

doi: <https://doi.org/10.15407/kfnt2020.03.003>

УДК 523.9-72

**Ю. І. Федоров**

Головна астрономічна обсерваторія Національної академії наук України,  
вул. Академіка Заболотного 27, Київ, Україна, 03143  
[fedorov@mao.kiev.ua](mailto:fedorov@mao.kiev.ua)

### **Функція розподілу космічних променів на початковій стадії сонячної протонної події**

*На основі кінетичного рівняння, яке описує багатократне розсіяння заряджених частинок на малі кути, розглянуто поширення сонячних космічних променів у міжпланетному середовищі. Вважаємо, що частинки високої енергії інжектовано у міжпланетний простір миттєвим, точковим джерелом. Досліджено просторово-часовий розподіл концентрації та анізотропії швидких частинок на анізотропній фазі спалаху сонячних космічних променів. У малокутовому наближенні одержано аналітичний вираз для функції розподілу космічних променів, досліджено еволюцію кутового розподілу частинок високої енергії. Показано, що при слабкому розсіянні заряджених частинок високої енергії на флуктуаціях міжпланетного магнітного поля на початковій стадії спалаху сонячних космічних променів має місце імпульсне зростання їхньої інтенсивності. Анізотропія кутового розподілу сонячних космічних променів монотонно зменшується з часом і має максимальне значення у момент приходу в дану точку простору перших частинок.*

**Ключові слова:** космічні промені, кінетичне рівняння, міжпланетне середовище.

#### **ВСТУП**

Проблема прискорення сонячних космічних променів (СКП) та їхнього поширення у міжпланетному середовищі є однією з фундаментальних проблем фізики геліосфери [4, 24, 29, 32]. Заряджені частинки високої енергії є важливою складовою космічної погоди, вони станов-

лять небезпеку для космічних польотів, впливають на роботу комунікаційних і навігаційних систем [24, 29].

Характер поширення космічних променів (КП) у міжпланетному середовищі залежить від рівня збурення геліосферного магнітного поля. Якщо рівень магнітогідродинамічної турбулентності у внутрішній геліосфері достатньо високий, то заряджені частинки високої енергії встигають багаторазово розсіятися на шляху від Сонця до точки спостереження, функція розподілу КП стає майже ізотропною, а поширення КП можна досліджувати у дифузійному наближенні [4, 12, 13, 29, 32]. Для таких сонячних спалахів інтенсивність КП в даній точці простору поступово збільшується до максимального значення, потім повільно зменшується, причому спостерігається плавний часовий профіль інтенсивності СКП [4, 18, 24, 32].

Для деяких сонячних протонних подій з низьким рівнем турбулентності міжпланетного магнітного поля розсіяння частинок було слабким, а транспортний пробіг КП — сумірним з астрономічною одиницею. У цих спалахах спостерігався імпульсний сплеск інтенсивності КП, а частинки надходили у точку спостереження у вигляді вузького пучка [7, 9, 11, 25, 31]. Подія 20 січня 2005 року, яка є найбільш потужним спалахом СКП за останні піввіку, характеризується наявністю анізотропного потоку релятивістських частинок на початковій фазі спалаху [6, 8, 25, 26, 30]. Під час початкового періоду спалаху СКП 20.01.2005 (а також ряду інших подій) спостерігалась значна анізотропія кутового розподілу частинок і жорсткий енергетичний спектр КП. З плином часу кутовий розподіл релятивістських частинок поступово ставав менш анізотропним, а енергетичний спектр КП — більш м'яким [21, 23, 31].

Дифузійний опис поширення СКП під час анізотропних протонних подій стає некоректним, і необхідно використовувати кінетичне рівняння [2, 4, 12, 14]. Дослідження переносу КП у міжпланетному середовищі на основі кінетичного рівняння Фоккера — Планка виконано в роботах [2, 12, 14, 19, 21, 22]. Кінетичне рівняння Фоккера — Планка було розв'язано чисельно, наприклад, у роботах [1, 10, 13, 27]. Розв'язок рівняння Фоккера — Планка у наближенні малих кутів розсіяння отримано у роботах [2, 12]. У даному наближенні частинки рухаються переважно уздовж середнього магнітного поля (малі значення  $\theta$ ), а їхнє розсіяння відбувається на малі кути. Дослідження переносу СКП на основі розв'язку кінетичного рівняння у другому наближенні відносно кута  $\theta$  виконано в роботах [3, 15, 28].

У даній роботі розглянуто поширення СКП, інжектованих у міжпланетне середовище миттєвим, точковим джерелом частинок. На основі розв'язку кінетичного рівняння Фоккера — Планка, яке описує розсіяння частинок на малі кути, проаналізовано просторово-часовий розподіл СКП, досліджено еволюцію функції кутового розподілу частинок на початковій стадії сонячної протонної події.

**ОБРАЗ ЛАПЛАСА ФУНКЦІЇ РОЗПОДІЛУ КОСМІЧНИХ ПРОМЕНІВ**

Кінетичне рівняння, яке описує поширення заряджених частинок високої енергії у міжпланетних магнітних полях, має вигляд [2, 12, 14]

$$\frac{f}{t} - v \cos \theta \frac{f}{r} - \frac{v}{r} \sin \theta \frac{f}{r} - \frac{f}{2} \frac{v}{\sin \theta} - \sin \theta \frac{f}{8} \frac{(r)(t)(\theta)}{r^2 \sin^2 \theta}, \quad (1)$$

де  $f(r, \theta, t)$  — функція розподілу КП,  $\theta$  — кут між вектором швидкості частинки  $v$  і радіальним напрямком,  $r$  — транспортний пробіг КП. Останній доданок у лівій частині кінетичного рівняння (1) описує процес розсіяння заряджених частинок на неоднорідностях магнітного поля. Припускаємо, що функція розподілу КП залежить від єдиної просторової координати  $r$ . Права частина кінетичного рівняння відповідає миттєвому джерелу частинок, яке розташоване у початку координат.

Введемо нові змінні

$$\frac{r}{v}, \quad \frac{vt}{r}. \quad (2)$$

У цих змінних кінетичне рівняння (1) набуває вигляду

$$\frac{f}{\cos \theta} - \frac{f}{\sin \theta} - \frac{f}{2 \sin \theta} - \sin \theta \frac{f}{8} \frac{(\theta)(t)(\theta)}{r^2 \sin^2 \theta}. \quad (3)$$

Аналітичний розв’язок кінетичного рівняння (3) можна отримати у випадку розсіяння частинок на малі кути [2, 3, 12, 15, 28]. Припустимо, що переважна кількість частинок рухається у радіальному напрямку. Вважатимемо кут між швидкістю частинки і радіальним напрямком малим, так що виконується нерівність  $\theta^2 \ll 1$  [3, 15, 28]. У кінетичному рівнянні (3) замінимо величину  $\sin \theta$  на  $\theta$ , а  $\cos \theta$  — на  $1 - \theta^2/2$ . В даному наближенні кінетичне рівняння (3) набуває вигляду

$$\frac{f}{(1 - \theta^2/2)} - \frac{f}{\theta} - \frac{2f}{\theta} - \frac{f}{8} \frac{(\theta)(t)(\theta)}{r^2 \sin^2 \theta}, \quad (4)$$

де

$$\frac{\theta^2}{2}. \quad (5)$$

Введемо змінну

$$(6)$$

і запишемо кінетичне рівняння (4) у нових змінних, утримуючи перші доданки, що не зникають [3]:

$$\frac{f}{\theta} - \frac{f}{\theta} - \frac{2f}{\theta} - \frac{f}{8} \frac{(\theta)(t)(\theta)}{r^2 \sin^2 \theta}. \quad (7)$$

Виконавши перетворення Лапласа

$$f(\rho, \theta) = d \exp(-\rho) f(\rho, \theta), \quad (8)$$

здобудемо рівняння для образу Лапласа функції розподілу КП:

$$f = \frac{f}{8} - \frac{2}{3} \frac{f}{\rho} - \frac{f}{\rho^2} = \frac{f(\rho)}{8} - \frac{2}{3} \frac{f(\rho)}{\rho}. \quad (9)$$

Розв'язок рівняння (9) має вигляд [15]

$$f(\rho, \theta) = \frac{1}{w(\rho, \theta)} \exp\left(-\frac{1}{w(\rho, \theta)}\right) \frac{w(\rho, \theta)}{w(\rho, \theta)}, \quad (10)$$

де

$$w(\rho, \theta) = \frac{8}{3^{3/2}} (\sqrt{\rho} \operatorname{ch} \sqrt{\rho} - \operatorname{sh} \sqrt{\rho}), \quad (11)$$

$$\frac{w(\rho, \theta)}{\rho} = \frac{8}{3^{3/2}} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}, \quad (12)$$

$\operatorname{sh} z$ ,  $\operatorname{ch} z$  — відповідно гіперболічний синус і гіперболічний косинус аргумента  $z$ .

Відмітимо, що функції комплексної змінної (11), (12) не містять точок розгалуження. Дійсно, розклавши в ряд гіперболічні функції у співвідношеннях (11), (12), матимемо

$$w(\rho, \theta) = \frac{8}{3} \rho^{3/2} \left( 1 - \frac{\rho}{10} + \frac{\rho^2}{70} - \dots \right), \quad (13)$$

$$\frac{w(\rho, \theta)}{\rho} = \frac{8}{3} \rho^{1/2} \left( 1 - \frac{\rho}{6} + \frac{\rho^2}{120} - \dots \right). \quad (14)$$

Таким чином, у співвідношення (11), (12) входять лише цілі степені змінної  $\rho$ .

### КОНЦЕНТРАЦІЯ СОНЯЧНИХ КОСМІЧНИХ ПРОМЕНІВ

Здобуте співвідношення для образу Лапласа функції розподілу КП (10) дозволяє обчислити образ Лапласа концентрації частинок:

$$N(\rho, \theta) = 2 f_0(\rho, \theta), \quad (15)$$

де

$$f_0(\rho, \theta) = d \sin f(\rho, \theta). \quad (16)$$

Якщо переважна кількість частинок характеризується малими зна-

ченнями кута  $\theta$ , то верхню границю у формулі (16) можна поширити до нескінченності. Таким чином,

$$f_0(\theta, t) = \int_0^d \frac{1}{3} f(\theta, r) dr, \quad (17)$$

де змінну  $r$  визначено формулою (5), а образ Лапласа функції розподілу КП має вигляд (10). Після інтегрування співвідношення (17) матимемо

$$f_0(\theta, t) = \frac{1}{w/l} \frac{1}{3} \frac{w}{(w/l)^2}. \quad (18)$$

Обернене перетворення Лапласа визначається формулою

$$f_0(\theta, t) = \frac{1}{2} \int_{i_L} f_0(\theta, s) \exp(st) ds, \quad (19)$$

де змінна  $s$  визначається співвідношенням (6), а інтегрування виконується вздовж прямої  $L$ , паралельної уявній осі і розташованої у правій півплощині комплексної змінної  $s$ .

Замкнемо контур інтегрування дугою нескінченно великого радіуса, розташованою у лівій півплощині комплексної змінної  $s$ . Відмітимо, що інтеграл вздовж цієї дуги дорівнює нулю. Таким чином, інтегрування вздовж замкненого контура, який складається з прямої  $L$  і дуги нескінченно великого радіуса, зводиться до обчислення лишків в особливих точках функції  $f_0(\theta, t)$  (18). Корені знаменника функції  $f_0(\theta, t)$  розташовані на від'ємній частині дійсної осі, а образ Лапласа функції  $f_0$  (18) на дійсній осі комплексної змінної  $s$  має вигляд

$$f_0(\theta, t) = \frac{1}{8} \frac{\sqrt{|t|}}{\sin \sqrt{|t|}} \frac{1}{3} \frac{\cos \sqrt{|t|} \sin \sqrt{|t|}}{2 \sqrt{|t|} \sin^2 \sqrt{|t|}}. \quad (20)$$

Особливі точки функції (20) визначаються формулою

$$n = \frac{n^2 - 2}{2}, \quad (21)$$

де  $n = 1$ .

Після обчислення лишків підінтегральної функції (19), (20) у точках  $n$  отримаємо таке співвідношення:

$$f_0(\theta, t) = \frac{1}{4} \frac{1}{3} \frac{2}{3} \int_{n=1} (1)^n n^2 \exp \frac{n^2 - 2}{2} dt. \quad (22)$$

На рис. 1 представлено просторову залежність функції  $f_0$  (22) у різні моменти часу (суцільні криві). Значення безрозмірного часу приведено біля відповідних кривих. Відмітимо, що концентрація КП  $N$  (15) пропорційна функції  $f_0$ . Видно, що у просторовій області  $r >$  концентрація частинок дорівнює нулю. Отже, в момент часу  $t$  частинки перебувають всередині сфери радіуса  $r = vt$ , причому концентрація

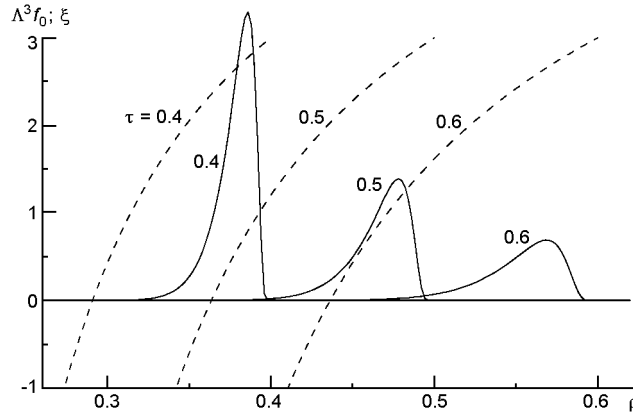


Рис. 1. Просторова залежність концентрації і анізотропії частинок у різні моменти часу. Безрозмірна величина  $\Lambda^3 f_0$  представлена суцільними кривими, анізотропія — штриховими. Числа біля кривих — значення безрозмірного часу

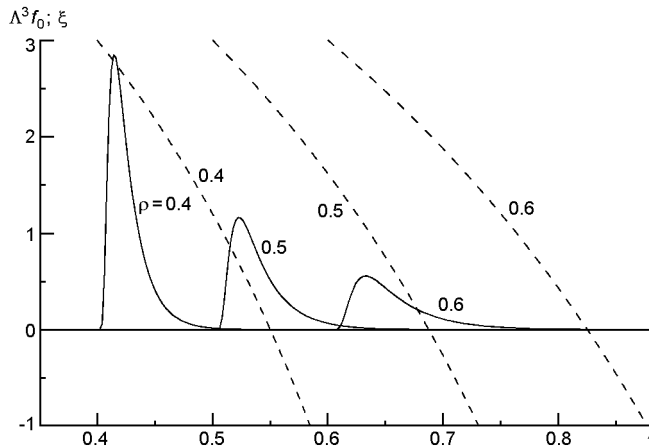


Рис. 2. Залежність від часу концентрації і анізотропії КП. Суцільні криві відповідають величині  $\Lambda^3 f_0$ , штрихові — анізотропії. Числа біля кривих — значення безрозмірної координати

КП максимальна поблизу границі області, зайнятої частинками (рис. 1). З часом просторова область, заповнена частинками, розширюється, а максимальне значення концентрації КП зменшується.

Суцільні криві на рис. 2 ілюструють залежність функції  $f_0$  від часу. Значення безрозмірної координати наведено біля відповідних кривих. В точці перші частинки з'являються в момент часу  $\tau = r/v$ . При умові  $r < r_0$  концентрація КП дорівнює нулю, оскільки тоді частинки не встигають досягти даної точки простору. Після прибуття перших частинок у момент часу  $t = r/v$  концентрація частинок швидко збільшується до максимального значення (рис. 2). Максимум інтенсивності виявляється тим більшим, що менша відстань до джерела частинок. Частинки з'являються в даній точці простору у вигляді короткочасного імпульсу, потім їхня концентрація швидко стає дуже малою

(рис. 2). Відмітимо, що малокутове наближення є справедливим лише обмежений час після приходу в дану точку простору перших частинок, коли їхня переважна кількість рухається в напрямку, близькому до радіального.

### АНІЗОТРОПІЯ КУТОВОГО РОЗПОДІЛУ ЧАСТИНОК

Розглянемо еволюцію анізотропії кутового розподілу СКП. Потік частинок пропорційний величині

$$f_1(\theta, \varphi) = d \int_0^{\theta} \sin \theta' \cos \theta' f(\theta', \varphi) d\theta' \quad (23)$$

У наближенні малих кутів ( $\theta \ll 1$ ) можна поширити інтегрування у формулі (23) до нескінченності. Використовуючи змінну (5), отримаємо

$$f_1(\theta, \varphi) = d \int_0^{\theta} \frac{4}{3} f(\theta', \varphi) d\theta' \quad (24)$$

Після виконання інтегрування відносно кутової змінної в формулі (24) отримаємо вираз для образу Лапласа функції  $f_1$ :

$$f_1(\theta, \varphi) = \frac{1}{w} \int_0^{\theta} \frac{4}{3} \frac{w}{w^2} d\theta' \quad (25)$$

Після виконання оберненого перетворення Лапласа дістанемо співвідношення

$$f_1(\theta, \varphi) = \frac{1}{4} \int_0^{\theta} \frac{8}{3} (1 - \theta')^{n-1} n^2 \exp \left( -\frac{n^2 \theta'^2}{2} \right) d\theta' \quad (26)$$

Анізотропія кутового розподілу частинок визначається формулою [13, 18, 32]

$$A(\theta, \varphi) = 3 \frac{f_1(\theta, \varphi)}{f_0(\theta, \varphi)} \quad (27)$$

Враховуючи співвідношення (22), (26), дістанемо вираз для анізотропії кутового розподілу КП:

$$A(\theta, \varphi) = 3 \frac{11}{5} \frac{8}{2} \quad (28)$$

У момент приходу в дану точку простору перших частинок ( $\theta = 0$ ) анізотропія (28) характеризується максимальним значенням ( $A = 3$ ). Відмітимо, що співвідношення (28) було отримане у наближенні малих кутів розсіяння. З часом кутовий розподіл частинок стає все більш ізотропним, і умови застосування даного наближення порушуються.

Штрихові криві на рис. 1 ілюструють просторову залежність анізотропії КП (28) у різні моменти часу. Анізотропія КП максималь-

на поблизу границі області, зайнятої частинками, і її величина зменшується при зменшенні координати (рис. 1). Виявляється, що в області максимальної інтенсивності КП має місце значна анізотропія кутового розподілу частинок, а значення величини  $\epsilon$  близьким до максимального (рис. 1).

На рис. 2 наведено залежність від часу анізотропії кутового розподілу частинок в даній точці простору (штрихові криві). У момент приходу в дану точку простору перших частинок ( $\theta = 0$ ) анізотропія КП максимальна, потім анізотропія монотонно зменшується з часом і стає від'ємною. Від'ємне значення анізотропії, якому відповідає потік частинок в напрямку до джерела, обумовлене тим, що переважна кількість частинок в даний момент часу вже розташована поза сферою радіуса  $R$ . Відмітимо, проте, що у даному наближенні розглянуто частинки, напрям руху яких мало відрізняється від радіального ( $\theta \ll 1$ ).

#### ФУНКЦІЯ КУТОВОГО РОЗПОДІЛУ СОНЯЧНИХ КОСМІЧНИХ ПРОМЕНІВ

Образ Лапласа функції розподілу КП визначено співвідношенням (10), причому показник експоненти в цій формулі пропорційний змінній  $\theta$  (5). Таким чином, образ Лапласа функції розподілу частинок (10) характеризується експоненційною залежністю від величини  $\theta^2 \ll 1$ . Розклавши співвідношення (10) в ряд відносно малої величини  $\theta$ , дістанемо

$$f(\theta, \theta, \theta) = \frac{1}{w} - \frac{w}{w^2} \frac{w}{2w^3} - \frac{w^2}{w^2} \frac{w^2}{w^2}. \quad (29)$$

У формулі (29) ми обмежились квадратичним відносно малої величини доданком.

Використовуючи співвідношення (11), (12), здобудемо такий вираз для образу Лапласа функції розподілу КП:

$$f(\theta, \theta, \theta) = \frac{1}{8} \frac{1}{\theta^2} \frac{1}{\sqrt{\text{ch} \sqrt{\theta}} \sqrt{\text{sh} \sqrt{\theta}}} - \frac{1}{8} \frac{1}{\theta^2} \frac{\text{sh}^{5/2} \sqrt{\theta}}{[\sqrt{\text{ch} \sqrt{\theta}} \sqrt{\text{sh} \sqrt{\theta}}]^2} - \frac{1}{8} \frac{1}{\theta^2} \frac{\text{sh}^{7/2} \sqrt{\theta}}{[\sqrt{\text{ch} \sqrt{\theta}} \sqrt{\text{sh} \sqrt{\theta}}]^3} \frac{1}{2}. \quad (30)$$

Обернене перетворення Лапласа (19) виконується вздовж прямої  $L$ , паралельної уявній осі. Замкнемо контур інтегрування дугою нескінченно великого радіуса, яка розташована у лівій півплощині комплексної змінної  $\theta$ . Інтеграл вздовж цієї дуги дорівнює нулю, а інтегрування вздовж замкненого контуру, який складається з прямої  $L$  і дуги нескінченно великого радіуса, зводиться до обчислення лишків в особливих точках підінтегральної функції. Особливі точки функції



$f(\rho, \theta, \varphi)$  (30) розташовані на від'ємній частині дійсної осі у точках

$$x_n = -\frac{x_n^2}{2}, \quad n = 1, \quad (31)$$

де  $x_n$  — додатні корені рівняння

$$x = \operatorname{tg} x. \quad (32)$$

Образ Лапласа функції  $f(\rho, \theta, \varphi)$  (30) на дійсній осі комплексної змінної  $s$  має вигляд

$$\begin{aligned} f(s, \rho, \theta, \varphi) &= \frac{1}{8^{2/3}} \frac{|s|^{3/2}}{\sqrt{|s|} \cos \sqrt{|s|} \sin \sqrt{|s|}} \\ &= \frac{1}{8^{2/3}} \frac{|s|^{5/2} \sin \sqrt{|s|}}{[\sqrt{|s|} \operatorname{ch} \sqrt{|s|} \sin \sqrt{|s|}]^2} \\ &= \frac{1}{8^{2/3}} \frac{|s|^{7/2} \sin^2 \sqrt{|s|}}{[\sqrt{|s|} \cos \sqrt{|s|} \sin \sqrt{|s|}]^3} \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (33)$$

Після обчислення лишків підінтегральної функції (19), (33) в точках  $x_n$  (31) дістанемо такий вираз для функції розподілу КП:

$$f(\rho, \theta, \varphi) = \frac{1}{4^{2/3}} \left[ f_1(\rho, \theta, \varphi) - f_2(\rho, \theta, \varphi) + \frac{2}{2} f_3(\rho, \theta, \varphi) \right], \quad (34)$$

де

$$f_1(\rho, \theta, \varphi) = \frac{x_n^3}{\sin x_n} \exp \left( -\frac{x_n^2}{2} \right), \quad (35)$$

$$f_2(\rho, \theta, \varphi) = \frac{x_n^3}{\sin x_n} \left( 5 - 2 \frac{x_n^2}{2} \right) \exp \left( -\frac{x_n^2}{2} \right), \quad (36)$$

$$f_3(\rho, \theta, \varphi) = \frac{1}{2} \frac{x_n^3}{\sin x_n} x_n^2 \left( 40 - 30 \frac{x_n^2}{2} + 4 \frac{x_n^4}{4} \right) \exp \left( -\frac{x_n^2}{2} \right). \quad (37)$$

Запишемо співвідношення для функції розподілу КП (34) — (37) у такому вигляді:

$$f(\rho, \theta, \varphi) = \frac{1}{4^{2/3}} \left[ f_1(\rho, \theta, \varphi) - f_2(\rho, \theta, \varphi) + \frac{2}{2} f_3(\rho, \theta, \varphi) \right]. \quad (38)$$

Припустимо, що частинки рухаються переважно у радіальному напрямку ( $\theta \ll 1$ ). Змінна  $\varphi$  (5) пропорційна величині  $\rho^2$ . Таким чином, вираз для функції розподілу КП (38) записано з точністю до величини  $\rho^4$ . З тією ж точністю можемо переписати співвідношення (38) у вигляді

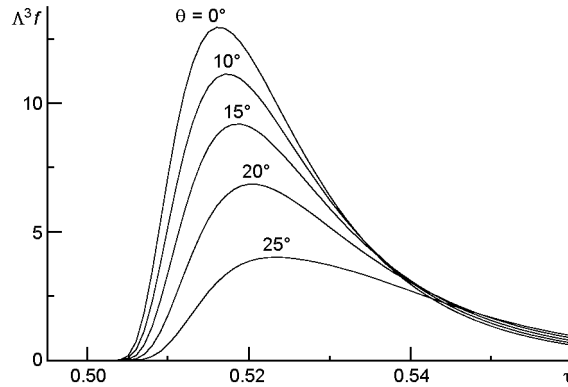


Рис. 3. Залежність від часу функції розподілу частинок у точці  $r = 0.5$ . Числа біля кривих — значення кута

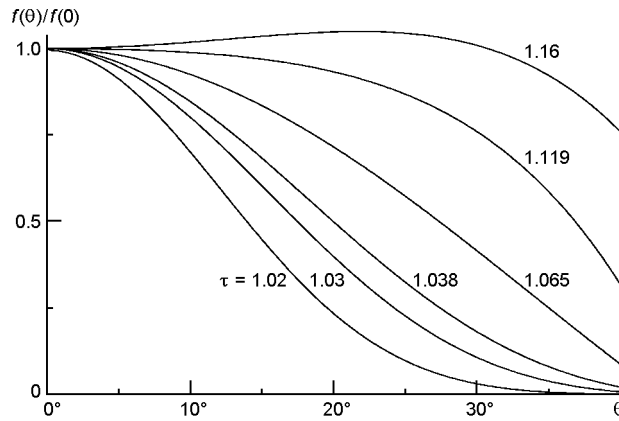


Рис. 4. Залежність функції розподілу КП від кута між швидкістю частинки і радіальним напрямком у точці  $r = 1$ . Числа біля кривих — значення безрозмірного часу

$$f(\theta, r, \tau) = \frac{1}{4} {}_2F_3\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}; \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{2}\right); \frac{1}{1} {}_1F_3\left(\frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}\right); \dots, \quad (39)$$

де  ${}_2F_3(a; c; x)$  — вироджена гіпергеометрична функція.

На рис. 3 представлено залежність від часу функції розподілу (39) у точці  $r = 0.5$ . Значення кута  $\theta$  приведено біля відповідних кривих. Функція розподілу КП в залежності від часу (при даному значенні кута між швидкістю частинки і радіальним напрямком) збільшується до максимального значення, а потім монотонно зменшується (рис. 3). Що більшим є кут  $\theta$  між швидкістю частинки і радіальним напрямком, то меншим є максимальне значення функції розподілу КП і тим пізніше набувається максимум величини  $f(39)$  в даній точці простору (рис. 3).

На рис. 4 наведено залежність функції розподілу КП (39) від кута  $\theta$  в точці  $r = 1$ . Значення безрозмірного часу приведено біля відповідних кривих. Функцію розподілу КП (39) нормовано на її значення в

точці  $\mu = 0$ . Відмітимо, що максимум інтенсивності КП у точці  $\mu = 1$  має місце у момент часу  $t = 1.065$ . В моменти часу  $t = 1.038$  і  $t = 1.119$  концентрація КП у точці  $\mu = 1$  дорівнює половині максимальної. Криві, які відповідають цим моментам часу, також наведено на рис. 4. Видно, що найбільш анізотропний розподіл частинок в даній точці простору має місце на початку зростання інтенсивності КП. Так, наприклад, у точці  $\mu = 1$  в момент часу  $t = 1.02$  швидкість майже усіх частинок утворює з радіальним напрямком кут, який не перевищує  $30^\circ$  (рис. 4). З часом кутовий розподіл КП поступово стає більш ізотропним.

### КУТОВИЙ РОЗПОДІЛ КОСМІЧНИХ ПРОМЕНІВ У ДИФУЗІЙНОМУ НАБЛИЖЕННІ

Розглянемо функцію розподілу СКП на великому проміжку часу, який минув після інжекції частинок високої енергії у міжпланетне середовище. Припустимо, що час, який минув після інжекції частинок високої енергії, значно перевищує час поширення частинок до даної точки простору ( $t \gg r/v$ ) і характерний час розсіяння КП ( $t \gg \tau/v$ ). В цьому випадку частинки встигають багаторазово розсіятись, а функція розподілу КП стає близькою до ізотропної.

Вводимо нову змінну

$$\mu = \cos \theta. \quad (40)$$

Кінетичне рівняння (3) може бути записане у вигляді

$$\frac{df}{dt} + \frac{df}{d\mu} \frac{1 - \mu^2}{2} = \frac{1}{2} (1 - \mu^2) f - \frac{f(\mu)}{8} \left( \frac{d}{dt} \right) \left( \frac{d}{d\mu} \right) \left( \frac{1 - \mu^2}{2} \right). \quad (41)$$

Представимо функцію розподілу КП у вигляді суми [5, 17, 19, 20]

$$f(\mu, t) = \frac{1}{2} f_0(\mu, t) + f_1(\mu, t), \quad (42)$$

де величина  $f_0$  є ізотропною складовою функції розподілу КП, а  $f_1$  — малою анізотропною складовою. Функція  $f_0$  визначає середнє значення функції розподілу КП

$$\langle f \rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} f_0, \quad (43)$$

а анізотропна складова задовольняє рівняння

$$\frac{d}{dt} f_1(\mu, t) = 0. \quad (44)$$

Після інтегрування кінетичного рівняння відносно  $r$  дістанемо рівняння неперервності:

$$\frac{f_0}{2} - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 f \frac{(\cdot)(\cdot)}{8^2 3^2} \quad (45)$$

Враховуючи, що анізотропна складова функції розподілу КП мала порівняно з ізотропною складовою ( $f \ll f_0$ ), з кінетичного рівняння (41) можна дістати для величини  $f$  [5, 14, 20]:

$$- (1 - r^2) \frac{df}{dr} = 2 \frac{f}{r} - \frac{f_0}{2}. \quad (46)$$

Відмітимо, що права частина рівняння (46) пропорційна градієнту ізотропної складової функції розподілу КП.

Розв'язок рівняння (46), який задовольняє умову (44), має вигляд [5, 16]

$$f(r, \theta, t) = \frac{f_0}{4} \frac{\exp \frac{2}{3} \left( \frac{r^2}{3} - t \right)}{\operatorname{sh} \frac{2}{3} \left( \frac{r^2}{3} - t \right)} - 1. \quad (47)$$

При ізотропному розсіянні частинок має місце експоненційна залежність функції розподілу КП (47) від косинуса кута між швидкістю частинки і радіальним напрямком [5, 7, 14, 16, 17, 20].

На основі виразу для ізотропної складової функції розподілу КП (47) можна обчислити величину  $f_1$  (23):

$$f_1(r, \theta, t) = \frac{1}{4} \frac{df}{dr} f(r, \theta, t) = \frac{f_0}{4} 2 \operatorname{cth} \frac{2}{3} \left( \frac{r^2}{3} - t \right), \quad (48)$$

де  $\operatorname{cth} x$  — гіперболічний котангенс аргумента  $x$ . З умови  $t \gg 1$  маємо

$$f_1(r, \theta, t) = \frac{1}{3} \frac{f_0}{r}. \quad (49)$$

Підставимо функцію  $f_1$  (49) у рівняння неперервності (45) і дістанемо рівняння дифузії КП:

$$\frac{f_0}{3} - \frac{1}{3} \frac{d}{dt} \int_0^1 \frac{f_0}{8^2 3^2} \quad (50)$$

Розв'язок цього рівняння має вигляд

$$f_0(r, \theta, t) = \frac{3^{3/2}}{16^{5/2} 3^{3/2}} \exp \frac{3}{4} \left( \frac{r^2}{3} - t \right). \quad (51)$$

З наведеної формули випливає, що при великих значеннях  $t$  концентрація СКП зменшується з часом пропорційно  $t^{-3/2}$ .

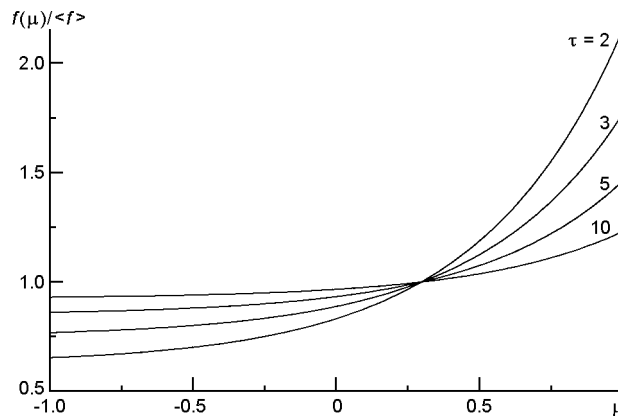


Рис. 5. Залежність функції розподілу КП (52) від величини  $\mu = \cos \theta$  в точці  $\theta = 1$ . Числа біля кривих — значення безрозмірного часу

Запишемо вираз для функції розподілу КП (42), нормованої на її середнє значення (43):

$$\frac{f}{\langle f \rangle} = 1 + \frac{2f}{f_0}, \quad (52)$$

де анізотропна складова функції розподілу КП  $f$  визначається співвідношенням (47). На рис. 5 наведено залежність функції розподілу КП (52) від величини  $\mu$  в точці  $\theta = 1$ . Значення безрозмірного часу  $\tau$  наведено біля відповідних кривих. Ізотропна складова функції розподілу КП  $f_0(\mu, \tau)$  задовольняє співвідношення (51). Функція розподілу КП має максимум при значенні  $\mu = 1$ , яке дорівнює одиниці ( $\theta = 0$ ). При збільшенні  $\tau$  функція розподілу КП монотонно збільшується (рис. 5). Таким чином, кількість частинок, які рухаються в напрямку від джерела, перевищує кількість частинок, які рухаються у протилежному напрямку. Розподіл частинок є суттєво анізотропним в момент часу  $\tau = 2$  і майже ізотропним в момент часу  $\tau = 10$ . Відмітимо, що ізотропний розподіл частинок відповідає прямій, паралельній осі абсцис (при значенні ординати, яка дорівнює одиниці).

## ВИСНОВКИ

Розглянуто поширення СКП у міжпланетному середовищі на основі кінетичного рівняння, яке описує розсіяння частинок на малі кути. Здобуто вираз для образу Лапласа функції розподілу КП, досліджено просторовий розподіл СКП при миттєвій інжекції частинок точковим джерелом. Показано, що у момент часу  $t$  частинки перебувають всередині сфери радіуса  $r = vt$ , причому концентрація КП максимальна поблизу границі області, в якій перебувають частинки. На початковій стадії анізотропного спалаху має місце різкий сплеск інтенсивності

частинок. Анізотропія кутового розподілу СКП максимальна у момент приходу в дану точку простору перших частинок, потім величина анізотропії монотонно зменшується з часом.

Отримано аналітичний вираз для функції розподілу частинок в наближенні малих кутів. Досліджено еволюцію функції кутового розподілу СКП, показано, що з часом кутовий розподіл частинок стає менш анізотропним. Якщо час, який пройшов з моменту інжекції частинок, значно перевищує час поширення частинок до точки реєстрації і обернену частоту зіткнень, то функцію розподілу частинок можна подати у вигляді суми ізотропної і малої анізотропної складових. Показано, що в цьому випадку має місце експоненційна залежність функції розподілу КП від косинуса кута між швидкістю частинки і радіальним напрямком.

## ФІНАНСУВАННЯ РОБОТИ

Робота фінансувалась у рамках планового фінансування установ Національної академії наук України.

1. Базилевская Г. А., Гольнская Р. М. О распространении солнечных космических лучей в межпланетной среде с учетом адиабатической фокусировки. *Геомагнетизм и аэронавтика*. 1989. 29. № 2. С. 204—209.
2. Гальперин Б. А., Топтыгин И. Н., Фрадкин А. А. Рассеяние частиц магнитными неоднородностями в сильном магнитном поле. *ЖЭТФ*. 1971. 60. № 3. С. 972.
3. Топтыгин И. Н. О временной зависимости интенсивности космических лучей на анизотропной стадии солнечных вспышек. *Геомагнетизм и аэронавтика*. 1972. 12. № 6. С. 989—995.
4. Топтыгин И. Н. *Космические лучи в межпланетных магнитных полях*. — М.: Наука, 1983. 304 с.
5. Beeck J., Wibberenz G. Pitch angle distributions of solar energetic particles and the local scattering properties of the interplanetary medium. *Astrophys. J.* 1986. 311. P. 437.
7. Bieber J. W., Evenson P. A., Pomerantz M. A. Focusing anisotropy of solar cosmic rays. *J. Geophys. Res.* 1986. 91. NA8. P. 8713.
6. Bieber J. W., Clem J., Evenson P., et al. Giant ground level enhancement of relativistic solar protons on 2005 January 20. *Astrophys. J.* 2013. 771. 52. 13 p.
8. Bombardieri D. J., Duldig M. L., Humble J. E., Michael K. J. On improved model for relativistic solar proton acceleration applied to the 2005 January 20 and earlier events. *Astrophys. J.* 2008. 682. P. 1315—1327.
9. Cramp J. L., Duldig M. L., Fluckiger E. O., et al. The October 22, 1989 solar cosmic ray enhancement. An analysis of the anisotropy and spectral characteristic. *J. Geophys. Res.* 1997. 102. P. 24237—24248
10. Danos R. J., Fiege J. D., Shalchi A. Numerical analysis of the Fokker-Planck equation with adiabatic focusing. Isotropic pitch angle scattering. *Astrophys. J.* 2013. 772. 35. 12 p.
11. Debrunner H., Lockwood J. A., Ryan J. M. The solar flare event on 1990 May 24. Evidence for two separate particle accelerations. *Astrophys. J.* 1992. 387. № 1. P. L51—L54.

12. Dorman L. I., Katz M. E. Cosmic ray kinetics in space. *Space Sci. Rev.* 1977. 70. P. 529—575.
13. Droge W., Kartavych Y. Y., Klecker B., Kovaltsov G. A. Anisotropic three-dimensional focused transport of solar energetic particles in the inner heliosphere. *Astrophys. J.* 2010. 709. P. 912—919.
14. Earl J. A. Analytical description of charged particle transport along arbitrary guiding field configurations. *Astrophys. J.* 1981. 251. P. 739.
15. Fedorov Yu. I. Intensity of cosmic rays at the initial stage of a solar flare. *Kinemat. Phys. Celest. Bodies.* 2018. 34. № 1. P. 1—12.
16. Fedorov Yu. I. Solar cosmic ray distribution function under prolonged particle injection. *Kinemat. Phys. Celest. Bodies.* 2019. 35. № 5. P. 203—216.
17. Fedorov Yu. I., Stehlik M. SCR steady state distribution function and scattering properties of the interplanetary medium. *Astrophys. Space Sci.* 2006. 302. P. 99.
18. Fisk L. A., Axford W. I. Anisotropies of solar cosmic rays. *Solar Phys.* 1969. 7. P. 486—498.
19. Kagashvili E. Kh., Zank G. P., Lu J. Y., Droge W. Transport of energetic charged particles. 2. Small-angle scattering. *J. Plasma Phys.* 2004. 70, part 5. P. 505—532.
20. Kunstmann J. E. A new transport mode for energetic charged particles in magnetic fluctuations superposed on a diverging mean field. *Astrophys. J.* 1979. 229. P. 812.
21. Li G., Lee M. A. Focused transport of solar energetic particles in interplanetary space and the formation of the anisotropic beam-like distribution of particles in the onset phase of large gradual events. *Astrophys. J.* 2019. 875. P. 116. 14 p.
22. Malkov M. A. Exact solution of the Fokker-Planck equation for isotropic scattering. *Phys. Rev. D.* 2017. 95. P. 023007.
23. McCracken K. G., Moraal H., Stoker P. H. Investigation of the multiple-component structure of the 20 January 2005 cosmic ray ground level enhancement. *J. Geophys. Res.* 2008. 113, A1202. 18 p.
24. Miroshnichenko L. I., Perez-Peraza J. A. Astrophysical aspects in the studies of solar cosmic rays. *Int. J. Modern Phys.* 2008. 23. № 1. P. 1.
25. Moraal H., McCracken K. G. The time structure of ground level enhancement in solar cycle 23. *Space Sci. Rev.* 2012. 171. P. 85—95.
26. Plainaki C., Belov A., Mavromichalaki H., Yanke V. Modeling ground level enhancement. Event of 20 January 2005. *J. Geophys. Res.* 2007. 112, A 04102. 16 p.
27. Ruffolo D. Effect of adiabatic deceleration on the focused transport of solar cosmic rays. *Astrophys. J.* 1995. 442. № 2. P. 861—874.
28. Shakhov B. A., Stehlik M. The Fokker-Planck equation in the second order pitch angle approximation and its exact solution. *J. Quant. Spectr. Radiative Transfer.* 2003. 78. P. 31—39.
29. Shea M. A., Smart D. F. Space weather and the ground level solar proton events of the 23-rd solar cycle. *Space Sci. Rev.* 2012. 171. P. 161.
30. Simnett G. M. The timing of relativistic proton acceleration in the 20 January 2005 flare. *Astron. and Astrophys.* 2006. 445. P. 715—724.
31. Vashenyuk E. V., Balabin Yu. V., Perez-Peraza et al. Some features of the sources of relativistic particles at the Sun in the solar cycles 21-23. *Adv. Space Res.* 2006. 38. P. 411—418.
32. Volk H. J. Cosmic ray propagation in interplanetary space. *Rev. Geophys. Space Phys.* 1975. 13. № 4. P. 547—566.

## REFERENCES

1. Bazilevskaya G. A., Golynskaya R. M. (1989) On the propagation of solar cosmic rays in an interplanetary medium taking into account adiabatic focusing. *Geomagnetizm i Aeronomiia*. 29(2). 204—209 (in Russian).
2. Galperin B. A., Toptygin I. N., Fradkin A. A. (1971) Rasseyaniye chastits magnitnymi neodnorodnostyami v sil'nom magnitnom pole. *Zhurnal Eksperimentalnoi i Teoreticheskoi Fiziki*. 60(3). 972 (in Russian).
3. Toptygin I. N. (1972) O vremennoy zavisimosti intensivnosti kosmicheskikh luchey na anizotropnoy stadii solnechnykh vspyshek. *Geomagnetizm i Aeronomiia*. 1972. 12. 989—995 (in Russian).
4. Toptygin I. N. (1983) *Kosmicheskiye luchy v mezplanetnykh magnitnykh polyakh*. M.: Nauka. 304 p. (in Russian).
5. Beeck J., Wibberenz G. (1986) Pitch angle distributions of solar energetic particles and the local scattering properties of the interplanetary medium. *Astrophys. J.* 311. 437.
7. Bieber J. W., Evenson P. A., Pomerantz M. A. (1986) Focusing anisotropy of solar cosmic rays. *J. Geophys. Res.* 91(NA8). 8713.
6. Bieber J. W., Clem J., Evenson P., et al. (2013) Giant ground level enhancement of relativistic solar protons on 2005 January 20. *Astrophys. J.* 771. 52. 13.
8. Bombardieri D. J., Duldig M. L., Humble J. E., Michael K. J. (2008) On improved model for relativistic solar proton acceleration applied to the 2005 January 20 and earlier events. *Astrophys. J.* 682. 1315—1327.
9. Cramp J. L., Duldig M. L., Fluckiger E. O., et al. (1997) The October 22, 1989 solar cosmic ray enhancement. An analysis of the anisotropy and spectral characteristic. *J. Geophys. Res.* 102. 24237—24248.
10. Danos R. J., Fiege J. D., Shalchi A. (2013) Numerical analysis of the Fokker-Planck equation with adiabatic focusing. Isotropic pitch angle scattering. *Astrophys. J.* 772. 35. 12.
11. Debrunner H., Lockwood J. A., Ryan J. M. (1992) The solar flare event on 1990 May 24. Evidence for two separate particle accelerations. *Astrophys. J.* 387(1). L51—L54.
12. Dorman L. I., Katz M. E. (1977) Cosmic ray kinetics in space. *Space Sci. Rev.* 70. 529—575.
13. Droge W., Kartavych Y. Y., Klecker B., Kovaltsov G. A. (2010) Anisotropic three-dimensional focused transport of solar energetic particles in the inner heliosphere. *Astrophys. J.* 709. 912—919.
14. Earl J. A. (1981) Analytical description of charged particle transport along arbitrary guiding field configurations. *Astrophys. J.* 251. 739.
15. Fedorov Yu. I. (2018) Intensity of cosmic rays at the initial stage of a solar flare. *Kinematics Phys. Celestial Bodies*. 34(1). 1—12.
16. Fedorov Yu. I. (2019) Solar cosmic ray distribution function under prolonged particle injection. *Kinematics Phys. Celestial Bodies*. 35(5). 203—216.
17. Fedorov Yu. I., Stehlik M. (2006) SCR steady state distribution function and scattering properties of the interplanetary medium. *Astrophys. Space Sci.* 302. 99.
18. Fisk L. A., Axford W. I. (1969) Anisotropies of solar cosmic rays. *Solar Phys.* 7. 486—498.
19. Kagashvili E. Kh., Zank G. P., Lu J. Y., Droge W. (2004) Transport of energetic charged particles. 2. Small-angle scattering. *J. Plasma Phys.* 70(5). 505—532.
20. Kunstmann J. E. (1979) A new transport mode for energetic charged particles in magnetic fluctuations superposed on a diverging mean field. *Astrophys. J.* 229. 812.



21. Li G., Lee M. A. (2019) Focused transport of solar energetic particles in interplanetary space and the formation of the anisotropic beam-like distribution of particles in the onset phase of large gradual events. *Astrophys. J.* 875. 116. 14.
22. Malkov M. A. (2017) Exact solution of the Fokker-Planck equation for isotropic scattering. *Phys. Rev. D.* 95. P. 023007.
23. McCracken K. G., Moraal H., Stoker P. H. (2008) Investigation of the multiple-component structure of the 20 January 2005 cosmic ray ground level enhancement. *J. Geophys. Res.* 113(A1202). 18 p.
24. Miroshnichenko L. I., Perez-Peraza J. A. (2008) Astrophysical aspects in the studies of solar cosmic rays. *Int. J. Modern Phys.* 23. № 1. P. 1.
25. Moraal H., McCracken K. G. (2012) The time structure of ground level enhancement in solar cycle 23. *Space Sci. Rev.* 171. P. 85—95.
26. Plainaki C., Belov A., Mavromichalaki H., Yanke V. (2007) Modeling ground level enhancement. Event of 20 January 2005. *J. Geophys. Res.* 112(A04102). 16.
27. Ruffolo D. (1995) Effect of adiabatic deceleration on the focused transport of solar cosmic rays. *Astrophys. J.* 442(2). 861—874.
28. Shakhov B. A., Stehlik M. (2003) The Fokker-Planck equation in the second order pitch angle approximation and its exact solution. *J. Quant. Spectr. Radiative Transfer.* 78. 31—39.
29. Shea M. A., Smart D. F. (2012) Space weather and the ground level solar proton events of the 23-rd solar cycle. *Space Sci. Rev.* 171. 161.
30. Simnett G. M. (2006) The timing of relativistic proton acceleration in the 20 January 2005 flare. *Astron. and Astrophys.* 445. 715—724.
31. Vashenyuk E. V., Balabin Yu. V., Perez-Peraza J., et al. (2006) Some features of the sources of relativistic particles at the Sun in the solar cycles 21-23. *Adv. Space Res.* 38. 411—418.
32. Volk H. J. (1975) Cosmic ray propagation in interplanetary space. *Rev. Geophys. Space Phys.* 13(4). 547—566.

Ю. И. Федоров

Главная астрономическая обсерватория Национальной академии наук Украины,  
Киев, Украина

#### ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КОСМИЧЕСКИХ ЛУЧЕЙ НА НАЧАЛЬНОЙ СТАДИИ СОЛНЕЧНОГО ПРОТОННОГО СОБЫТИЯ

На основе кинетического уравнения, описывающего многократное рассеяние заряженных частиц на малые углы, рассмотрено распространение солнечных космических лучей в межпланетной среде. Предполагается, что частицы высокой энергии инжектированы в межпланетное пространство мгновенным, точечным источником. Исследовано пространственно-временное распределение концентрации и анизотропии быстрых частиц на анизотропной фазе вспышки солнечных космических лучей. В малоугловом приближении получено аналитическое выражение для функции распределения космических лучей, исследована эволюция углового распределения частиц высокой энергии. Показано, что при слабом рассеянии заряженных частиц высокой энергии на флуктуациях межпланетного магнитного поля на начальной стадии вспышки солнечных космических лучей имеет место импульсное возрастание их интенсивности. Анизотропия углового распределения солнечных космических лучей монотонно уменьшается со временем и имеет максимальное значение в момент прихода в данную точку пространства первых частиц.

**Ключевые слова:** космические лучи, кинетическое уравнение, межпланетная среда.

*Yu. I. Fedorov*

Main Astronomical Observatory of the National Academy of Sciences of Ukraine,  
Kyiv, Ukraine

THE COSMIC RAY DISTRIBUTION FUNCTION ON THE INITIAL STAGE  
OF THE SOLAR PROTON EVENT

The propagation of solar cosmic rays in the interplanetary medium is considered based on the kinetic equation, describing multiple small-angle scattering of charged particles. The energetic particles are assumed to be injected in the interplanetary medium by the instantaneous, point-like source. The spatio-temporal distribution of high-velocity particle density and anisotropy is studied during the anisotropic phase of solar cosmic ray enhancement. The analytical expression of cosmic ray distribution function in the small-angle approximation is derived; the evolution of energetic particle angular distribution is investigated. It is shown that under weak scattering of charged energetic particles on the interplanetary magnetic field fluctuations the impulsive enhancement of their intensity occurs. The anisotropy of angular solar cosmic ray distribution decreases with time steadily and has a maximal value in the instant of first particle arrival in the given point of space.

**Key words:** cosmic rays, kinetic equation, interplanetary medium.

Стаття надійшла до редакції 16.01.2020

Після доопрацювання 06.02.2020

Прийнята до друку 06.02.2020