

doi: <https://doi.org/10.15407/kfnt2020.06.022>

УДК 551.511.31; 534.015.1

Є. І. Крючков, І. Т. Жук, О. К. Черемних

Інститут космічних досліджень Національної академії наук України
та Державного космічного агентства України
03187, м. Київ-187, Просп. Академіка Глушкова, 40, к. 4/1
john_k@i.ua, kryuchkov.ye@gmail.com,
zhukigor@gmail.com, oleg.cheremnykh@gmail.com

Двочастотні акустико-гравітаційні хвилі, моделювання супутникових вимірювань

Теорія акустико-гравітаційних хвиль (АГХ) розглядає вільні хвильові збурення атмосфери в рамках одночастотного підходу. При цьому з теорії випливає можливість виникнення двох окремих типів хвиль з різними власними частотами — акустичних і гравітаційних. У одночастотному підході хвильові флуктуації щільності, температури, швидкості пов'язані між собою через спектральні характеристики хвилі, причому ці зв'язки є незмінними. Однак супутникові спостереження параметрів АГХ не завжди можна пояснити в рамках одночастотного підходу. У даній роботі представлено двочастотний підхід до дослідження АГХ за допомогою моделі двох зв'язаних осциляторів. Показано, що збурені рухи елементарного об'єму середовища відбуваються одночасно на двох власних частотах. У цьому випадку зв'язок між хвильовими флуктуаціями параметрів визначається початковими умовами, які можуть бути довільними. Отримано рішення в дійсних функціях для ізотермічної атмосфери. Досліджено умови, при яких із загального двочастотного розв'язку випливають розв'язки одночастотних АГХ. Чисельно змодельовано вимірювані з супутника хвильові форми АГХ для швидкостей і зміщень в одночастотному і двочастотному режимах. Результати моделювання двочастотних АГХ узгоджуються з даними супутникових вимірювань. Двочастотні АГХ не завжди реалізуються на двох різних частотах. Показано, що при зближенні частот реалізується ефект биття, і дві близькі моди стають нерозрізнюваними. При однаковій довжині хвилі у них однакові середні частоти і однакові фазові швидкості. Головна особливість двочастотного підходу до вивчення АГХ полягає в розширенні зв'язків між хвильовими параметрами середовища. Це дозволяє досягти задовільного узгодження модельних хвильових форм з даними

спутникових вимірювань. Таким чином, використання двочастотного розгляду АГХ відкриває нові можливості в інтерпретації експериментальних даних.

Ключові слова: акустико-гравітаційна хвиля, зв'язані осцилятори, власні частоти

1. ВСТУП

Вивчення акустико-гравітаційних хвиль (АГХ) продовжується з середини минулого століття. В результаті багаторічних теоретичних і експериментальних досліджень було встановлено, що АГХ значною мірою визначають динаміку і енергетичний баланс атмосфер Сонця, Землі та інших планет. Їхня важлива роль у зазначених процесах пов'язана з перенесенням енергії та імпульсу як у горизонтальній площині, так і між різними висотами атмосфери [7, 11, 14, 15, 18].

Вільні власні хвильові збурення атмосфери зазвичай розглядаються в рамках одночастотного підходу. Цей підхід передбачає, що є два види незалежних хвиль — акустичні та гравітаційні, які поширюються з різними частотами. АГХ спостерігаються у вигляді флуктуацій різних параметрів середовища (щільності, тиску, температури, швидкості) [11, 13]. У одночастотному підході ці флуктуації пов'язані амплітудно-фазовими співвідношеннями, залежними від спектральних характеристик (частоти і довжини хвилі). Ці зв'язки незмінні протягом всього коливального процесу. Однак експериментальні спостереження флуктуацій різних параметрів не завжди можна пояснити в рамках одночастотного підходу.

У недавніх роботах [5, 9] для опису вільно поширюваних АГХ був запропонований двочастотний підхід, який передбачає, що власні хвильові збурення атмосфери реалізуються одночасно на двох частотах. У цих роботах припускалося, що до певного моменту часу система перебувала в рівновазі, а потім відбувається її збурення, що призводить до виникнення хвиль. При цьому дві складові зміщення і дві складові збуреної швидкості у момент збурення середовища повинні задовольняти конкретні початкові умови. Хвильові форми в цих роботах аналізувалися в залежності від часу. Було показано, що результуюче коливання може бути негармонійним. У разі зближення частот виникають биття і реалізується одна частота наповнення.

У даній роботі розглянуто іншу модель двочастотних АГХ. Передбачається, що у середовищі вже наявні хвильові збурення. Як у типовій осциляторній моделі, для їхнього опису потрібно вибрати чотири початкових умови — два зміщення і дві швидкості у певний момент часу у фіксованій точці простору. Цей вибір дозволяє змодельовувати поведінку АГХ у просторі в наступні моменти часу. Хвильові форми моделювалися в залежності від координати вздовж траєкторії супутника. Це може бути корисно для інтерпретації супутникових

спостережень хвильових збурень в атмосфері. Результати моделювання двочастотних АГХ узгоджуються з реальними супутниковими вимірюваннями.

2. МОДЕЛЬ АГХ НА ОСНОВІ ДВОХ ЗВ'ЯЗАНИХ ОСЦИЛЯТОРІВ

Дослідимо малі збурення у вертикально стратифікованій атмосфері у полі сили тяжіння. Вважаємо атмосферу стисливою, бездисипативною, нерухомою і однорідною в горизонтальній площині. Використовуємо прямокутну систему координат (x, y, z) , де вертикальна вісь z спрямована вгору, а прискорення вільного падіння \mathbf{g} напрямлене вниз. Нас будуть цікавити збурення з довжиною хвилі, значно меншою за радіус Землі, тому впливом кривизни поверхні Землі на збурення знехтуємо.

Залучимо для дослідження АГХ теорію коливних систем. Для цього розглянемо хвильові рухи елементарного об'єму середовища відносно його положення рівноваги. Його зміщення по координатах x і z позначимо h_x, h_z . Залежність від координати у вилучимо відповідним поворотом системи координат навколо осі z так, щоб вісь x було спрямовано вздовж горизонтального зміщення об'єму. Внаслідок цього збурені рухи об'єму відбуваються у площині (x, z) по двох ступенях свободи. У такій моделі АГХ описуються відомими рівняннями [16]

$$\frac{\partial^2 h_x}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} C_s^2 \frac{\partial h_x}{\partial x} - \frac{\partial h_z}{\partial z} - g \frac{\partial h_z}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 h_z}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial z} C_s^2 \frac{\partial h_x}{\partial x} - \frac{\partial h_z}{\partial z} - g \frac{\partial h_x}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

де $\rho(z)$ — щільність середовища, C_s — швидкість звуку.

Покажемо, що систему (1), (2) можна розглянути як двовимірний гармонічний осцилятор, що описується класичною системою двох лінійних рівнянь з постійними коефіцієнтами вигляду [1, 2]

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) h_x - \frac{\partial h_z}{\partial z} = 0, \quad (3)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) h_z - \frac{\partial h_x}{\partial x} = 0, \quad (4)$$

тут ω_x, ω_z — парціальні частоти, ω_z, ω_x — коефіцієнти зв'язку. Один ступінь свободи об'єму, що коливається, відповідає горизонтальному осцилятору, а другий — вертикальному.

Для приведення виразів (1), (2) до вигляду (3), (4) зробимо ряд припущень. Розглядаємо термосферу, де $(1/\rho)(\partial\rho/\partial z) = -1/H = \text{const}$ (тут H — висота однорідної атмосфери). Приймемо, що зміщення h_x, h_z змінюються в часі та вздовж координати x за гармонічним законом:

$$h_x = h_x(z) \exp(i\omega t - ik_x x), \quad h_z = h_z(z) \exp(i\omega t - ik_x x), \quad (5)$$

де ω — частота, а k_x — горизонтальна складова хвильового вектора.

Залежності $h_{x,z}(z)$ від координати z не конкретизуємо. Рівняння (1), з урахуванням (5), легко перетворюється у форму (3), оскільки частота ω_x визначається відразу. Для знаходження частоти ω_z використовуємо у рівнянні (2) вираз для похідної h_z / z , знайденої з рівняння (1). Врахуємо також рівності $C_s^2 = gH, N^2 = g^2(1)/C_s^2$, де g — показник адиабати, N — частота Брента — Вайсяля (БВ). В результаті з системи (1), (2) отримуємо

$$(\omega^2 - C_s^2 k_x^2)h_x - C_s^2 \frac{\omega}{\omega_x} \frac{\omega}{\omega_z} \frac{1}{H} h_z = 0, \quad (6)$$

$$(\omega^2 - N^2)h_z - \frac{\omega^2}{k_x^2} \frac{\omega}{\omega_x} \frac{\omega}{\omega_z} \frac{1}{H} h_x = 0, \quad (7)$$

що відповідає відомому виду (3), (4). Як видно з рівнянь (6), (7), при певних залежностях $h_x(z), h_z(z)$ зникають зв'язки між осциляторами, тому що стає $\omega_x = 0, \omega_z = 0$. В цьому випадку система (6), (7) розпадається на дві окремі хвилі на двох різних частотах. Горизонтальному парціальному осцилятору відповідає мода Лемба (8), а вертикальному — хвиля на частоті БВ (9):

$$\omega_x = \omega_x, \quad C_s k_x, \quad h_x(z) = h_{x0} \exp[(1 - \omega_x^2)z / (H)], \quad (8)$$

$$\omega_z = \omega_z, \quad N, \quad h_z(z) = h_{z0} \exp[z / (H)]. \quad (9)$$

Розв'язки (8), (9) відповідають горизонтальним модам [8, 17]. Якщо зв'язок між осциляторами пропадає тільки в одному з рівнянь (6), (7), то реалізується резонансна мода з виділеною частотою і довжиною хвилі [6].

Випадку $\omega_x = 0, \omega_z = 0$ відповідають так звані вільно поширювані АГХ, які ми далі будемо розглядати. Для таких АГХ розв'язки (5) зазвичай представляють у вигляді плоских хвиль [11]

$$h_x = h_{x0} \exp(z / (2H)) \exp(i \phi), \quad (10)$$

$$h_z = h_{z0} \exp(z / (2H)) \exp(i \phi),$$

$$t = k_x x + k_z z,$$

де ϕ — фаза, а k_z — вертикальна складова хвильового вектора.

Підстановка цих рішень у диференціальні рівняння руху (6), (7) приводить їх до алгебраїчної форми (3), (4):

$$(\omega^2 - C_s^2 k_x^2)h_x - C_s^2 k_x (k_z + i / H)h_z = 0, \quad (11)$$

$$(\omega^2 - N^2)h_z - (\omega^2 / k_x)(k_z + i / H)h_x = 0, \quad (12)$$

де $\omega = 1/2$. Кожне з цих рівнянь задає амплітудно-фазовий зв'язок між складовими зміщень. Оскільки для складових швидкостей справедливо $V_x = i h_x, V_z = i h_z$, з (11) випливає

$$\frac{h_x}{h_z} = \frac{V_x}{V_z} = \frac{h_{x0}}{h_{z0}} = \frac{V_{x0}}{V_{z0}} = \frac{k_z + i / H}{k_x [1 - \omega^2 / (C_s^2 k_x^2)]}. \quad (13)$$

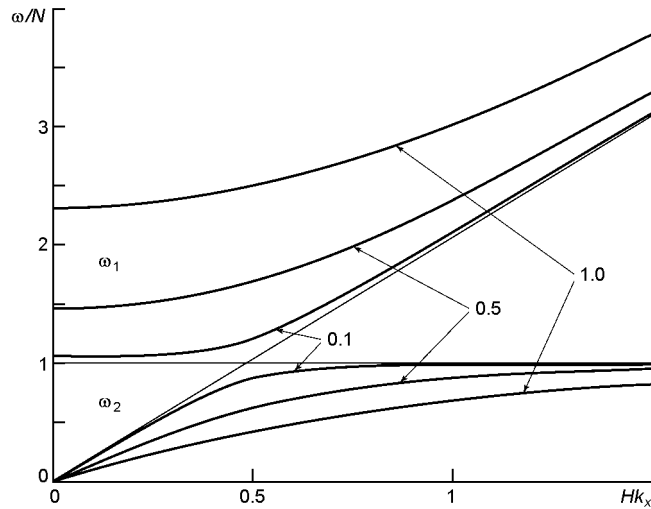


Рис. 1. Залежності власних частот ω_1, ω_2 від Hk_x при $Hk_z = 0.1, 0.5, 1$. Прямими тонкими лініями показані парціальні частоти: $\omega_x = C_s k_x, \omega_z = N$

З (12) випливає

$$\frac{h_x}{h_z} \frac{V_x}{V_z} = \frac{h_{x0}}{h_{z0}} \frac{V_{x0}}{V_{z0}} k_x \frac{N^2}{2} \left(1 - \frac{k_z^2}{k_z^2 + N^2/H^2} \right). \quad (14)$$

Прирівнюючи вирази (13) і (14), отримуємо дисперсійне рівняння АГХ:

$$\frac{N^2}{2} \left(1 - \frac{k_z^2}{k_z^2 + N^2/H^2} \right) = \frac{h_{x0}}{h_{z0}} \frac{V_{x0}}{V_{z0}} k_x^2 \frac{N^2}{2} \left(1 - \frac{k_z^2}{k_z^2 + N^2/H^2} \right),$$

яке є квадратним рівнянням відносно змінної k_x^2 . Воно має два розв'язки: $k_x^2 = k_{x1}^2$ і $k_x^2 = k_{x2}^2$. На рис. 1 показано дисперсійні криві вільних АГХ у безрозмірних величинах при різних значеннях Hk_z . Частоту $\omega_1 > N$ називають акустичною, а частоту $\omega_2 < N$ — гравітаційною. Частоти ω_1 і ω_2 не збігаються з парціальними і називаються власними, або нормальними частотами системи. З (3), (4) і (11), (12) випливає, що величина k_z визначає коефіцієнт зв'язку між двома ступенями свободи рухомого об'єму газу. Для вільних АГХ, що поширюються під кутом до горизонту, k_z є дійсною величиною. Відзначимо, що криві на рис. 1 відповідають графікам Віна у зв'язаних коливальних системах. В теорії коливальних систем такі графіки наочно демонструють залежності між частотами системи і коефіцієнтом зв'язку [2].

Амплітудно-фазовий зв'язок h_x/h_z або V_x/V_z для одночастотної АГХ з частотою ω_1 отримаємо, підставивши в (13) або (14) величину $k_x^2 = k_{x1}^2$. Аналогічно, для одночастотної АГХ з частотою ω_2 у ці вирази потрібно підставити $k_x^2 = k_{x2}^2$. Цими двома способами можуть бути реалізовані АГХ з однією власною частотою. Зв'язки (13), (14) є фіксованими і не змінюються протягом всього коливального процесу.

Згідно з теорією коливань для лінійних рівнянь (3), (4) чи (11), (12) загальним розв'язком є суперпозиція двох незалежних власних коливань, що відбуваються одночасно [1]. Отже, при одній довжині хвилі спільний розв'язок АГХ є суперпозицією двох коливань на двох власних частотах. Будемо називати це двочастотною АГХ. Амплітудно-фазові зв'язки в таких АГХ визначаються не виразами (13), (14), а початковими умовами, відповідно до загальних принципів теорії коливань [1, 2]. Спеціальним вибором цих початкових умов з двочастотної можна отримати одночастотну АГХ на частоті ω_1 або ω_2 , що буде показано в наступному розділі.

Проаналізуємо рис. 1 з позицій теорії зв'язаних коливань. Як видно з (11), (12), зі збільшенням k_z збільшується зв'язок між осциляторами, що призводить до збільшення відстані між власними та парціальними частотами. При цьому, виходячи з (13), (14), в одночастотних АГХ зменшуються зсуви фаз між коливаннями h_x і h_z , V_x і V_z .

Більш цікава ситуація складається з квазігоризонтальними АГХ при $Hk_z < 1$ (див. криві при $Hk_z = 0.1$). Виходячи з виразів (13), (14), зі зменшенням k_z в одночастотних АГХ зсуви фаз між коливаннями h_x і h_z , V_x і V_z прямують до $\pi/2$.

В областях малих і великих Hk_x відбувається зближення частот ω_1 , ω_2 з парціальними, і водночас ці частоти ω_1 , ω_2 розходяться між собою. Осцилятори стають слабо пов'язаними. З (13) випливає, що при

$C_s k_x$ переважають амплітуди горизонтальних коливань $h_x \gg h_z$, $V_x \gg V_z$. Виходячи з виразу (14), при N переважають амплітуди вертикальних коливань $h_z \gg h_x$, $V_z \gg V_x$. Так відбувається в одночастотних АГХ. У двочастотних АГХ це призведе до ефекту «розділення частот»: коливання h_x , V_x відбуваються в основному на частоті $C_s k_x$, а коливання h_z , V_z — на частоті N .

В області $Hk_x \approx 0.5$ частоти ω_1 , ω_2 відходять від парціальних (відновлюється зв'язок між осциляторами), і водночас вони наближаються одна до одної. В результаті цього настає ефект «злиття частот», або «биття». У двочастотних АГХ буде спостерігатися одна середня частота. Ефекти «розділення» і «злиття» частот є ознаками двочастотних АГХ, що також показано у роботах [5, 9].

3. РОЗВ'ЯЗКИ АГХ У ДІЙСНІЙ ФОРМІ

Використане у попередньому розділі комплексне представлення гармонічно змінних в часі і у просторі сигналів істотно спростило розв'язування диференціальних рівнянь. Однак моделювання хвильових форм АГХ спрощується, якщо розв'язки задано в дійсних функціях. Далі ми отримуємо дійсні розв'язки АГХ.

Одночастотні АГХ. Розв’язок системи (6), (7) задамо спочатку в загальному дійсному вигляді:

$$h_z = \exp(z/2H)[A \cos \varphi + B \sin \varphi], \quad (15)$$

$$h_x = \exp(z/2H)[C \cos \varphi + D \sin \varphi], \quad (16)$$

де фаза $\varphi = t - k_x x - k_z z$, а A, B, C і D — довільні сталі величини. Ці сталі в загальному випадку визначаються з чотирьох початкових умов — два зміщення і дві швидкості у початковий момент часу [1, 2]. Але оскільки в одночастотних АГХ на зміщення і швидкості накладено зв’язки (13), (14), то з чотирьох сталих незалежними можуть бути тільки дві. Справді, підстановка виразів (15), (16) в (6) дає

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= [(k_x^2 - C_s^2 k_x^2)C + Bgk_x(\varphi/2 - 1) - AC_s^2 k_x k_z] \\ \sin \varphi &= [(k_x^2 - C_s^2 k_x^2)D - Agk_x(\varphi/2 - 1) - BC_s^2 k_x k_z] = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

При довільній фазі рівняння (17) виконується тільки при одночасному перетворенні в нуль обох виразів у квадратних дужках, що призводить до співвідношень

$$C = A, \quad B, D = B = A, \quad (18)$$

де позначено

$$\frac{k_z}{k_x - 1} = \frac{C_s^2 k_x^2}{2}, \quad \frac{Hk_x - 1}{C_s^2 k_x^2} = \frac{2}{Hk_x - 1}. \quad (19)$$

З (18) випливає, що розв’язок (16) для зміщення h_x можна записати у вигляді

$$h_x = \exp(z/2H)[(A \cos \varphi + B \sin \varphi) + (B \cos \varphi + A \sin \varphi)]. \quad (20)$$

Продиференціювавши по часу вирази (15) і (20), отримаємо вирази для швидкостей V_z і V_x . Нескладно показати, що зміщення і швидкості зв’язані співвідношеннями

$$\frac{h_x}{V_x} = \frac{h_z}{V_z} = \frac{V_z}{h_z}, \quad (21)$$

У одночастотному режимі для акустичних хвиль у вирази (19) і (21) підставляється значення $\varphi = \varphi_1$, а для гравітаційних хвиль — значення $\varphi = \varphi_2$. Зауважимо, що співвідношення (21) і комплексні співвідношення (13), (14) еквівалентні. Справді, якщо (13) подати у вигляді $h_x = h_z + i h_z, V_x = V_z + i V_z$ і врахувати, що $V_z = i h_z$, отримаємо вирази (21).

У одночастотних АГХ у будь-який момент часу і в довільній точці простору повинні виконуватися співвідношення (21) між миттєвими значеннями зміщень і швидкостей. Тому довільними тут можуть бути тільки дві величини, припустімо зміщення. Тоді отримані в цей же мо-

мент часу два значення швидкостей повинні задовольняти співвідношення (21).

Двочастотні АГХ. З урахуванням (15) і (20) спільний розв'язок рівнянь (6), (7) має вигляд

$$\begin{aligned}
 h_x &= \exp(z/2H) [\cos \varphi_1 (A_1 \cos \varphi_1 + B_1 \sin \varphi_1) + \sin \varphi_1 (B_1 \cos \varphi_1 - A_1 \sin \varphi_1)] \\
 &+ \exp(z/2H) [\cos \varphi_2 (A_2 \cos \varphi_2 + B_2 \sin \varphi_2) + \sin \varphi_2 (B_2 \cos \varphi_2 - A_2 \sin \varphi_2)], \\
 h_z &= \exp(z/2H) [A_1 \cos \varphi_1 + B_1 \sin \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2 + B_2 \sin \varphi_2].
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

Тут величини $\varphi_{1,2}$, $\varphi_{1,2}$, $\varphi_{1,2}$ визначаються, відповідно, при підстановці частоти ω_1 або ω_2 при заданих k_x , k_z . Два рівняння (22) для зміщень доповнюються двома рівняннями для швидкостей (після диференціювання по t). Тоді чотири невідомі константи A_1 , B_1 , A_2 , B_2 будуть визначені з чотирьох довільних початкових умов: два зміщення h_{x0} , h_{z0} і дві швидкості V_{x0} , V_{z0} у довільній точці простору в обраний момент часу. Визначивши константи, можна знайти значення h_x , h_z , V_x , V_z в усі наступні моменти часу у будь-якій точці простору. Відзначимо, що співвідношень типу (13), (14), (21) для двочастотних АГХ немає. У цих АГХ вибором чотирьох початкових умов можна змодельовувати довільні амплітудно-фазові зв'язки. Це дозволяє досягнути узгодження модельних хвильових форм з експериментально виміряними.

Зауважмо, що з двочастотного розв'язку (22) при врахуванні зв'язків (21) можна отримати одночастотні АГХ. Якщо у вирази (21) підставити $\varphi = \varphi_2$, то отримаємо такі значення h_x , h_z , V_x , V_z , при яких у (22) матимемо $A_1 = B_1 = 0$, тобто у (22) залишиться тільки гравітаційна мода φ_2 . Якщо ж у вирази (21) підставити $\varphi = \varphi_1$, тоді в (22) матимемо $A_2 = B_2 = 0$, тобто залишиться тільки акустична мода φ_1 .

4. МОДЕЛЮВАННЯ СУПУТНИКОВИХ ВИМІРЮВАНЬ АГХ

Супутникові контактні вимірювання дають найбільш повну інформацію про параметри середовища. На супутнику можна вимірювати одночасно різні параметри в окремій точці простору в конкретний момент часу. Як показано в роботах [3, 4, 10, 12, 13], це дозволяє визначити різні характеристики АГХ в нейтральній атмосфері: частоту, горизонтальну фазову швидкість, напрямок поширення та ін. За допомогою виразів (22) змодельовуємо характерні приклади хвильових форм, які спостерігаються з супутника, і порівнюємо їх з результатами супутникових вимірювань АГХ.

Припустимо, що супутник летить горизонтально в напрямку осі x . При цьому його швидкість (≈ 8 км/с) на порядок більша за горизонтальну фазову швидкість АГХ (сотні м/с). Тому за короткий проміжок часу вимірюється просторовий профіль фази φ , і в даних вимірювань відображається горизонтальна довжина хвилі. Кут у горизонтальній

площині між орбітою супутника і віссю x візьмемо 45° . Через цей кут довжина хвилі у супутникових вимірюваннях перевищує справжню. Для зменшення цієї розбіжності направимо хвилю назустріч супутнику (покладемо $k_x < 0$).

На рис. 2–5 приведено характерні хвильові форми квазігоризонтальних АГХ ($Hk_z < 1$). Вздовж осей графіків відкладено: по вертикалі — швидкості у метрах за секунду і зміщення у метрах, а по горизонталі — безрозмірну відстань L/H , де L — відстань уздовж орбіти супутника. Варіації швидкостей показано суцільними кривими, а зміщень — пунктирними.

В області $Hk_x > 1$ власні частоти практично зникають з парціальними (див. рис. 1 при $Hk_z = 0.1$). Одночастотні АГХ з частотою $\omega_2 = N$ показано на рис. 2. Дві початкові умови взято довільно ($h_{z0} = 100$ м, $V_{z0} = 20$ м/с), дві інші, визначені з (21), дорівнюють $h_{x0} = -268$ м, $V_{x0} = 2.1$ м/с. При таких значеннях у виразі (22) маємо $A_1 = B_1 = 0$, тобто залишається тільки гравітаційна мода ω_2 . З рис. 2 видно, що амплітуди вертикальних коливань в цьому випадку набагато більші за амплітуди горизонтальних коливань.

З рис. 2 відразу визначається довжина хвилі. Також видно, що хвиля рухається справа наліво назустріч супутнику, оскільки варіації швидкості завжди випереджають зміщення по фазі на $\pi/2$ в напрямку поширення хвилі. Частота хвилі в супутникових даних визначається за амплітудами швидкостей і зміщень [10, 13]. Зазвичай використовують усереднені значення цих амплітуд за кілька періодів.

Для хвилі на рис. 2 частота дорівнює $\omega_2 = \langle V_z \rangle / \langle h_z \rangle = \langle V_x \rangle / \langle h_x \rangle = N$

0.009 с^{-1} , де кутовими дужками позначено усереднення. Зауважимо, що при тих же параметрах для акустичної моди $\omega_1 = C_s k_x$ буде навпаки: амплітуди вертикальних коливань будуть значно меншими за амплітуди горизонтальних коливань.

Обидва цих випадки одночасно реалізуються у двочастотній АГХ, показаній на рис. 3. Тут наявний ефект розділення частот за ступенями свободи. Горизонтальні коливання відбуваються на частоті $\omega_1 = \langle V_x \rangle / \langle h_x \rangle = C_s k_x$, а вертикальні — на частоті $\omega_2 = \langle V_z \rangle / \langle h_z \rangle = N$. Таке розділення частот є простим методом ідентифікації одно- або двочастотних квазігоризонтальних АГХ.

В області $k_x = 0.5$ реалізується «злиття» близьких частот, так званий ефект биття. Коливання за двома ступенями свободи відбуваються на одній частоті близько БВ: $\langle V_x \rangle / \langle h_x \rangle \pm \langle V_z \rangle / \langle h_z \rangle = (\omega_1 \pm \omega_2)/2 = N$. Хвильові форми двочастотної АГХ показано на рис. 4. Обидві близькі моди стають нерозрізнюваними. При однаковій довжині хвилі в них одна частота, і вони поширюються зі спільною фазовою швидкістю. Відзначимо, що хвильові форми h_z і V_z на рис. 4 відповідають експериментально вимірним по амплітудах і зсувах фаз [3, 4, 10].

Наведемо приклад, коли двочастотний підхід дозволяє пояснити експериментальні дані, що не вкладаються в рамки сучасних теоре-

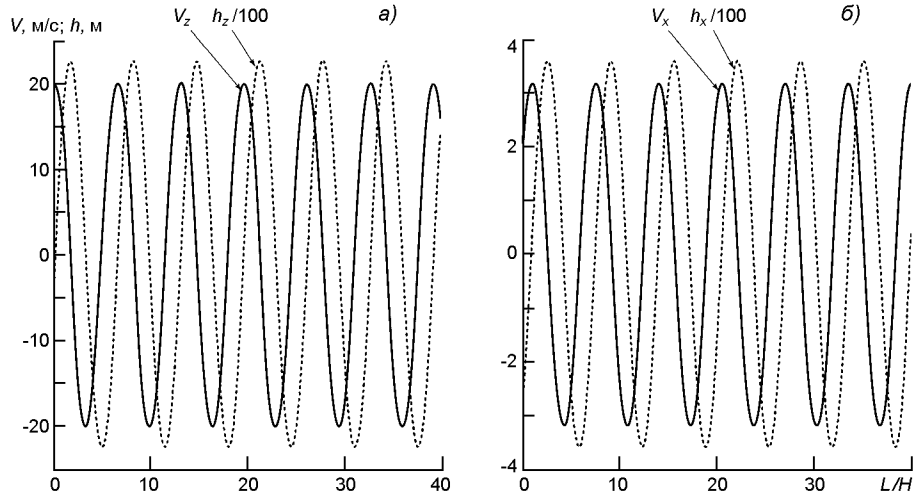


Рис. 2. Хвильові форми гравітаційної моди ω_2 при $Hk_z = 0.1$ і $Hk_x = -1.2$: а — вертикальні компоненти швидкості і зміщення, б — горизонтальні (L — відстань уздовж орбіти)

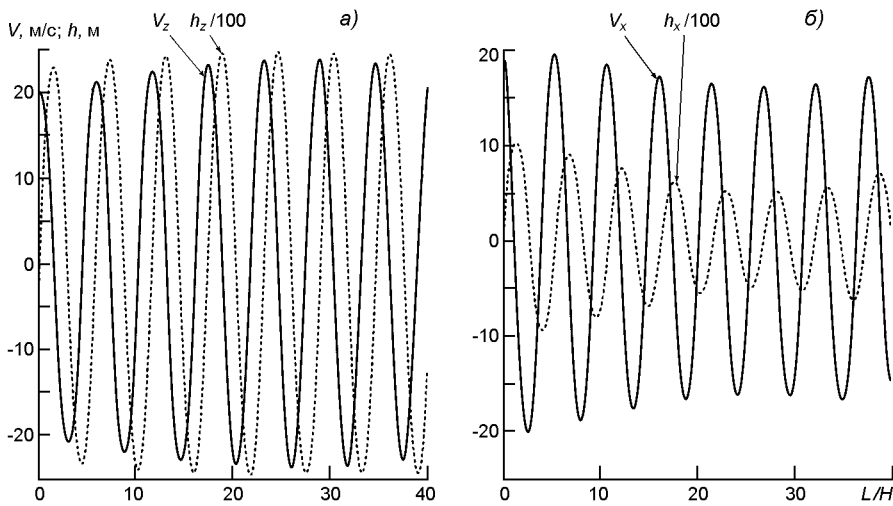


Рис. 3. Хвильові форми двочастотної АГХ з розділеними частотами ω_1 і ω_2 при $Hk_z = 0.1$ і $Hk_x = -1.2$: а — вертикальні компоненти швидкості і зміщення, б — горизонтальні. Початкові умови: $h_{z0} = h_{x0} = 100$ м, $V_{z0} = V_{x0} = 20$ м/с

тичних уявлень. Вимірювання на супутнику Dynamics Explorer 2 (DE2) показують, що у полярній термосфері Землі переважно спостерігаються квазігоризонтальні АГХ з довжиною хвилі $Hk_x \approx 0.5$ і частотою, близькою до частоти БВ [10, 12]. При цьому швидкості V_x і V_z є практично синфазними (див. рис. 5а і роботу [4]). Для одночастотних АГХ, згідно з (13), (14) при $Hk_z < 1$, зсуви фаз між швидкостями повинні бути близькими до $\pi/2$. Спостережувані синфазні хвильові форми можуть реалізовуватися у двочастотному режимі у випадку биття саме на частоті близько БВ, що перевірено за допомогою чисельного моделювання та представлено на рис. 5б.

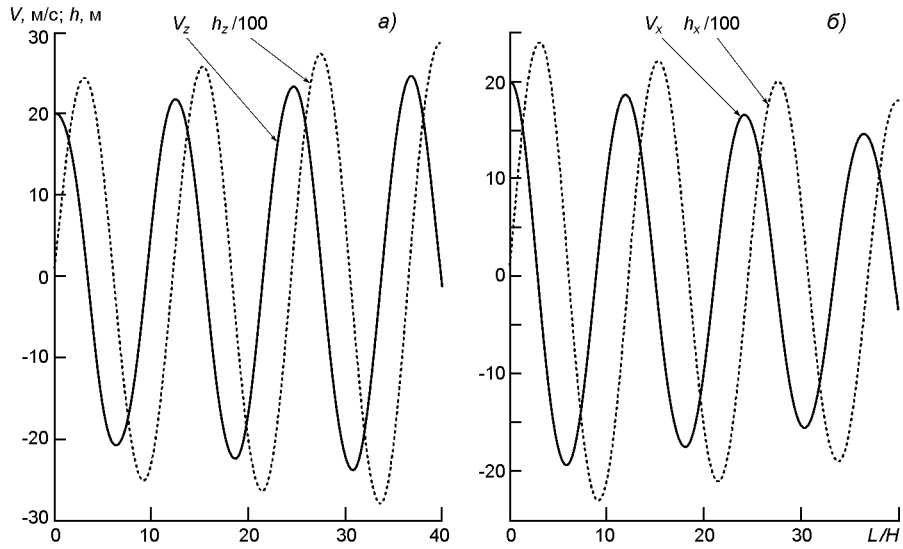


Рис. 4. Хвильові форми двочастотної АГХ з однією спільною частотою при $Hk_z = 0.1$ і $Hk_x = -0.5$, ефект «злиття частот»: а — вертикальні компоненти швидкості і зміщення, б — горизонтальні. Початкові умови див. рис. 3

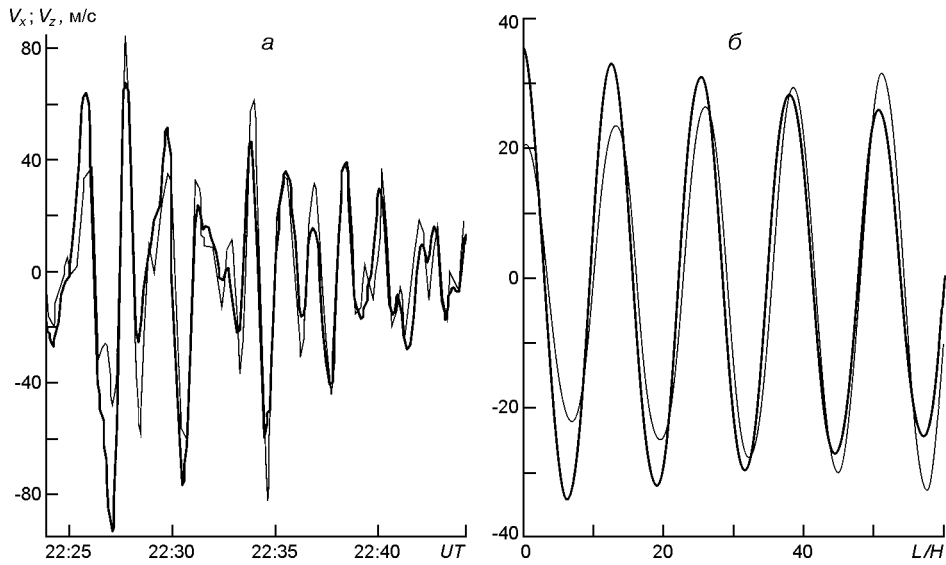


Рис. 5. Синфазні коливання V_x, V_z у полярних АГХ: а — дані вимірювань на супутнику DE2, виток 8132, б — модельні хвильові форми двочастотних АГХ при $Hk_z = 0.1, Hk_x = -0.5$

5. ВИСНОВКИ

Показано, що методи математичного опису АГХ подібні до методів опису коливань, що відбуваються в системі двох зв'язаних осциляторів. У зв'язку з цим АГХ розглянуто як коливальний процес, що відбувається на двох власних частотах одночасно. Знайдено умови, при виконанні яких АГХ реалізуються на одній частоті. Розв'язки отримано

для ізотермічної атмосфери в дійсних функціях. Чисельно змодельовано хвильові форми АГХ в одночастотному і двочастотних режимах.

Головна відмінна риса запропонованого підходу від відомого одночастотного полягає у можливості варіювати початкові умови для отримання більш точної відповідності теоретичних розрахунків з даними вимірювань. Це досягається за рахунок розширення діапазону допустимих амплітудно-фазових зв'язків між збуреними величинами. Проведено порівняння модельних хвильових форм з вимірними з космічного апарата і отримано добре узгодження. Таким чином, використання двочастотного розгляду АГХ відкриває нові можливості в аналізі експериментальних даних.

Роботу виконано за часткової підтримки Цільової комплексної програми НАН України з наукових космічних досліджень на 2018—2022 роки.

1. Крауфорд Ф. *Берклевський курс фізики. Т. III. Волни*. Изд. 3-е, исправл. М.: Наука, 1984. 512 с.
2. Магнус К. *Колебания*. Пер. с нем. М.: Мир, 1982. 304с.
3. Федоренко А. К., Крючков Е. И. Распределение среднемасштабных АГВ у полярных регионах по данным спутниковых измерений. *Геомагнетизм и аэрономия*. 2011. 51, № 4. С. 527—539.
4. Федоренко А. К., Крючков Е. И. Ветровой контроль распространения акустико-гравитационных волн у полярной термосфере. *Геомагнетизм и аэрономия*. 2013. 53, № 3. С. 394—405.
5. Черемних О. К., Крючков Е. И., Федоренко А. К., Черемних С. О. Двочастотный режим поширення акустико-гравітаційних хвиль в атмосфері Землі. *Кінематика і фізика небес. тіл*. 2020. 36, № 2. С. 34—57.
6. Черемних О. К. Резонансная мода в земной термосфере. *Космична наука і технологія*. 2011. 17, № 6. С. 74—76.
7. Beer T. *Atmospheric Waves*. John Wiley, New York, 1974. 300 p.
8. Cheremnykh O. K., Fedorenko A. K., Kryuchkov E. I., Selivanov Y. A. Evanescent acoustic-gravity modes in the isothermal atmosphere: systematization, applications to the Earth's and Solar atmospheres. *Ann. Geophys.* 2019. 37, № 3. P. 405—415.
9. Cheremnykh O. K., Kryuchkov E. I., Fedorenko A. K., Klymenko Yu. O. Two-frequency approach to the theory of atmospheric acoustic-gravity waves. *arXiv preprint arXiv:1908.07789*, 2019.
10. Fedorenko A. K., Bespalova A. V., Cheremnykh O. K., Kryuchkov E. I. A dominant acoustic-gravity mode in the polar thermosphere. *Ann. Geophys.* 2015. 33. P. 101—108. doi:10.5194/angeo-33-101-2015.
11. Hines C. O. Internal gravity waves at ionospheric heights. *Can. J. Phys.* 1960. 38. 1441—1481.
12. Innis J. L., Conde M. Characterization of acoustic-gravity waves in the upper thermosphere using Dynamics Explorer 2 Wind and Temperature Spectrometer (WATS) and Neutral Atmosphere Composition Spectrometer (NACS) data. *J. Geophys. Res.* 2002. 107, № A12. doi: 10.1029/2002 JA009370.
13. Johnson F. S., Hanson W. B., Hodges R. R., Coley W. R., Carignan G. R., Spencer N. W. Gravity waves near 300 km over the polar caps. *J. Geophys. Res.* 1995. 100. P. 23993—24002.

14. Kaladze T. D., Pokhotelov O. A., Shah H. A., Khan M. I., Stenflo L. Acoustic-gravity waves in the Earth's ionosphere. *J. Atmos. Sol.-Terr. Phys.* 2008. 70. P. 1607—1616.
15. Sutherland B. R. *Internal Gravity Waves*. Cambridge University Press, 2010, 395 p.
16. Tolstoy I. The theory of waves in stratified fluids including the effects of gravity and rotation. *Rev. of Modern Phys.* 1963. 35. № 1. P. 207—230.
17. Waltercheid R. L., Hecht J. H. A reexamination of evanescent acoustic-gravity waves: Special properties and aeronomical significance. *J. Geophys. Res.* 2003. 108, № D11. 4340. doi:10.1029/2002JD002421.
18. Yeh K. S., Liu C. H. 1974. Acoustic-gravity waves in the upper atmosphere. *Rev. Geophys. Space. Phys.* 1974. 12. P. 193—216.

REFERENCES

1. Crawford F. S. (1968) *Waves*. Berkley Physics Course. Vol. 3. 600.
2. Magnus K. (1965) *Vibrations*. Blackie & Son. 299.
3. Fedorenko A. K., Kryuchkov E. I. (2011) Distribution of medium-scale acoustic gravity waves in Polar Regions according to satellite measurement data. *Geomagn. and Aeron.* 51(4). 520—533.
4. Fedorenko A. K., Kryuchkov E. I. (2013) Wind control of the propagation of acoustic gravity waves in the polar atmosphere. *Geomagn. and Aeron.* 53(3). 377—388.
5. Cheremnykh O. K., Kryuchkov E. I., Fedorenko A. K., Cheremnykh S. O. (2020) Two-frequency propagation mode of acoustic-gravity waves in the Earth's atmosphere. *Kinematics and Phys. Celestial Bodies.* 36(2). 64—78.
6. Cheremnykh O. K. (2011) Resonant mode in the Earth's termosphere. *Space Sci. and Technol.* 17(6). 74—76.
7. Beer T. (1974) *Atmospheric Waves*. John Wiley, New York. 300.
8. Cheremnykh O. K., Fedorenko A. K., Kryuchkov E. I., Selivanov Y. A. (2019) Evanescent acoustic-gravity modes in the isothermal atmosphere: systematization, applications to the Earth's and Solar atmospheres. *Ann. Geophys.* 37(3). 405—415.
9. Cheremnykh O. K., Kryuchkov E. I., Fedorenko A. K., Klymenko Yu. O. (2019) Two-frequency approach to the theory of atmospheric acoustic-gravity waves. *arXiv preprint arXiv:1908.07789*.
10. Fedorenko A. K., Bepalova A. V., Cheremnykh O. K., Kryuchkov E. I. (2015) A dominant acoustic-gravity mode in the polar termosphere. *Ann. Geophys.* 33. 101—108. doi:10.5194/angeo-33-101-2015.
11. Hines C. O. (1960) Internal gravity waves at ionospheric heights. *Can. J. Phys.* 38. 1441—1481.
12. Innis J. L., Conde M. (2002) Characterization of acoustic-gravity waves in the upper termosphere using Dynamics Explorer 2 Wind and Temperature Spectrometer (WATS) and Neutral Atmosphere Composition Spectrometer (NACS) data. *J. Geophys. Res.* 107(A12). doi: 10.1029/2002 JA009370.
13. Johnson F. S., Hanson W. B., Hodges R. R., Coley W. R., Carignan G. R., Spencer N. W. (1995) Gravity waves near 300 km over the polar caps. *J. Geophys. Res.* 100. 23993—24002.
14. Kaladze T. D., Pokhotelov O. A., Shah H. A., Khan M. I., Stenflo L. (2008) Acoustic-gravity waves in the Earth's ionosphere. *J. Atmos. Sol.-Terr. Phys.* 70. 1607—1616.
15. Sutherland B. R. (2010) *Internal Gravity Waves*. Cambridge University Press. 395.
16. Tolstoy I. (1963) The theory of waves in stratified fluids including the effects of gravity and rotation. *Rev. of Modern Phys.* 35. № 1. P. 207—230.

17. Waltercheid R. L., Hecht J. H. (2003) A reexamination of evanescent acoustic-gravity waves: Special properties and aeronomical significance. *J. Geophys. Res.* 108(D11). 4340. doi:10.1029/2002JD002421.
18. Yeh K. S., Liu C. H. (1974) Acoustic-gravity waves in the upper atmosphere. *Rev. Geophys. Space. Phys.* 12. 193—216.

Е. І. Крючков, І. Т. Жук, О. К. Черемных

Институт космических исследований Национальной академии наук Украины
и Государственного космического агентства Украины, Киев, Украина

ДВУХЧАСТОТНЫЕ АКУСТИКО-ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ, МОДЕЛИРОВАНИЕ СПУТНИКОВЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Теория акустико-гравитационных волн (АГВ) рассматривает свободные собственные волновые возмущения атмосферы в рамках одночастотного подхода. При этом из теории следует существование двух отдельных типов волн с разными собственными частотами — акустических и гравитационных. В одночастотном подходе волновые флуктуации плотности, температуры, скорости связаны между собой через спектральные характеристики волны, причем эти связи неизменны. Однако спутниковые наблюдения параметров АГВ не всегда можно объяснить в рамках одночастотного подхода. В данной работе представлен двухчастотный подход к исследованию АГВ с помощью модели двух связанных осцилляторов. Показано, что возмущенные движения элементарного объема среды происходят одновременно на двух собственных частотах. В этом случае связи между волновыми флуктуациями параметров определяются начальными условиями, которые могут быть произвольными. Получены решения в вещественных функциях для изотермической атмосферы. Исследованы условия, при которых из общего двухчастотного решения получаются одночастотные АГВ. Численно смоделированы измеряемые со спутника волновые формы АГВ для скоростей и смещений в одночастотном и двухчастотном режимах. Результаты моделирования двухчастотных АГВ согласуются с данными спутниковых измерений. Двухчастотные АГВ не всегда реализуются на двух разных частотах. Показано, что при сближении частот реализуется эффект биений, и две близкие моды становятся неразличимыми. При одинаковой длине волны у них одинаковые средние частоты и одинаковые фазовые скорости. Главная особенность двухчастотного подхода к изучению АГВ состоит в расширении связей между волновыми параметрами среды. Это позволяет достичь удовлетворительного согласования модельных волновых форм с данными спутниковых измерений. Таким образом, использование двухчастотного рассмотрения АГВ открывает новые возможности в интерпретации экспериментальных данных.

Ключевые слова: акустико-гравитационная волна, связанные осцилляторы, собственные частоты.

Е. І. Kryuchkov, І. Т. Zhuk, О. К. Cheremnykh

Space Research Institute of the National Academy of Sciences of Ukraine
and the State Space Agency of Ukraine

TWO-FREQUENCY ACOUSTIC-GRAVITATIONAL WAVES, SIMULATION OF SATELLITE MEASUREMENTS

The theory of acoustic gravity waves (AGW) considers free disturbances of the atmosphere within the framework of a single-frequency approach. In this case, the theory implies the existence of two separate types of waves with different natural frequencies -

acoustic and gravitational. In the single-frequency approach, wave fluctuations of density, temperature, and velocity are related to each other through the spectral characteristics of the wave, and these relationships are unchanged. However, satellite observations of AGW parameters cannot always be explained within the framework of a single-frequency approach. This paper presents a two-frequency approach to the study of AGWs using the model of two coupled oscillators. It is shown that the perturbed movements of the elementary volume of the medium occur simultaneously at two natural frequencies. In this case, the connections between the wave fluctuations of the parameters are determined by the initial conditions, which can be arbitrary. Solutions in real functions for an isothermal atmosphere are obtained. The conditions under which single-frequency AGWs are obtained from the general two-frequency solution are investigated. The AGW waveforms measured from the satellite for velocities and displacements in single-frequency and dual-frequency modes are numerically simulated. The results of simulating two-frequency AGWs agree with the data of satellite measurements. Two-frequency AGWs are not always implemented at two different frequencies. It is shown that when the frequencies approach each other, the beat effect occurs and two closely related modes become indistinguishable. At the same wavelength, they have one center frequency and one phase velocity. The main feature of the two-frequency approach to the study of AGW is the expansion of the relationships between the wave parameters of the medium. This makes it possible to achieve satisfactory agreement of the model waveforms with the data of satellite measurements. Thus, the use of a two-frequency AGW treatment opens up new possibilities in the interpretation of experimental data.

Keywords: acoustic-gravity wave, coupled oscillators, natural frequencies.

Стаття надійшла до редакції 01.07.2020

Після доопрацювання 03.08.2020

Прийнята до друку 14.08.2020