \frac{v^2}{r^2} \frac{f_0}{r}. \end{aligned} \quad (32)$$

Якщо транспортний пробіг КП не залежить від координат, то параметр  $v$  теж є постійним, і у співвідношенні (32) його можна вивести за знак похідної. Таким чином, при постійному транспортному пробігу КП отримаємо співвідношення

$$\frac{1}{d} f(\vec{r}, t) = \frac{f_0}{3} - \frac{v^2}{3} \frac{f_0}{r^2} - \frac{4}{135} \frac{v^3}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{v^2}{r^2} \frac{f_0}{r}. \quad (33)$$

Щільність потоку КП  $j(r, t)$  має вигляд [5, 11]

$$\vec{j}(r, t) = d \vec{v} f(r, t), \quad (34)$$

де інтегрування виконується по кутах вектора швидкості частинки. Абсолютна величина вектора потоку частинок дорівнює

$$j(r, t) = v d f(r, t) = 2 v d f(r, t). \quad (35)$$

Перейдемо від безрозмірних змінних  $\vec{r}, t$  (2), (3) до змінних  $r, t$ . В результаті отримаємо такий вираз для щільності потоку частинок:

$$j(r, t) = \frac{v}{3} \frac{N}{r} - \frac{v^2}{3} \frac{N}{r^2} - \frac{4}{135} v^3 \frac{1}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{v^2}{r^2} r^2 \frac{N}{r}. \quad (36)$$

Згідно з добре відомим співвідношенням

$$j(r, t) = \frac{v}{3} \frac{N}{r} \quad (37)$$

щільність потоку КП є пропорційною концентрації частинок. Відмітимо, що вираз для щільності потоку КП, який відрізняється від співвідношення (37), наведено в роботах [9, 17, 26, 27].

Другий доданок у співвідношенні (36) зумовлений неоднорідністю просторового розподілу частинок і залежністю концентрації КП від часу. Третій доданок у формулі (36) залежить від просторової неоднорідності розподілу частинок і визначається похідними вищих порядків від концентрації КП (до похідної третього порядку включно). Якщо час після інжекції частинок значно перевищує обернену частоту зіткнень, то у виразі для щільності потоку КП (36) домінує перший доданок. Таким чином, при великих значеннях безрозмірного часу формули (36) і (37) приводять до близьких значень потоку КП.

## РІВНЯННЯ ПЕРЕНОСУ КОСМІЧНИХ ПРОМЕНІВ

Вираз для щільності потоку частинок дає можливість отримати рівняння переносу космічних променів. Підставивши співвідношення (33) в рівняння неперервності (10), отримаємо таке рівняння для концентрації частинок:

$$\frac{N}{3^2} - \frac{2}{3^2} \frac{N}{3^2} - \frac{2}{3^2} \frac{N}{3^2} - \frac{4}{135^2} \frac{N}{3^2} - \frac{1}{2} \frac{N}{3^2} = 0, \quad (38)$$

де

$$\left( \frac{N}{3^2} \right) = \frac{N}{4 r_0^3} \left( \frac{N}{3^2} \right). \quad (39)$$

На основі рівняння переносу КП (38) можна отримати рівняння гіпердифузії [26, 28]. Третій і четвертий доданки у рівнянні (38) можна об'єднати, скориставшись рівнянням дифузії КП (20). В результаті отримаємо рівняння

$$\frac{N}{3^2} - \frac{2}{3^2} \frac{N}{3^2} - \frac{11}{135^2} \frac{N}{3^2} - \frac{1}{2} \frac{N}{3^2} = 0. \quad (40)$$

Виконаємо перетворення Лапласа по часу і перетворення Фур'є по координаті:

$$N(\vec{k}, \omega) = \int_0^\infty dt \int d^3x N(\vec{x}, t) \exp(i\vec{k}\vec{x} - i\omega t). \quad (41)$$

Концентрація КП залежить лише від абсолютної величини координати. В цьому випадку образ Фур'є концентрації КП має вигляд

$$N(k, \omega) = \frac{4}{k} \int_0^\infty dx \sin kx N(x, \omega). \quad (42)$$

Отримаємо вираз для образу Фур'є — Лапласа концентрації частинок, який відповідає рівнянню гіпердифузії КП (40):

$$N(k, \omega) = \frac{1}{r_0^3} \frac{1 - \frac{1}{3} k^2}{-k^2 - \frac{11}{135} k^4}. \quad (43)$$

Після виконання оберненого перетворення Лапласа співвідношення (43) [1] отримаємо

$$N(\vec{k}, t) = \frac{1}{r_0^3} \left( 1 - \frac{2}{3} k^2 \exp\left(-\frac{1}{3} k^2\right) - \frac{11}{135} k^4 \right). \quad (44)$$

При виконанні оберненого перетворення Фур'є скористаємось формулою

$$N(r, t) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k \sin kr N(k, t). \quad (45)$$

Після виконання оберненого перетворення Фур'є співвідношення (44), отримаємо такий вираз для концентрації частинок:

$$N(r, t) = \frac{1}{2\pi^2 r_0^3} \int_0^\infty dk k \sin kr \left( 1 - \frac{2}{3} k^2 \exp\left(-\frac{1}{3} k^2\right) - \frac{11}{135} k^4 \right). \quad (46)$$

В граничному випадку  $rt \gg 1$  вираз для концентрації КП (46) спрощується і набуває вигляду

$$N(r, t) = \frac{1}{8r_0^3} \left( \frac{3}{4} \right)^{3/2} \left( 1 - \frac{5}{4} \exp\left(-\frac{3}{4}\right) \right). \quad (47)$$

Отримане співвідношення відрізняється від розв'язку рівняння дифузії (21) лише наявністю множника у дужках перед експонентою. За великих значень безрозмірного часу вирази для концентрації КП (47) і (21) практично збігаються.

На рис. 3а наведено залежність концентрації частинок від часу в точці  $r = 1$  при  $t = 0.5$ . Пунктирна крива ілюструє розв'язок рівняння дифузії КП (21), а суцільна крива відповідає розв'язку рівняння гіпердифузії (46). При збільшенні безрозмірного часу криві, які відповідають рівнянням дифузії і гіпердифузії зближуються. Відмітимо, що рівняння гіпердифузії має той же недолік, що і рівняння дифузії. Швидкість поширення збурень, яка характерна для цих рівнянь, виявляється необмеженою. Так наприклад, концентрація частинок в точці  $r = 1$  виявляється відмінною від нуля навіть за умови  $t < 1$  (рис. 3а). В дійсності, частинки в точці  $r = 1$  мали б з'явитись не раніше моменту часу  $t = 1$ , а за умови  $t < 1$  концентрація КП повинна була б дорівнювати нулю.

На рис. 3б наведено часовий профіль концентрації КП у точці  $r = 1$  за більш інтенсивного розсіяння частинок ( $\alpha = 0.2$ ). Суцільна крива ілюструє розв'язок рівняння гіпердифузії (46), а точкова — розв'язок дифузійного рівняння (21). За великих значень відповідні криві практично зливаються, тобто розв'язки цих рівнянь збігаються. При інтенсивному розсіянні частинок (рис. 3б) початок зростання концентрації частинок, і момент максимального значення концентрації настають пізніше, ніж при менш інтенсивному розсіянні (рис. 4).

Для дослідження поширення СКП у міжпланетному середовищі також використовується наближення телеграфного рівняння [6, 7, 14,

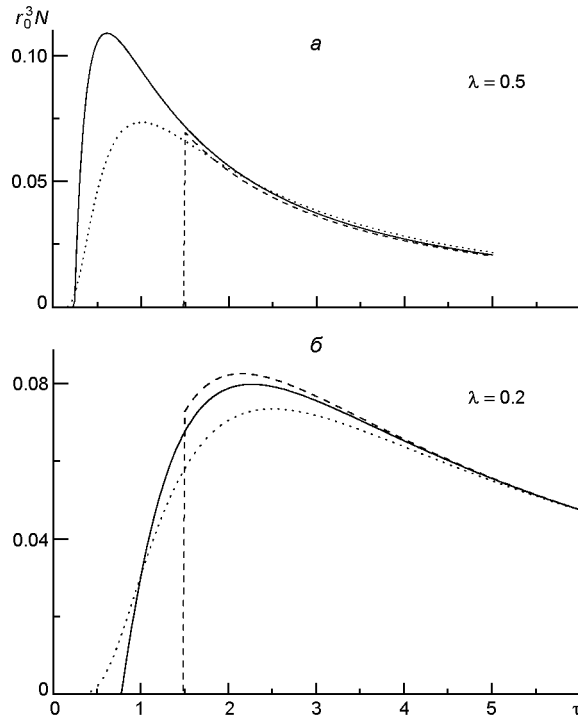


Рис. 3. Залежність концентрації частинок від часу в точці  $r = 1$ . Пунктирна крива відповідає розв'язку рівняння дифузії (21), суцільна — розв'язку рівняння гіпердифузії (46), штрихова — розв'язку телеграфного рівняння (54): *a* — для  $\lambda = 0.5$ , *б* — для  $\lambda = 0.2$

19, 20, 21]. Телеграфне рівняння для концентрації КП можна отримати на основі рівняння гіпердифузії. Користуючись рівнянням дифузії (20), останній доданок в лівій частині рівняння (40) можна змінити на другу похідну від концентрації частинок по часу. В результаті отримаємо телеграфне рівняння

$$\frac{N}{3} \frac{\partial^2 N}{\partial t^2} - \frac{N}{15} \frac{\partial^2 N}{\partial r^2} + \left( \frac{11}{15} - \frac{4}{45} \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\partial}{\partial t} \right) N = 0. \quad (48)$$

Перейдемо від безрозмірних змінних  $r, t$  до змінних  $r, t$ . Телеграфне рівняння (48) набуває наступного виду

$$\frac{\partial^2 N}{\partial t^2} - \frac{15v}{11} \frac{\partial N}{\partial t} - \frac{5}{11} v^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial N}{\partial r} - \frac{15v}{11} \frac{1}{r} \frac{\partial N}{\partial r} - \frac{4}{45r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r^2 \frac{\partial N}{\partial r} = \frac{\partial N}{\partial t}. \quad (49)$$

Дане телеграфне рівняння характеризується швидкістю поширення збурень  $v\sqrt{5/11}$ , яка виявляється меншою за швидкість частинки

[19, 21, 32]. Відмітимо, що величина швидкості «сигналу»  $v\sqrt{5/11}$  відповідає ізотропному розсіянню частинок. За анізотропного розсіяння КП швидкість поширення збурень виявляється іншою. Причому, при збільшенні анізотропії розсіяння частинок швидкість «сигналу», яка відповідає телеграфному рівнянню, зменшується [17].

Перейдемо до розв'язку телеграфного рівняння (48). Визначимо функцію  $(, )$  згідно із співвідношенням

$$N(, ) = (, ) \exp \frac{15}{22} . \tag{50}$$

Функція  $(, )$  задовольняє рівняння

$$\frac{11}{15} \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{15}{44} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{4}{45} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = 0$$

$$(, ) = \frac{11}{15} \exp \frac{15}{22} - \frac{4}{45} \frac{\partial^2}{\partial t^2} . \tag{51}$$

Виконаємо перетворення Лапласа відносно часу і перетворення Фур'є відносно координати (41). В результаті отримаємо такий вираз для образу Фур'є — Лапласа:

$$(k, ) = \frac{3}{r_0^3} \frac{1}{k^2} \frac{11}{15} \frac{4}{45} k^2 \frac{1}{5} \frac{11}{5} \frac{4}{45} \frac{1}{4} . \tag{52}$$

Спочатку виконаємо обернене перетворення Фур'є (42). Після інтегрування [3], отримаємо наступний вираз для образу Лапласа

$$(, ) = \frac{3}{4 r_0^3} \frac{13}{22} \frac{11}{15} \frac{44}{225} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \exp \sqrt{\frac{11}{5} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{15}{22} \frac{\partial}{\partial t}} . \tag{53}$$

При виконанні оберненого перетворення Лапласа використовуємо співвідношення [4]

$$\frac{1}{2 i_L} d \exp( \sqrt{\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t}} )$$

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t}}} I_1( \sqrt{\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t}} ) ( ) ( ) , \tag{54}$$

де  $(x)$  — одинична функція Хевісайда, а  $I_n(x)$  — модифікована функція Бесселя. Інтегрування у формулі (54) виконується по прямій,

яка паралельна уявній осі і розміщена у правій півплощині комплексної змінної  $\zeta$ .

Виконаємо обернене перетворення Лапласа функції (53), а для отримання виразу для концентрації частинок скористаємось формулою (50). Отримане співвідношення для концентрації КП має вигляд суми регулярної частини  $N_r$  і сингулярної частини  $N_s$

$$N(\zeta, t) = N_r(\zeta, t) + N_s(\zeta, t). \quad (55)$$

Регулярна частина концентрації частинок визначається співвідношенням

$$N_r(\zeta, t) = \frac{9\sqrt{5}}{8\sqrt{11}} r_0^3 \exp\left[-\frac{15}{22} \sqrt{\frac{11}{5}} \zeta\right] \left[ I_0\left(\frac{15}{22} \sqrt{\frac{11}{5}} \zeta\right) + I_1\left(\frac{15}{22} \sqrt{\frac{11}{5}} \zeta\right) + I_2\left(\frac{15}{22} \sqrt{\frac{11}{5}} \zeta\right) + I_3\left(\frac{15}{22} \sqrt{\frac{11}{5}} \zeta\right) \right], \quad (56)$$

де

$$I_0(x) = \sqrt{\frac{11}{5}} x^2, \quad (57)$$

$$I_1(x) = \frac{13}{22} \frac{11}{15} x^2 - \frac{44}{225} x^2, \quad (58)$$

$$I_2(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{15} x^2, \quad (59)$$

Згідно з формулою (56) в момент часу  $t=0$  величина  $N$  відмінна від нуля в області простору  $|\zeta| = \sqrt{5/11}$ . Сингулярна частина концентрації частинок має вигляд

$$N_s(\zeta, t) = \frac{3}{4} r_0^3 \exp\left[-\frac{15}{22} \sqrt{\frac{11}{5}} \zeta\right] \left[ \frac{15}{88} \sqrt{\frac{11}{5}} \zeta + \frac{11}{15} \sqrt{\frac{11}{5}} \zeta^2 - \frac{44}{225} \sqrt{\frac{11}{5}} \zeta^3 \right]. \quad (60)$$

Величина  $N$  (60) відмінна від нуля лише у точці  $|\zeta| = \sqrt{5/11}$ . В області простору  $|\zeta| < \sqrt{5/11}$  концентрація частинок (55) дорівнює нулю. Наявність сингулярного дифузійного фронту, розміщеного на границі заповненої частинками області, який поширюється з швидкістю «сигналу» (що відповідає даному рівнянню), є характерною особливістю розв'язку телеграфного рівняння [13, 16, 17, 20, 29]. При великих зна-

ченнях безрозмірного часу можна використати наближені вирази для модифікованих функцій Бесселя [1]. Таким чином, за умови  $\tau \gg 1$  на основі формули (56) отримаємо співвідношення (47).

Пунктирна крива на рис. 3а відповідає регулярній частині розв'язку телеграфного рівняння (56). Згідно з розв'язком телеграфного рівняння частинки з'являться в точці  $r = 1$  в момент часу  $t = \sqrt{11/5}$ , до цього моменту концентрація КП у цій точці дорівнює нулю. За даної інтенсивності розсіяння ( $\alpha = 0.5$ ) концентрація КП в точці  $r = 1$  монотонно зменшується з часом (рис. 3а). Часовий профіль концентрації частинок у випадку більш інтенсивного розсіяння ( $\alpha = 0.2$ ) наведено на рис. 3б. Пунктирна крива відповідає розв'язку телеграфного рівняння (56). Після прибуття перших частинок в точку  $r = 1$  їхня концентрація спочатку збільшується, досягає максимуму, а потім зменшується з часом (рис. 3б). За даних значень параметрів концентрація КП в наближенні телеграфного рівняння не сильно відрізняється від концентрації частинок, яка була обчислена на основі розв'язку рівняння гіпердифузії (пунктирні та суцільні криві на рис. 3).

#### АНІЗОТРОПІЯ КУТОВОГО РОЗПОДІЛУ ЧАСТИНОК

Розглянемо еволюцію анізотропії кутового розподілу частинок в даній точці простору. Анізотропія КП  $(\mu, \theta)$  залежить від щільності потоку частинок  $j$  (35) і концентрації КП  $N$  (19) [5, 12, 20, 34]:

$$(\mu, \theta) = 3 \frac{\int_0^1 d f(\mu, \theta, r)}{\int_0^1 d f(\mu, \theta, r)} = 3 \frac{j(\mu, \theta)}{vN(\mu, \theta)}. \quad (61)$$

Якщо щільність потоку частинок пропорційна градієнту концентрації КП (37), а концентрація КП задовольняє співвідношення (21), отримаємо відоме співвідношення для анізотропії:

$$\frac{3}{2} = \frac{3r}{2vt}. \quad (62)$$

В цьому наближенні анізотропія кутового розподілу частинок залежить тільки від координати та часу і не залежить від транспортного пробігу КП. В момент часу  $t = 3/2$  (момент прибуття перших частинок в дану точку простору)  $r = 3/2$ .

Якщо концентрація частинок задовольняє співвідношення (36), то анізотропія кутового розподілу КП має вигляд

$$(\mu, \theta) = \frac{N}{N} \frac{r^2}{N} \frac{r^2 N}{45N} - \frac{4}{2} \frac{1}{2} - r^2 \frac{N}{N}. \quad (63)$$



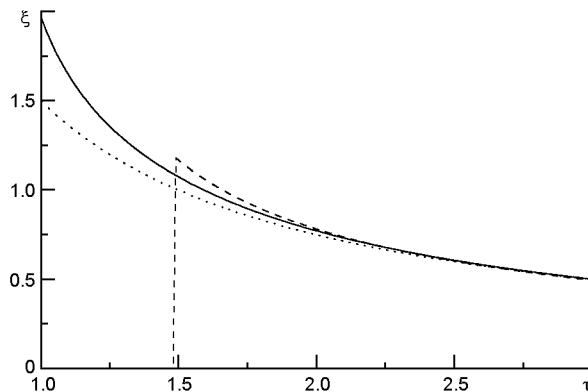


Рис. 4. Залежність анізотропії КП від часу в точці  $\theta = 1$ . Пунктирна крива відповідає розв'язку рівняння дифузії, суцільна крива — рівнянню гіпердифузії, штрихова крива — телеграфному рівнянню

На рис. 4 наведено залежність анізотропії КП від часу в точці  $\theta = 1$ . Параметр, який характеризує інтенсивність розсіяння  $\beta = 0.2$ . Точкова крива відповідає дифузійному наближенню (62). Суцільна крива ілюструє залежність від часу анізотропії КП (63), яка була обчислена на основі розв'язку рівняння гіпердифузії (46). Пунктирна крива відповідає розв'язку телеграфного рівняння (56). Анізотропія КП виявляється максимальною в момент прибуття перших частинок, а потім монотонно зменшується з часом. Якщо параметр  $\beta = 0.2$ , величина анізотропії КП, яка обчислена на основі розв'язку рівняння гіпердифузії (46), в момент часу  $\tau = 1$  виявляється близьким до двох (рис. 4). За великих значень безрозмірного часу величина добре узгоджується з формулою (62) (рис. 4).

## ВИСНОВКИ

На основі кінетичного рівняння Фоккера — Планка розглянуто поширення сонячних космічних променів у міжпланетному середовищі. В наближенні малої анізотропії кутового розподілу КП отримано аналітичний вираз для анізотропної компоненти функції розподілу частинок, яка визначається залежністю концентрації КП від просторової координати і часу. Показано, що за ізотропного розсіяння космічних променів на флуктуаціях міжпланетного магнітного поля функція розподілу частинок залежить від косинусу кута між швидкістю і радіальним напрямком по експоненційному закону.

Отримано співвідношення для щільності потоку КП. Показано, що величина щільності потоку частинок визначається просторовим градієнтом їхньої концентрації, змішаною похідною концентрації КП по просторовій координаті і часу та просторовими похідними кон-

центрації КП вищих порядків. Отримані рівняння переносу КП у міжпланетному середовищі. Наведено розв'язки рівняння гіпердифузії КП і телеграфного рівняння. Показано, що при великих значеннях безрозмірного часу отримані розв'язки цих рівнянь збігаються. На основі отриманих рівнянь переносу КП досліджено часові профілі інтенсивності СКП і анізотропії кутового розподілу частинок.

1. Абрамовиц М., Стиган И. *Справочник по специальным функциям*. М. Наука, 1979. 832 с.
2. Гальперин Б. А., Топтыгин И. Н., Фрадкин А. А. Рассеяние частиц магнитными неоднородностями в сильном магнитном поле. *ЖЭТФ*. 1971. 60, № 3. С. 972.
3. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. *Интегралы и ряды*. М. Наука. 1981. 800 с.
4. Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И. *Лекции по теории функций комплексного переменного*. М. Наука. 1976. 407 с.
5. Топтыгин И. Н. *Космические лучи в межпланетных магнитных полях*. М. Наука, 1983. 304 с.
6. Шишов В. И. О распространении высокоэнергичных солнечных протонов в межпланетном магнитном поле. *Геомагнетизм и аэрономия*. 1966. 6. С. 223.
7. Axford W. I. Anisotropic diffusion of solar cosmic rays. *Planet. Space Sci.* 1965. 13. P. 1301—1309.
8. Beeck J., Wibberenz G. Pitch angle distributions of solar energetic particles and the local scattering properties of the interplanetary medium. *Astrophys. J.* 1986. 311. P. 437.
9. Bieber J. W., Burger R. A. Cosmic-ray streaming in the Born approximation. *Astrophys. J.* 1990. 348. P. 597—607.
10. Bieber J. W., Evenson P. A., Pomerantz M. A. Focusing anisotropy of solar cosmic rays. *J. Geophys. Res.* 1986. 91, № A8. P. 8713.
11. Dorman L. I., Katz M. E. Cosmic ray kinetics in space. *Space Sci. Rev.* 1977. 70. P. 529—575.
12. Droge W., Kartavych Y. Y., Klecker B., Kovaltsov G. A. Anisotropic three-dimensional focused transport of solar energetic particles in the inner heliosphere. *Astrophys. J.* 2010. 709. P. 912—919.
13. Dunkel J., Talkner P., Hanggi P. Relativistic diffusion processes and random walk models. *Phys. Rev. D.* 2007. 75: 043001.
14. Earl J. A. Diffusion of charged particles in a random magnetic field. *Astrophys. J.* 1973. 180. P. 227—238.
15. Earl J. A. Analytical description of charged particle transport along arbitrary guiding field configurations. *Astrophys. J.* 1981. 251. P. 739.
16. Effenberger F., Litvinenko Y. The diffusion approximation versus the telegraph equation for modeling solar energetic particle transport with adiabatic focusing. Isotropic pitch angle scattering. *Astrophys. J.* 2014. 783 :15 (7 p).
17. Fedorov Yu. I. Cosmic ray distribution function under anisotropic particle scattering on magnetic field fluctuations. *Kinematics Phys. Celestial Bodies.* 2019. 35, № 1. P. 1—16.
18. Fedorov Yu. I. Solar cosmic ray distribution function under prolonged particle injection. *Kinematics Phys. Celestial Bodies.* 2019. 35, № 5. P. 203—216.
19. Fedorov Yu. I., Shakhov B. A. Description of non-diffusive solar cosmic ray propagation in a homogeneous regular magnetic field. *Astron. and Astrophys.* 2003. 402, № 3. P. 805—817.

20. Fisk L. A., Axford W. I. Anisotropies of solar cosmic rays. *Solar Phys.* 1969. 7. P. 486—498.
21. Gombosi T. J., Jokipii J. R., Kota J., et al. The telegraph equation in charged particle transport. *Astrophys. J.* 1993. 403. P. 377.
22. Hasselmann K., Wibberenz G. Scattering charged particles by random electromagnetic fields. *Z. Geophys.* 1968. 34. P. 353.
23. Hasselmann K., Wibberenz G. A note of the parallel diffusion coefficient. *Astrophys. J.* 1970. 162. P. 1049.
24. Jokipii J. R. Propagation of cosmic rays in the solar wind. *Rev. Geophys. Space Phys.* 1971. 9, № 1. P. 27—87.
25. Kunstmann J. E. A new transport mode for energetic charged particles in magnetic fluctuations superposed on a diverging mean field. *Astrophys. J.* 1979. 229. P. 812.
26. Litvinenko Y. E., Noble P. I. Comparison of the telegraph and hyperdiffusion approximations in cosmic ray transport. *Phys. Plasmas.* 2016. 23. 062901 (8 p).
27. Litvinenko Y. E., Schlickeiser R. The telegraph equation for cosmic-ray transport with weak adiabatic focusing. *Astron. and Astrophys.* 2013. 554. A59 (7 p).
28. Malkov M. A., Sagdeev R. Z. Cosmic ray transport with magnetic focusing and the «telegraph» model. *Astrophys. J.* 2015. 808. P. 157.
29. Masoliver J., Weiss G. H. Finite-velocity diffusion. *Eur. J. Phys.* 1996. 17. P. 190—196.
30. Miroshnichenko L. I., Perez-Peraza J. A. Astrophysical aspects in the studies of solar cosmic rays. *Int. J. Modern Phys.* 2008. 23, № 1. P. 1.
31. Moraal H., McCracken K. G. The time structure of ground level enhancement in solar cycle 23. *Space Sci. Rev.* 2012. 171. P. 85—95.
32. Schwadron N. A., Gombosi T. I. A unifying comparison of nearly scatter free transport model. *J. Geophys. Res.* 1994. 99, № A10. P. 19301.
33. Vashenyuk E. V., Balabin Yu. V., Perez-Peraza, et al. Some features of the sources of relativistic particles at the Sun in the solar cycles 21-23. *Adv. Space Res.* 2006. 38. P. 411—418.
34. Volk H. J. Cosmic ray propagation in interplanetary space. *Rev. Geophys. Space Phys.* 1975. 13, № 4. P. 547—566.

## REFERENCES

1. Abramovitz M., Stegun I. (1979) *Reference book on special functions*. M.: Science. 832. (in Russian).
2. Galperin B. A., Toptygin I. N., Fradkin A. A. (1971) Rasseynaniye chastits magnitnymi neodnorodnostyami v sil'nom magnitnom pole. *Zhurnal Eksperimentalnoi i Teoreticheskoi Fiziki.* 60(3). 972 (in Russian).
3. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. (1981) *Integrals i ryady*. M.: Nauka. 800. (in Russian).
4. Sidorov Yu. V., Fedoryuk M. V., Shabunin M. I. (1976) *Lekcii po teorii funkciy kompleksnogo peremennogo*. M. Nauka. 407. (in Russian).
5. Toptygin I. N. (1983) *Kosmicheskiye luchi v mezhplanetnykh magnitnykh polyakh*. M.: Nauka. 304. (in Russian).
6. Shishov V. I. (1966) O rasprostraneniі vysokoenergiichnykh solnechnykh protonov v mezhplanetnom magnitnom pole. *Geomagnetism and Aeronomy.* 6. 223. (in Russian).
7. Axford W. I. (1965) Anisotropic diffusion of solar cosmic rays. *Planet. Space Sci.* 13. 1301—1309.

8. Beeck J., Wibberenz G. (1986) Pitch angle distributions of solar energetic particles and the local scattering properties of the interplanetary medium. *Astrophys. J.* 311. 437.
9. Bieber J. W., Burger R. A. (1990) Cosmic-ray streaming in the Born approximation. *Astrophys. J.* 348. 597—607.
10. Bieber J. W., Evenson P. A., Pomerantz M. A. (1986) Focusing anisotropy of solar cosmic rays. *J. Geophys. Res.* 91(NA8). 8713.
11. Dorman L. I., Katz M. E. (1977) Cosmic ray kinetics in space. *Space Sci. Rev.* 70. 529—575.
12. Droge W., Kartavych Y. Y., Klecker B., Kovaltsov G. A. (2010) Anisotropic three-dimensional focused transport of solar energetic particles in the inner heliosphere. *Astrophys. J.* 709. 912—919.
13. Dunkel J., Talkner P., Hanggi P. (2007) Relativistic diffusion processes and random walk models. *Phys. Rev. D.* 75: 043001.
14. Earl J. A. (1973) Diffusion of charged particles in a random magnetic field. *Astrophys. J.* 180. 227—238.
15. Earl J. A. (1981) Analytical description of charged particle transport along arbitrary guiding field configurations. *Astrophys. J.* 251. 739.
16. Effenberger F., Litvinenko Y. (2014) The diffusion approximation versus the telegraph equation for modeling solar energetic particle transport with adiabatic focusing. Isotropic pitch angle scattering. *Astrophys. J.* 783 :15 (7).
17. Fedorov Yu. I. (2019) Cosmic ray distribution function under anisotropic particle scattering on magnetic field fluctuations. *Kinematics Phys. Celestial Bodies.* 35(1). 1—16.
18. Fedorov Yu. I. (2019) Solar cosmic ray distribution function under prolonged particle injection. *Kinematics Phys. Celestial Bodies.* 35(5). 203—216.
19. Fedorov Yu. I., Shakhov B. A. (2003) Description of non-diffusive solar cosmic ray propagation in a homogeneous regular magnetic field. *Astron. and Astrophys.* 402(3). P. 805—817.
20. Fisk L. A., Axford W. I. (1969) Anisotropies of solar cosmic rays. *Solar Phys.* 7. 486—498.
21. Gombosi T. J., Jokipii J. R., Kota J., et al. (1993) The telegraph equation in charged particle transport. *Astrophys. J.* 403. 377.
22. Hasselmann K., Wibberenz G. (1968) Scattering charged particles by random electromagnetic fields. *Z. Geophys.* 34. 353.
23. Hasselmann K., Wibberenz G. (1970) A note of the parallel diffusion coefficient. *Astrophys. J.* 162. 1049.
24. Jokipii J. R. (1971) Propagation of cosmic rays in the solar wind. *Rev. Geophys. Space Phys.* 9(1). 27—87.
25. Kunstmann J. E. (1979) A new transport mode for energetic charged particles in magnetic fluctuations superposed on a diverging mean field. *Astrophys. J.* 229. 812.
26. Litvinenko Y. E., Noble P. I. (2016) Comparison of the telegraph and hyperdiffusion approximations in cosmic ray transport. *Phys. Plasmas.* 23. 062901 (8).
27. Litvinenko Y. E., Schlickeiser R. (2013) The telegraph equation for cosmic-ray transport with weak adiabatic focusing. *Astron. and Astrophys.* 554. A59 (7).
28. Malkov M. A., Sagdeev R. Z. (2015) Cosmic ray transport with magnetic focusing and the «telegraph» model. *Astrophys. J.* 808. 157.
29. Masoliver J., Weiss G. H. (1996) Finite-velocity diffusion. *Eur. J. Phys.* 17. 190—196.
30. Miroshnichenko L. I., Perez-Peraza J. A. (2008) Astrophysical aspects in the studies of solar cosmic rays. *Int. J. Modern Phys.* 23(1). 1.

31. Moraal H., McCracken K. G. (2012) The time structure of ground level enhancement in solar cycle 23. *Space Sci. Rev.* 171. 85—95.
32. Schwadron N. A., Gombosi T. I. (1994) A unifying comparison of nearly scatter free transport model. *J. Geophys. Res.* 99(A10). 19301.
33. Vashenyuk E. V., Balabin Yu. V., Perez-Peraza J., et al. (2006) Some features of the sources of relativistic particles at the Sun in the solar cycles 21-23. *Adv. Space Res.* 38. 411—418.
34. Volk H. J. (1975) Cosmic ray propagation in interplanetary space. *Rev. Geophys. Space Phys.* 13(4). 547—566.

*Yu. I. Fedorov*

Main Astronomical Observatory of the National Academy of Sciences of Ukraine,  
Kyiv, Ukraine

#### COSMIC RAY STREAMING IN THE DIFFUSION APPROXIMATION

The propagation of cosmic rays in the interplanetary medium is considered based on the kinetic Fokker-Planck equation. The analytical expression for anisotropic part of cosmic ray distribution function is derived in the approximation of the small anisotropy. It is shown that under isotropic scattering of energetic charged particles on interplanetary magnetic field fluctuations the cosmic ray distribution function depends exponentially on the cosine of the angle between particle velocity and radial direction. The expression for the cosmic ray streaming density is obtained. It is shown that the value of the particle streaming density is defined by the spatial distribution of the cosmic ray density and by the temporal dependence of the particle density. The cosmic ray transport equations have been derived (the hyperdiffusion equation and the telegraph equation). On the basis of these equations the spatio-temporal distribution of solar cosmic ray intensity and the anisotropy of the particle angular distribution are investigated.

**Key words:** cosmic rays, kinetic equation, transport equation, interplanetary medium.

Стаття надійшла до редакції 14.12.2020

Після доопрацювання 14.12.2020

Прийнята до друку 12.02.2021