

doi: <https://doi.org/10.15407/kfnt2020.04.015>

УДК 551.511.31; 532.133

**А. К. Федоренко, Є. І. Крючков, О. К. Черемних**

Інститут космічних досліджень Національної академії наук України  
та Державного космічного агентства України  
Просп. Академіка Глушкова, 40, к. 4/1, м. Київ-187, Україна, 03187  
fedorenkoak@gmail.com, kryuchkov.ye@gmail.com, oleg.cheremnykh@gmail.com

### **Затухання акустико-гравітаційних хвиль в ізотермічній атмосфері на основі модифікованих рівнянь Нав'є — Стокса і теплопереносу**

*В рамках моделі дисипативної ізотермічної атмосфери досліджено затухання акустико-гравітаційних хвиль на основі модифікованих рівнянь Нав'є — Стокса і теплопереносу. Модифікація цих рівнянь полягає в урахуванні додаткового перенесення імпульсу та енергії при поширенні АГХ за рахунок градієнта щільності, окрім зазвичай розгляданого градієнта швидкості. Це призводить до появи нових доданків у гідродинамічних рівняннях руху і теплопереносу. У цих припущеннях отримано локальне дисперсійне рівняння акустико-гравітаційних хвиль в ізотермічній дисипативній атмосфері, а також вираз для декременту затухання в часі. У граничних випадках високих частот (звук) і низьких частот (гравітаційні хвилі) характер затухання допускає наочну фізичну інтерпретацію. Розглянуто особливості затухання в часі різних типів еванесцентних акустико-гравітаційних мод, зокрема хвиль Лемба і коливань Брента — Вайсяля.*

**Ключові слова:** акустико-гравітаційна хвиля, атмосфера, молекулярна в'язкість, теплопровідність.

#### **ВСТУП**

Лінійна теорія акустико-гравітаційних хвиль (АГХ) допускає наявність в ідеальній ізотермічній атмосфері вільно поширюваних внутрішніх хвиль неперервного спектру, що складається з акустичної та гравітаційної гілки [13, 15, 25]. За певних граничних умов у атмосфе-

рах планет і Сонця можуть також реалізовуватися еванесцентні хвильові моди, що поширюються тільки по горизонталі [8, 23].

Супутникові спостереження АГХ у полярній термосфері Землі вказують на переважання хвиль з періодами порядку періоду Брента — Вайсяля (650...750 с) і горизонтальними довжинами в інтервалі 400...700 км [2, 6, 12, 16, 17]. Наявність у верхній атмосфері хвиль виділених часових і просторових масштабів може свідчити про селективний вплив атмосфери на спектр АГХ. Одним з можливих механізмів такого впливу є селективна дисипація спектру хвиль через вплив в'язкості і теплопровідності.

Врахування особливостей реальної атмосфери, таких як висотна залежність температури, в'язкості, теплопровідності, іонного тертя та ін. в теорії АГХ досягається в основному при чисельному моделюванні. Головна проблема аналітичного підходу при вивченні поширення хвиль у реальній атмосфері полягає в тому, що її параметри залежать від висоти. Це призводить до системи гідродинамічних рівнянь з залежними від висоти коефіцієнтами. Тому аналітичний вираз для дисперсії можна отримати тільки в локальному наближенні, припускаючи, що параметри середовища змінюються досить повільно на масштабах вертикальної довжини хвилі. Локальне дисперсійне рівняння і декременти затухання АГХ з урахуванням молекулярної в'язкості і теплопровідності раніше були отримані в роботах [21, 24]. Особливості в'язкої дисипації гравітаційних хвиль на різних висотах в залежності від їхніх спектральних властивостей досліджувались також в роботах [5, 7, 14, 22].

Гідродинамічний опис дисипації АГХ за допомогою звичайних рівнянь Нав'є — Стокса і теплопереносу дає вираз для декременту, який коректно описує затухання тільки при малих довжинах хвиль. При досить великих довжинах хвиль, більших від деякого критичного значення, затухання змінюється зростанням амплітуди, що є неможливим у дисипативній атмосфері [5, 21]. Цей парадоксальний результат, мабуть, є наслідком покладених в основу моделі спрощених припущень.

Поширення хвильових збурень в атмосфері відбувається на фоні барометричного розподілу густини, обумовленого дифузійною рівновагою у полі сили тяжіння. Це призводить до додаткового переносу імпульсу та енергії хвилею за рахунок градієнта концентрації. В звичай використовуваних рівняннях Нав'є — Стокса і теплопереносу цей ефект не враховується [4].

У даній роботі ми, слідуючи результатам [4], враховуємо в рівняннях руху та теплопереносу перенесення імпульсу та енергії, зумовлені не тільки градієнтом швидкості, але також і градієнтом щільності. Із системи модифікованих гідродинамічних рівнянь ми отримуємо локальне дисперсійне рівняння АГХ і декремент затухання цих хвиль у часі. Отриманий нами вираз для декременту коректно описує загасання різних акустико-гравітаційних збурень у всьому їхньому допустимому

мому спектральному діапазоні. Окремо розглянуто особливості дисипації низькочастотних гравітаційних хвиль, акустичних хвиль, а також еванесцентних хвильових мод, зокрема мод Лемба і вертикальних коливань Брента — Вайсяля.

## ВИХІДНІ РІВНЯННЯ

Розглянемо ізотермічну стисливу дисипативну атмосферу. У такому наближенні система гідродинамічних рівнянь без зовнішніх джерел включає рівняння неперервності, рівняння Нав'є — Стокса і теплопереносу [1, 3]:

$$\frac{d}{dt} \rho \mathbf{V} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = P \hat{S} - \mathbf{g} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{d(c_V T)}{dt} = P \mathbf{V} \cdot (\nabla T) - Q. \quad (3)$$

Тут  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla$  — субстанціональна похідна,  $\mathbf{V}$  — вектор швидкості частинок з компонентами швидкості  $V_i$  і  $V_j$  в декартовій системі координат,  $\rho$  — щільність атмосфери,  $T$  — температура,  $P$  — тиск,  $\mathbf{g}$  — прискорення вільного падіння,  $\hat{S}$  — тензор в'язких напруг з компонентами

$$\hat{S}_{ij} = \eta_{ij} \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{V} + \frac{V_i}{x_j} - \frac{V_j}{x_i},$$

де  $\eta_{ij}$  — коефіцієнти динамічної та об'ємної в'язкості,  $c_p / \text{Pr}$  — коефіцієнт теплопровідності,  $\text{Pr}$  — число Прандтля,  $c_V$  і  $c_p$  — питомі теплоємності при постійному об'ємі і тиску. Доданок  $Q = \mathbf{V} \cdot (\nabla \hat{S}) - (\hat{S} \cdot \mathbf{V})$  у правій частині (3) описує нагрівання середовища за рахунок в'язкої дисипації.

Вісь  $z$  декартової системи координат спрямуємо вгору протилено до сили тяжіння. Оскільки в горизонтальній площині атмосферу вважаємо однорідною, залежність від координати  $u$  виключимо відповідним поворотом системи координат навколо осі  $z$  так, щоб вісь  $x$  була спрямована уздовж горизонтального компонента швидкості частинок.

Будемо розглядати термосферу Землі вище 200 км, де температуру вважатимемо незмінною з висотою і де переважає один сорт газу — атомарний кисень. У рівноважному стані ( $\partial / \partial t = 0, \mathbf{V} = 0$ ) незбурені тиск і густина змінюються в термосфері з висотою за барометричним законом:

$$\frac{P(z)}{P(z_0)} = \frac{\rho(z)}{\rho(z_0)} \exp \left[ -\frac{z - z_0}{H} \right], \quad (4)$$

де  $z_0$  — початковий висотний рівень,  $H = RT/g$  — висота однорідної атмосфери,  $R = R_0/M$ ,  $R_0$  — універсальна газова стала,  $M$  — молярна маса газу.

Згідно з підходом, розвиненим в роботі [4], додатковий перенос імпульсу за рахунок градієнта щільності врахуємо у рівнянні (2) за допомогою заміни

$$\frac{V_i}{x_j} = \frac{V_i}{x_j}$$

у всіх компонентах тензора в'язких напруг. Тут позначено  $\nu$  — коефіцієнт кінематичної в'язкості. Аналогічну заміну зробимо також в рівнянні теплопереносу (3):

$$\frac{T}{x_i} = \frac{c_p}{Pr} \frac{T}{x_i}$$

Зазначені заміни фактично еквівалентні внесенню  $\nu$  під знак похідної у рівняннях Нав'є — Стокса і теплопереносу.

В результаті лінеаризації (1)...(3) з урахуванням вказаних вище заміни отримаємо рівняння для чотирьох збурених величин  $V_x$ ,  $V_z$ ,  $\theta$ ,  $T/T$  в ізотермічній стисливій дисипативній атмосфері:

$$\frac{\partial V_z}{\partial t} - \frac{1}{z} V_z = \nu \nabla^2 V_z = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} - RT \frac{\partial V_x}{\partial x} = \frac{T}{T}$$

$$V_x = e^{-\frac{x}{z}} \nabla^2 \frac{1}{z} \frac{V_x}{z} = (e^{-1}) \frac{V_z}{x} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial t} - RT \frac{\partial V_z}{\partial z} = \frac{T}{T}$$

$$g \frac{T}{T} = V_z = e^{-\frac{x}{z}} \nabla^2 \frac{1}{z} \frac{V_x}{x} = (e^{-1}) \frac{V_z}{z} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{T}{Pr} \nabla^2 \frac{T}{T} = \frac{1}{z} \frac{\partial T}{\partial z} = 0. \quad (8)$$

Тут  $e = 1/3 + \nu/gz$ ,  $Pr = 0.7$  [19] і враховано, що для ідеального газу  $P = RT$ . Для ізотермічної атмосфери ми знехтували доданками, пропорційними  $d^2/dz^2$ , оскільки  $\nu \sim T^{0.7}$  [11]. Для одноатомних газів кінетична теорія передбачає  $\nu = 0$  [3], тому в термосфері можна покласти  $e = 1/3$ .

Таким чином, врахування вкладу градієнта щільності у перенесення енергії та імпульсу за допомогою АГХ призвело до появи нових доданків в рівняннях (6), (7) і (8), пропорційних  $\frac{1}{z}$ . У системі рівнянь, що зазвичай використовується для аналізу лінійних збурень в атмосфері, ці доданки відсутні [19, 21].

### ДИСПЕРСІЙНЕ РІВНЯННЯ АГХ В ДИСИПАТИВНІЙ ІЗОТЕРМІЧНІЙ АТМОСФЕРІ

Розглянемо хвильові збурення виду

$$V_x; V_z; \rho; T/T_0 \exp(az) \exp[i(\omega t - k_x x)], \quad (9)$$

де  $\omega$  — частота,  $k_x$  — горизонтальна складова хвильового вектора,  $a$  — параметр, що визначає зміну амплітуд збурень з висотою.

Після підстановки (9) в систему (5)...(8) отримуємо таке дисперсійне рівняння:

$$\begin{aligned} & k_x^2 N^2 c_s^2 - c_s^2 q^2 (i - q^2) i - \frac{q^2}{Pr} \\ & i - \frac{q^2}{Pr} \frac{gk_x^2}{H} - i - i - \frac{q^2}{Pr} \frac{k_x^2}{H^2} (e - 1) \\ & i (i - q^2) i - \frac{q^2}{Pr} [i - (e - 1) q^2] = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Тут  $c_s = \sqrt{RT}$  — швидкість звуку,  $N = g\sqrt{1/c_s}$  — частота Брента — Вайселя,  $\gamma = c_p/c_v$  — показник адиабати,  $q^2 = k_x^2 a^2/H^2 + (e - 1)$ .

Дисперсійне рівняння (10) містить добуток  $q^2$ , який визначає деяку «ефективну в'язкість», що залежить від спектральних властивостей збурень. Для вільно поширюваних АГХ  $a = 1/(2H) - ik_z$  [15], і в цьому випадку  $q^2 = k_x^2/k_z^2 + 1/(4H^2)$ . При  $k_z = 0$  вираз (10) точно збігається з відомим дисперсійним рівнянням АГХ в ізотермічній атмосфері без дисипації [15, 25].

Оскільки коефіцієнт кінематичної в'язкості залежить від висоти:  $\nu(z) = \nu_0 \exp[(z - z_0)/H]$ , дисперсійне рівняння (10) справедливе тільки в локальному наближенні, або у межах тонких атмосферних шарів, де величину  $\nu$  можна наближено вважати сталою. Це наближення задовільно виконується для хвиль з  $k_z = (1/\nu)(d\nu/dz) = 1/H$ .

Представимо дисперсійне рівняння (10) у такому еквівалентному вигляді:

$$4 - {}^2F_1 - k_x^2 N^2 c_s^2 - \frac{c_s^2 q^2}{Pr} q^4 - \frac{k_x^2}{H^2} i - q^2 (F_2 - {}^2b_1) = 0. \quad (11)$$

Тут

$$F_1 = c_s^2 q^2 - q^4 - 2b_3 \frac{k_x^2 - 2(e-1)}{H^2},$$

$$F_2 = c_s^2 q^2 b_2 - \frac{gk_x^2}{Hq^2} - q^4 - 2b_4 \frac{k_x^2 - 2b_5}{H^2},$$

$$b_1 = \frac{e-2}{Pr}, \quad b_2 = 1 - \frac{1}{Pr}, \quad b_3 = (e-1) \frac{1}{Pr} - 1 - \frac{1}{Pr},$$

$$b_4 = \frac{1}{Pr}(e-1), \quad b_5 = \frac{1}{Pr}(e-1).$$

У рівнянні (11) окремо виділено дійсну і уявну частини, що зручно для отримання виразу для декременту затухання.

#### ДЕКРЕМЕНТ ЗАТУХАННЯ АГХ

Визначимо часовий декремент затухання АГХ у дисипативній атмосфері. Для цього зробимо в рівнянні (11) заміну  $\omega \rightarrow \omega + i$ , де  $i$  — декремент, і залишимо в ньому тільки лінійні по малому параметру доданки. В результаті отримаємо рівняння

$$4 - 2F_1 - k_x^2 N^2 c_s^2 - \frac{2c_s^2 q^2}{Pr} - q^4 - \frac{k_x^2}{H^2} - q^2(3 - 2b_1 - F_2 - i[4 - 2 - 2F_1 - 2q^2 b_1 - q^2 F_2]) = 0. \quad (12)$$

Прирівнюючи до нуля уявну частину (12), визначимо декремент затухання:

$$\frac{q^2}{2} - \frac{2b_1 - F_2}{2 - 2F_1}. \quad (13)$$

Для прийнятого виду збурень, пропорційних

$$\exp[i(\omega - i)t - i(k_x x + k_z z)] = \exp(-t) \exp[i(\omega t - k_x x - k_z z)],$$

при  $\omega > 0$  отримаємо затухання у часі. Для акустичних хвиль чисельник і знаменник (13) завжди додатні, для гравітаційних хвиль вони завжди від'ємні. Таким чином, в обох цих випадках маємо затухання амплітуд АГХ в часі.

З урахуванням (13) з рівняння (12) отримаємо дисперсійне рівняння АГХ в ізотермічній атмосфері з дисипацією:

$$2(2 - 2F_1) - 4 - 2F_1 - k_x^2 N^2 c_s^2 - \frac{2c_s^2 q^2}{Pr} - q^4 - \frac{k_x^2}{H^2} - q^4 [3 - 4b_1^2 - 4 - 2b_1 F_2 - F_2^2] = 0. \quad (14)$$

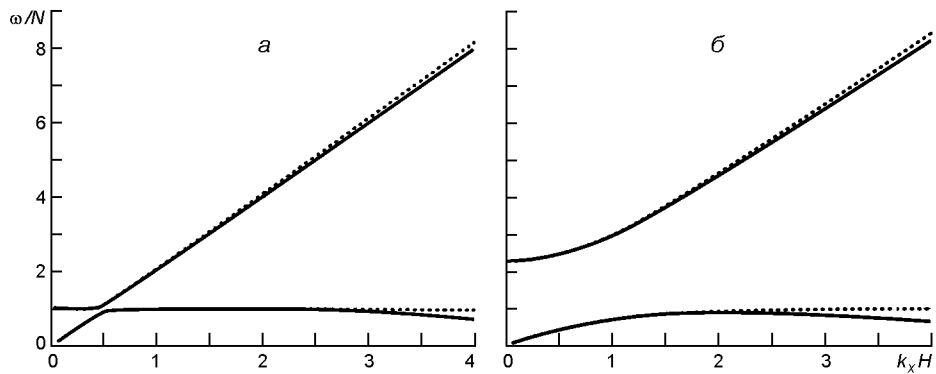


Рис. 1. Дисперсійні залежності АГХ в ізотермічній атмосфері з урахуванням в'язкості і теплопровідності при  $\nu = 8 \cdot 10^5 \text{ м}^2/\text{с}$  (суцільні криві) і без врахування дисипації (штрихові криві): а)  $k_z H = 0$ , б)  $k_z H = 1$

У термосфері, в залежності від висотного рівня і сонячної активності, коефіцієнт  $\nu$  змінюється в інтервалі  $10^5 \dots 10^6 \text{ м}^2/\text{с}$  [22]. Дисперсійні залежності  $(\omega, k_x)$  при  $k_z = 0$  і  $k_z = 1/H$  акустичної і гравітаційної гілок з урахуванням дисипації ( $\nu \sim 10^6 \text{ м}^2/\text{с}$ ) показано на рис. 1 суцільними кривими. Для порівняння також показано дисперсійні залежності без дисипації (штрихові криві). Видно, що внаслідок в'язкості і теплопровідності відбувається зменшення частоти акустичних і гравітаційних хвиль, як і для будь-яких коливальних систем з затуханням. При коефіцієнті в'язкості  $\nu \sim 10^6 \text{ м}^2/\text{с}$  зсув частоти стає відчутним для значень  $k_x H > 4$ , тобто горизонтальних довжин  $x \sim 75 \text{ км}$  (див. рис. 1). Зі зменшенням величини  $\nu$  зміщення частоти також зменшується. Згідно з даними супутникових вимірювань більшість спостережуваних на висотах термосфери АГХ мають горизонтальні масштаби порядку 400 км ( $k_x H \sim 0.78$ ) і більше [12, 16, 17]. Тому впливом в'язкості і теплопровідності на зміщення частоти можна у більшості випадків знехтувати.

Для характерних у термосфері значень параметрів  $c_s = 700 \dots 1000 \text{ м/с}$ ,  $H = 40 \dots 50 \text{ км}$ ,  $\nu \sim 10^6 \text{ м}^2/\text{с}$  і типових спектральних характеристик АГХ у виразі для декременту (13) можна знехтувати доданками, пропорційними  $\nu^2$ . В результаті вираз (13) спрощується:

$$\frac{q^2}{2} \frac{b_1 c_s^2 q^2 b_2 g k_x^2}{2 \nu^2 c_s^2 q^2} / (H q^2). \quad (15)$$

Декременти затухання акустичної та гравітаційної гілок АГХ при  $k_z H = 1$  і двох значеннях  $\nu = 2 \cdot 10^5 \text{ м}^2/\text{с}$  та  $10^6 \text{ м}^2/\text{с}$  показано на рис. 2а. Видно, що величина  $\gamma$  швидко збільшується зі збільшенням коефіцієнта в'язкості і зменшенням горизонтальної довжини хвилі. При характерній для середньої сонячної активності температурі термосфери  $T = 1000 \text{ К}$  значення  $\nu = 10^6 \text{ м}^2/\text{с}$  досягається на висоті близько 300 км,

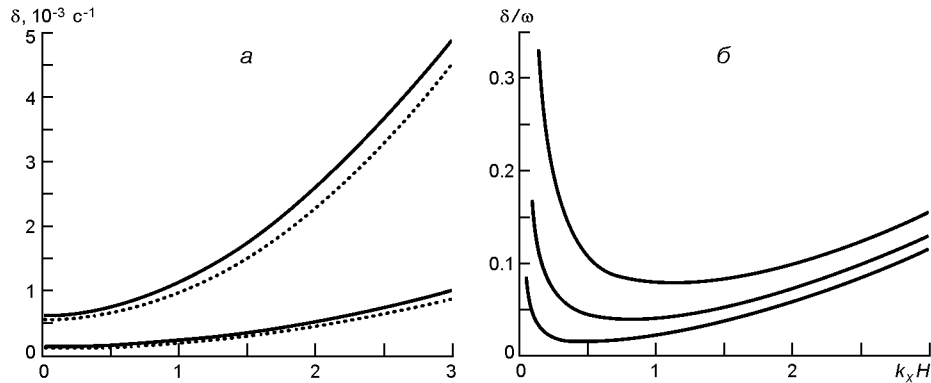


Рис. 2. Декременти затухання АГХ для гравітаційної (суцільні криві) і акустичної гілок (штрихові криві): а —  $k_z H = 1$  при  $\nu = 2 \cdot 10^5 \text{ м}^2/\text{с}$  (криві внизу) і  $\nu = 10^6 \text{ м}^2/\text{с}$  (криві вгорі); б — відносний декремент затухання гравітаційних хвиль  $\delta/\omega$  при  $\nu = 2 \cdot 10^5 \text{ м}^2/\text{с}$ , знизу вгору  $k_z H = 0.5, 1, 1.5$

при низькій активності ( $T = 800 \text{ К}$ ) — на висоті 260 км, а при високій активності ( $T = 1200 \text{ К}$ ) — на висоті 370 км [22]. Зрозуміло, що в умовах високої сонячної активності АГХ можуть поширюватися без істотного затухання значно вище в атмосфері, ніж в умовах низької активності.

На рис. 2б показано залежності відносного декременту затухання  $\delta/\omega$  внутрішніх гравітаційних хвиль від величини  $k_x H$ . Видно, що мінімальне затухання в термосфері відбувається при певних горизонтальних масштабах  $k_x H = 0.3 \dots 1$  і залежить від величини  $k_z H$ . При  $k_z H > 1$  затухання хвиль швидко збільшується. Ці результати узгоджуються з даними супутникових спостережень, що вказують на переважання на висотах 250...450 км полярної термосфери квазігоризонтальних АГХ великих амплітуд з  $k_x = 400 \dots 700 \text{ км}$  [12, 16, 17]. Ймовірними джерелами цих хвиль можуть бути висипання частинок або авроральні іоносферні струми нижче висот спостереження. Мабуть, в умовах в'язкої атмосфери далеко від джерел можуть спостерігатися тільки хвилі саме з такими спектральними властивостями, що відповідають слабкому затуханню, тоді як інші АГХ поглинаються.

### ОСОБЛИВОСТІ ЗАТУХАННЯ РІЗНИХ ТИПІВ АКУСТИКО-ГРАВІТАЦІЙНИХ ЗБУРЕНЬ

Розглянемо затухання характерних для атмосфери типів акустико-гравітаційних збурень. Як було показано у попередньому розділі, вплив в'язкості і теплопровідності на зсув частоти малий, тому при оцінці декременту затухання для спрощення можна користуватися дисперсійними рівняннями АГХ, отриманими для ізотермічної атмосфери без дисипації.



Внутрішні гравітаційні хвилі. Для низькочастотних гравітаційних хвиль  $q_{GR}^2$  декремент затухання набуває вигляду

$$q_{GR}^2 = \frac{q_{GR}^2}{2} \left( 1 + \frac{1}{Pr} \frac{k_x^2}{H^2 q_{GR}^2} \right) = \frac{q_{GR}^2}{2} \left( 1 + \frac{1}{Pr} \frac{k_x^2 N^2}{2} \right), \quad (16)$$

З виразу (16) видно, що внески динамічної в'язкості ( $q_{GR}^2$ ) і теплопровідності ( $q_{GR}^2/Pr$ ) у затухання внутрішніх гравітаційних хвиль є близькими за величиною. Натомість внесок об'ємної в'язкості незначний (оскільки величина  $e$  міститься тільки у малих по порядку величини доданках).

Акустичні хвилі. Для акустичних хвиль вираз для декремента має вигляд

$$q_{Ac}^2 = \frac{q_{Ac}^2}{2} \left( 1 + \frac{1}{Pr} e \left( 1 + \frac{gk_x^2 c_s^2}{H^4} \right) \right) = \frac{q_{Ac}^2}{2} \left( 1 + \frac{1}{Pr} e \left( 1 + \frac{2}{c_s^2} \right) \right), \quad (17)$$

У затухання акустичних хвиль, крім динамічної в'язкості і теплопровідності, певний внесок дає також об'ємна в'язкість. У термосфері з переважанням атомарного кисню цей внесок малий, проте нижче в атмосфері зі збільшенням відносного вмісту молекул азоту  $N_2$  він може зростати. Зокрема, для молекулярного азоту при низькому тиску і характерній для термосфери температурі порядку 1000 К чисельні оцінки дають  $\sim 2$  [10].

Еванесцентні хвильові моди. Проаналізуємо затухання горизонтальних (еванесцентних) хвильових мод, для яких  $a$  є дійсною величиною.

Розглянемо спочатку відому бездивергентну (ND) моду, яка в ізо-термічній атмосфері без дисипації має дисперсію  $\omega^2 = k_x g$  [18, 20]. Для цієї моди  $a = k_x$ ,  $q_{ND}^2 = k_x / H$ . Вважаючи, що зсув частоти через вплив в'язкості малий, і  $\omega^2 = k_x g$ , з рівняння (12) отримуємо

$$q_{ND}^2 = \frac{k_x}{2H} e. \quad (18)$$

Непружну (AE) моду з дисперсією  $\omega^2 = k_x g(1 - \frac{1}{H})$  і величиною  $a = 1/H - k_x$  вперше досліджено в роботі [9]. Для цієї моди  $q_{AE}^2 = k_x / H$ , а декремент затухання дорівнює

$$q_{AE}^2 = \frac{k_x}{2H} \frac{1}{Pr} \sim 2. \quad (19)$$

З порівняння (18) і (19) видно, що затухання ND-моди обумовлене тільки в'язкістю, а у затухання AE-моди вклади в'язкості і теплопровідності порівнянні. На висотах термосфери ND-мода загасає значно

слабше, ніж АЕ-мода. На висотах з переважанням молекул  $N_2$  дисипація ND-мод посилюється за рахунок збільшення величини  $e$ .

Вертикальні коливання БВ ( $V_x = 0$ ) в атмосфері без дисипації задовольняють дисперсії  $N^2 = c_s^2 \frac{d^2 V_x}{dz^2}$ , при цьому  $a = 1/H$ . Поклавши  $V_x = 0$  у вихідній системі гідродинамічних рівнянь (5)...(8), отримаємо дисперсійне рівняння для коливань БВ у в'язкій і теплопровідній атмосфері:

$$N^2 = 1 - \frac{2N^2}{c_s^4 \text{Pr}} = e - i \frac{N^2}{c_s^2} = 1 - \frac{N^2}{\text{Pr}} = e - \frac{N^2}{\text{Pr}} = 0. \quad (20)$$

Звідси впливає вираз для декременту затухання:

$$q_{BV}^2 = \frac{1}{2} \left( 1 - e \right) \frac{1}{\text{Pr}}, \quad q_{BV}^2 = \frac{N^2}{c_s^2}. \quad (21)$$

З (21) видно, що в затухання коливань БВ дають внесок і в'язкість, включаючи об'ємну, і теплопровідність.

Для вивчення горизонтальних хвиль Лемба покладемо  $V_z = 0$  у системі рівнянь (5)...(8). Це призводить до такого дисперсійного рівняння:

$$k_x^2 c_s^2 = 1 - \frac{2 q_L^2}{k_x^2 c_s^2 \text{Pr}} (q_L^2 - e k_x^2) \\ i q_L^2 = 1 - \frac{1}{\text{Pr}} \left( \frac{e k_x^2}{q_L^2} - \frac{k_x^2 c_s^2}{\text{Pr}} \right) = 0. \quad (22)$$

Звідси отримуємо вираз для декременту затухання:

$$q_L^2 = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{\text{Pr}} \right) \frac{e k_x^2}{q_L^2}, \quad (23)$$

де для моди Лемба  $a = (1/H)$ ,  $q_L^2 = k_x^2 N^2 / c_s^2$ . Затухання хвиль Лемба визначається спільним внеском в'язкості і теплопровідності. Внесок об'ємної в'язкості зростає зі збільшенням  $k_x$  і визначається останнім доданком у виразі (23).

Розглянуті вище вирази для декрементів різних акустико-гравітаційних збурень узагальнено в таблиці. Для всіх типів збурень затухання зростає зі зменшенням довжини хвилі (за виключенням непоширюваних коливань БВ), проте відносні вклади в'язкості і теплопровідності в затухання різних мод відрізняються.

## ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ

Врахування дисипації за допомогою звичайних рівнянь Нав'є — Стокса і теплопереносу призводить до локальної дисперсії АГХ, яка

**Декременти затухання різних типів акустико-гравітаційних хвильових збурень в ізотермічній дисипативній атмосфері**

Тип атмосферного збурення	Декремент затухання
Внутрішні гравітаційні хвилі	$q_{GR}^2 = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{k_x^2}{H^2 Pr} \right) e^{-\frac{k_x^2 N^2}{2}}$
Акустичні хвилі	$q_{AC}^2 = \frac{1}{2} \left( 1 + e \frac{g k_x^2 c_s^2}{H^4} \right) e^{-\frac{2}{c_s^2}}$
Бездивергентна ND-мода	$q_{ND}^2 = \frac{1}{2} e^{-\frac{k_x}{H}}$
Непружна АЕ-мода	$q_{AE}^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{Pr} e^{-2}, e^{-\frac{k_x}{H}}$
Вертикальні коливання БВ	$q_{BV}^2 = \frac{1}{2} \left( 1 + e \frac{1}{Pr} \right) e^{-\frac{N^2}{c_s^2}}$
Мода Лемба	$q_L^2 = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{Pr} \frac{e k_x^2}{q_L^2} \right) e^{-\frac{N^2}{c_s^2}}$

містить добуток  $\tilde{q}^2$ , де  $\tilde{q}^2 = k_x^2 a^2$  [21]. В цьому випадку величина  $\tilde{q}^2$  є комплексною для вільно поширюваних хвиль з  $a = 1/(2H) - ik_z$  і дійсною величиною для еванесцентних мод. Тому декремент затухання вільно поширюваних АГХ має вигляд [21]:  $(k^2 - 1/4H^2)f$ , де  $k^2 = k_x^2 - k_z^2$ ,  $f$  — деяка функція, що залежить від спектральних параметрів хвиль і властивостей атмосфери. При великих значеннях  $k$  (малих довжинах хвиль) звідси випливає збільшення затухання хвиль зі зменшенням їхньої довжини, що узгоджується із загальними гідродинамічними уявленнями [3]. Однак при цьому хвилі з  $k^2 = 1/(4H^2)$  виявляються «незатухаючими». При  $k^2 > 1/(4H^2)$  взагалі маємо парадоксальний результат: амплітуди АГХ повинні зростати в дисипативному середовищі, що суперечить загальним фізичним уявленням.

Ще більш наочно вказаний парадокс проявляється для деяких еванесцентних акустико-гравітаційних хвильових мод. Наприклад, для хвиль Лемба отримаємо  $\tilde{q}_L^2 = k_x^2 (1 - 1/(4H^2))$ , що дає нефізичне збільшення амплітуди у в'язкій атмосфері при  $k_x > \sqrt{1/4H^2}$ . Для коливань БВ взагалі виходить  $\tilde{q}_{BV}^2 = 1/(4H^2)$ , тобто збільшення амплітуди.

При використанні модифікованих рівнянь Нав'є — Стокса і теплопереносу коефіцієнт в'язкості також входить в дисперсію АГХ (10) і (11) у вигляді добутку  $q^2$ , де  $q^2 = k_x^2 a^2 - a/H$ . Новий доданок  $a/H$  у виразі  $q^2$ , що виникає внаслідок врахування градієнта щільності у перенесення енергії та імпульсу, призводить до подолання зазначеного

вище парадоксу. У цьому випадку величина  $q^2$  для всіх акустико-гравітаційних збурень є додатною і дійсною. Це виконується як для вільно поширюваних АГХ, так і для еванесцентних хвильових мод. Наприклад, для розглянутих мод Лемба  $q_L^2 = k_x^2 (1 - \gamma)/(1 - \gamma H^2)$ , а для коливань БВ  $q_{BV}^2 = (1 - \gamma)/(1 - \gamma H^2)$ . Тому зазначені моди завжди затухають у атмосфері при наявності в'язкості і теплопровідності. Відзначимо також, що дійсне значення  $q^2$  дозволяє із загального виразу для декременту (13) доволі легко перейти до декрементів для еванесцентних мод. Виняток становлять коливання БВ і хвилі Лемба, де відповідні умови  $V_x = 0$  і  $V_z = 0$  необхідно враховувати у вихідній системі гідродинамічних рівнянь.

## ВИСНОВКИ

Вивчено дисипацію акустико-гравітаційних хвиль в ізотермічній атмосфері при наявності в'язкості і теплопровідності на основі модифікованої системи гідродинамічних рівнянь. У цій системі в рівняннях Нав'є — Стокса і теплопереносу враховуються складові, які описують додатковий перенос імпульсу і енергії за рахунок градієнта щільності (див. (5)...(8)).

З використанням цих модифікованих рівнянь отримано локальне дисперсійне рівняння акустико-гравітаційних хвиль (10) в ізотермічній дисипативній атмосфері. Аналіз цього рівняння показав, що в'язкість і теплопровідність практично не впливають на дійсну частину частоти АГХ при характерних умовах в термосфері.

В роботі також отримано загальний вираз (13) для декременту затухання АГХ в часі. Завдяки додатковому врахуванню перенесення імпульсу та енергії внаслідок градієнта щільності цей декремент коректно описує затухання хвиль у всьому їхньому спектральному діапазоні, що цілком узгоджується з загальними уявленнями газодинаміки.

Окремо розглянуто особливості дисипації низькочастотних гравітаційних хвиль і високочастотних акустичних хвиль. Затухання гравітаційних хвиль швидко зростає зі збільшенням  $k_z$ . Тому переважання в супутникових спостереженнях на висотах термосфери квазігоризонтальних АГХ з горизонтальними довжинами хвиль  $\lambda_x = 400...700$  км можна пояснити фільтрацією спектру цих хвиль внаслідок в'язкості і теплопровідності. Внаслідок цього на висотах термосфери далеко від джерел можуть поширюватися тільки АГХ, що слабо затухають.

Розглянуто затухання в часі різних типів еванесцентних акустико-гравітаційних збурень, в тому числі хвиль Лемба і вертикальних коливань Брента — Вайсяля. Для всіх розглянутих збурень затухання зростає зі збільшенням довжини хвилі. При цьому вклади в'язкості і теплопровідності у затухання різних мод варіюють.

## ФІНАНСУВАННЯ РОБОТИ

Роботу виконано за фінансової підтримки Національного фонду досліджень України, проєкт 2020.02/0015 «Теоретичні та експериментальні дослідження глобальних збурень природного і техногенного походження в системі Земля — атмосфера — іоносфера».

1. Ладиков-Роев Ю. П., Черемных О. К. *Математические модели сплошных сред*. К.: Наукова думка, 2010. 550 с.
2. Ладиков-Роев Ю. П., Черемных О. К., Федоренко А. К., Набивач В. Е. Акустико-гравитационные волны в вихревой полярной термосфере. *Проблемы управления и информатики*. 2015. № 5. С. 74—84.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Гидродинамика. Теоретическая физика: т. VI.* — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. 736 с.
4. Лебедев-Степанов П. В. Течение вязкой сжимаемой среды: недостоверность уравнения Навье-Стокса. *Физическая химия. Доклады академии наук*. 2007. 417, № 4. С. 502—507.
5. Лизунов Г. В., Леонтьев А. Ю. Высота проникновения в ионосферу внутренних атмосферных гравитационных волн. *Космическая наука и технология*. 2014. 20, № 4. С. 31—41.
6. Федоренко А. К., Крючков Е. И. Распределение среднемасштабных АГВ в полярных регионах по данным спутниковых измерений. *Геомагнетизм и аэронаука*. 2011. 51, № 1. С. 527—539.
7. Черемных О. К., Селиванов Ю. А., Захаров И. В. Влияние сжимаемости и неизотермичности атмосферы на распространение акустогравитационных волн. *Космична наука і технологія*. 2010. 16, № 1. С. 9—19.
8. Beer T. *Atmospheric Waves*. John Wiley, New York, 1974. 300 p.
9. Cheremnykh O. K., Fedorenko A. K., Kryuchkov E. I., Selivanov Y. A. Evanescent acoustic-gravity modes in the isothermal atmosphere: systematization, applications to the Earth's and Solar atmospheres. *Ann. geophys.* 2019. 37, № 3. P. 405—415.
10. Cramer M. S. Numerical estimates for the bulk viscosity of ideal gases. *Phys. Fluids*. 2012. 24, 066102. doi: 10.1063/1.4729611.
11. Dalgarno A., Smith F. J. The viscosity and thermal conductivity of atomic oxygen. *Planet. and Space Sci.* 1962. 9, № 1-2.
12. Fedorenko A. K., Bepalova A. V., Cheremnykh O. K., Kryuchkov E. I. A dominant acoustic-gravity mode in the polar thermosphere. *Ann. geophys.* 2015. 33. P. 101—108. doi:10.5194/angeo-33-101-2015.
13. Francis S. H. Global propagation of atmospheric gravity waves: A review. *J. Atmos. and Terr. Phys.* 1975. 37. P. 1011—1054.
14. Fritts D. C., Vadas S. L. Gravity wave penetration into the thermosphere: sensitivity to solar cycle variations and mean winds. *Ann. geophys.* 2008. 26. P. 3841—3861. URL: [www.ann-geophys.net/26/3841/2008/101-2015](http://www.ann-geophys.net/26/3841/2008/101-2015).
15. Hines C. O. Internal gravity waves at ionospheric heights. *Can. J. Phys.* 1960. 38. 1441—1481.
16. Innis J. L., Conde M. Characterization of acoustic-gravity waves in the upper thermosphere using Dynamics Explorer 2 Wind and Temperature Spectrometer (WATS) and Neutral Atmosphere Composition Spectrometer (NACS) data. *J. Geophys. Res.* 2002. 107, № A12. doi: 10.1029/2002 JA009370.
17. Johnson F. S., Hanson W. B., Hodges R. R., Coley W. R., Carignan G. R., Spencer N. W. Gravity waves near 300 km over the polar caps. *J. Geophys. Res.* 1995. 100. P. 23993—24002.

18. Jones W. L. Non-divergent oscillations in the solar atmosphere. *Solar Phys.* 1969. 7. P. 204—209.
19. Kundu P. *Fluid dynamics*. Elsevier, New York, 1990. 638 p.
20. Tolstoy I. The theory of waves in stratified fluids including the effects of gravity and rotation. *Revs Mod. Phys.* 1963. 35, № 1.
21. Vadas S. L., Fritts M. J. Thermospheric responses to gravity waves: Influences of increasing viscosity and thermal diffusivity. *J. Geophys. Res.* 2005. 110, № D15103. doi:10.1029/2004JD005574.
22. Vadas S. L., Nicolls D. C. The phases and amplitudes of gravity waves propagating and dissipating in the thermosphere: Theory. *J. Geophys. Res.* 2012. 117, № A05322, doi:10.1029/2011JA017426.
23. Waltercheid R. L., Hecht J. H. A reexamination of evanescent acoustic-gravity waves: Special properties and aeronomical significance. *J. Geophys. Res.* 2003. 108, № D11. 4340. doi:10.1029/2002JD002421.
24. Yanowitch M. Effect of viscosity on vertical oscillations of an isothermal atmosphere. *Can. J. Phys.* 1967. 45. P. 2003—2008.
25. Yeh K. S., Liu C. H. Acoustic-gravity waves in the upper atmosphere. *Revs Geophys. and Space Phys.* 1974. 12. P. 193—216.

## REFERENCES

1. Ladikov-Royev Yu. P., Cheremnykh O. K. (2010) *Mathematical models of continuous media*. Kyiv: Naukova Dumka. 550. (In Russian).
2. Ladikov-Royev Yu. P., Cheremnykh O. K., Fedorenko A. K., Nabivach V. Ye. (2015) Acoustic-gravitational waves in a vortex polar thermosphere. *Probl. Control and Inform.* 5. 74—84. (In Russian).
3. Landau L. D., Lifshits Ye. M. (1986) *Hydrodynamics. Theoretical Physics: Vol. VI*. M.: Nauka. Gl. red. fiz-mat. lit. 736. (In Russian).
4. Lebedev-Stepanov P. V. (2007) Flow of a viscous compressible medium: the inaccuracy of the Navier-Stokes equations. *Phys. Chem. Doklady Akademii Nauk.* 417(4). 502—507. (In Russian).
5. Lizunov G. V., Leontiev A. Yu. (2014) Height of the penetration into the ionosphere for internal atmosphere gravity waves. *Kosm. nauka tehnol.* 20(4). 31—41. (In Russian).
6. Fedorenko A. K., Kryuchkov E. I. (2011) Distribution of medium-scale acoustic gravity waves in polar regions according to satellite measurement data. *Geomagnetism and Aeronomy.* 51(1). 527—539. (In Russian).
7. Cheremnykh O. K., Selivanov Yu. A., Zakharov I. V. (2010) The influence of compressibility and nonisothermality of the atmosphere on the propagation of acousto-gravity waves. *Kosm. nauka tehnol.* 16(1). 9—19. (In Russian).
8. Beer T. (1974) *Atmospheric Waves*. John Wiley, New York. 300.
9. Cheremnykh O. K., Fedorenko A. K., Kryuchkov E. I., Selivanov Y. A. (2019) Evanescent acoustic-gravity modes in the isothermal atmosphere: systematization, applications to the Earth's and Solar atmospheres. *Ann. geophys.* 37(3). 405—415.
10. Cramer M. S. (2012) Numerical estimates for the bulk viscosity of ideal gases. *Phys. Fluids.* 24, 066102. doi: 10.1063/1.4729611.
11. Dalgarno A., Smith F. J. (1962) The viscosity and thermal conductivity of atomic oxygen. *Planet. and Space Sci.* 9(1-2).
12. Fedorenko A. K., Bepalova A. V., Cheremnykh O. K., Kryuchkov E. I. (2015) A dominant acoustic-gravity mode in the polar thermosphere. *Ann. geophys.* 33. 101—108. doi:10.5194/angeo-33-101-2015.

13. Francis S. H. (1975) Global propagation of atmospheric gravity waves: A review. *J. Atmos. and Terr. Phys.* 37. 1011—1054.
14. Fritts D. C., Vadas S. L. (2008) Gravity wave penetration into the thermosphere: sensitivity to solar cycle variations and mean winds. *Ann. geophys.* 26. 3841—3861. URL: [www.ann-geophys.net/26/3841/2008/101-2015](http://www.ann-geophys.net/26/3841/2008/101-2015).
15. Hines C. O. (1960) Internal gravity waves at ionospheric heights. *Can. J. Phys.* 38. 1441—1481.
16. Innis J. L., Conde M. (2002) Characterization of acoustic-gravity waves in the upper thermosphere using Dynamics Explorer 2 Wind and Temperature Spectrometer (WATS) and Neutral Atmosphere Composition Spectrometer (NACS) data. *J. Geophys. Res.* 107(A12). doi: 10.1029/2002 JA009370.
17. Johnson F. S., Hanson W. B., Hodges R. R., Coley W. R., Carignan G. R., Spencer N. W. (1995) Gravity waves near 300 km over the polar caps. *J. Geophys. Res.* 100. 23993—24002.
18. Jones W. L. (1969) Non-divergent oscillations in the solar atmosphere. *Solar Phys.* 7. 204—209.
19. Kundu P. (1990) *Fluid dynamics*. Elsevier, New York. 638 p.
20. Tolstoy I. (1963) The theory of waves in stratified fluids including the effects of gravity and rotation. *Revs Mod. Phys.* 35(1).
21. Vadas S. L., Fritts M. J. (2005) Thermospheric responses to gravity waves: Influences of increasing viscosity and thermal diffusivity. *J. Geophys. Res.* 110(D15103). doi:10.1029/2004JD005574.
22. Vadas S. L., Nicolls D. C. (2012) The phases and amplitudes of gravity waves propagating and dissipating in the thermosphere: Theory. *J. Geophys. Res.* 117(A05322). doi:10.1029/2011JA017426.
23. Waltercheid R. L., Hecht J. H. (2003) A reexamination of evanescent acoustic-gravity waves: Special properties and aeronomical significance. *J. Geophys. Res.* 108(D11). 4340. doi:10.1029/2002JD002421.
24. Yanowitch M. (1967) Effect of viscosity on vertical oscillations of an isothermal atmosphere. *Can. J. Phys.* 45. 2003—2008.
25. Yeh K. S., Liu C. H. (1974) Acoustic-gravity waves in the upper atmosphere. *Revs Geophys. and Space Phys.* 12. 193—216.

*А. К. Федоренко, Е. И. Крючков, О. К. Черемных*

Институт космических исследований Национальной академии наук Украины  
и Государственного космического агентства Украины, Киев, Украина

#### ЗАТУХАНИЕ АКУСТИКО-ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН В ИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ АТМОСФЕРЕ НА ОСНОВЕ МОДИФИЦИРОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА И ТЕПЛОПЕРЕНОСА

В рамках модели диссипативной изотермической атмосферы исследовано затухание акустико-гравитационных волн на основе модифицированных уравнений Навье — Стокса и теплопереноса. Модификация этих уравнений состоит в учете дополнительного переноса импульса и энергии при распространении АГВ за счет градиента плотности, кроме обычно рассматриваемого градиента скорости. Это приводит к появлению дополнительных слагаемых в гидродинамических уравнениях движения и теплопереноса. В этих предположениях получено локальное дисперсионное уравнение акустико-гравитационных волн в изотермической диссипативной атмосфере, а также выражение для декремента затухания во времени. В предельных случаях высоких частот (звук) и низких частот (гравитационные волны) характер затухания допускает наглядную физическую интерпретацию. Рассмотрены особенности зату-

хания во времени разных типов эванесцентных акустико-гравитационных мод, в том числе волн Лэмба и колебаний Брента — Вэйсяля.

**Ключевые слова:** акустико-гравитационная волна, атмосфера, молекулярная вязкость, теплопроводность.

*A. K. Fedorenko, E. I. Kryuchkov, O. K. Cheremnykh*

Space Research Institute of the National Academy of Sciences of Ukraine  
and the State Space Agency of Ukraine

#### ATTENUATION OF ACOUSTIC-GRAVITY WAVES BASED ON MODIFIED NAVIER-STOKES AND HEAT TRANSFER EQUATIONS

Based on modified Navier-Stokes and heat transfer equations, attenuation of acoustic-gravity waves is studied within the framework of dissipative isothermal atmosphere model. In addition to usually considered velocity gradient, the modification of these equations consists in taking into account the additional transfer of momentum and energy caused by AGWs due to the density gradient. This leads to appearance of additional terms in hydrodynamic equations of motion and heat transfer. Under these assumptions, the local dispersion equation of acoustic-gravity waves in an isothermal dissipative atmosphere is obtained, as well as the expression for damping decrement in time. In limiting cases of high frequencies (sound waves) and low frequencies (gravitational waves), the nature of the attenuation allows a clear physical interpretation. The features of time attenuation of various types of evanescent acoustic-gravity modes are also considered including Lamb waves and Brent-Väisälä oscillations.

**Keywords:** acoustic-gravity wave, atmosphere, molecular viscosity, thermal conductivity.

Стаття надійшла до редакції 31.03.2020

Після доопрацювання 23.04.2020

Прийнята до друку 23.04.2020