

doi: <https://doi.org/10.15407/kfnt2020.02.034>

УДК 551.511.31, 534.015.1

**О. К. Черемних, Є. І. Крючков,
А. К. Федоренко, С. О. Черемних**

Інститут космічних досліджень Національної академії наук України
та Державного космічного агентства України
Просп. Академіка Глушкова, 40, к. 4/1, м. Київ-187, 03187
oleg.cheremnykh@gmail.com, john_k@i.ua,
fedorenkoak@gmail.com

Двочастотний режим поширення акустико-гравітаційних хвиль в атмосфері Землі

З багаторічних теоретичних і експериментальних досліджень акустико-гравітаційних хвиль (АГХ) відомо, що вони значною мірою визначають динаміку і енергетичний баланс атмосфер планет і Сонця. Лінійні хвильові збурення в атмосфері можуть бути описані за допомогою системи рівнянь другого порядку для вертикальної і горизонтальної складових збуреної швидкості. З цієї системи випливає, що малі збурення в атмосфері можна розглядати як коливання зв'язаних осциляторів з двома ступенями свободи. Це спонукає до більш детального вивчення лінійних акустико-гравітаційних хвильових мод в атмосфері за допомогою добре розроблених методів теорії коливань. Для вивчення малих збурень в атмосфері Землі в роботі використано методи теорії зв'язаних коливальних систем. Показано, що акустико-гравітаційні хвилі в ізотермічній атмосфері можна розглядати як суперпозицію коливань, які відбуваються одночасно на двох власних частотах: акустичній та гравітаційній. Отримано рівняння для власних частот коливань, а також для складових збуреної швидкості при заданих початкових умовах. Проаналізовано зміни складових збуреної швидкості в залежності від часу і виявлено нові особливості їхньої поведінки. Всі розв'язки приведено з використанням тільки дійсних величин. Це зручніше для зіставлення з даними спостережень, ніж зазвичай прийняте в теорії акустико-гравітаційних хвиль комплексне подання. Вивчено умови, при яких в атмосфері може реалізуватися звичайний одночастотний режим коливань. Результати роботи можуть бути використані для пояснення деяких особливостей

спутникових спостережень хвильових збурень в атмосфері Землі, які виходять за рамки відомих теоретичних уявлень.

Ключові слова: акустико-гравітаційна хвиля, атмосфера Землі, зв'язані осцилятори.

ВСТУП

Акустико-гравітаційні хвилі (АГХ) значною мірою визначають динаміку і енергетичний баланс атмосфер планет і Сонця [21, 22, 35—37]. В ході багаторічних теоретичних і експериментальних досліджень цих хвиль було встановлено, що АГХ є важливими транспортними агентами, що забезпечують вплив на іоносферу джерел «знизу» (тропосферних і сейсмічних процесів) і «зверху» (геомагнітна і сонячна активність). Значний внесок АГХ у атмосферні динамічні процеси пов'язаний, з одного боку, з ефективним перенесенням енергії та імпульсу за допомогою цих хвиль як у горизонтальній площині, так і між різними висотними рівнями атмосфери. З іншого боку, АГХ можуть служити джерелами конвекції і атмосферної турбулентності, сприяючи перерозподілу енергії збурень в атмосфері між різними масштабами від декількох тисяч кілометрів до сотень метрів.

Протягом останніх трьох десятиліть були досягнуті значні успіхи в розвитку нелінійної теорії АГХ [23—26, 29, 31], а також у чисельному моделюванні цих хвиль в реалістичній атмосфері з урахуванням в'язкості і теплопровідності [17, 27, 34]. Однак в останній час нами був отриманий ряд цікавих результатів в рамках простої лінійної теорії АГХ. Наприклад, врахування взаємодії АГХ з неоднорідними в горизонтальній площині течіями може призводити до посилення амплітуд хвиль і виділених азимутів їхнього руху [9, 20]. Врахування вертикальної неізотермічності атмосфери також дуже впливає на поширення АГХ [6, 7]. Крім цього, в рамках лінійної теорії було показано можливість існування нової еванесцентної хвильової моди [19]. Ці результати вказують на можливість наявності в ізотермічній атмосфері ще не вивчених лінійних коливальних режимів.

Лінійні хвильові збурення в атмосфері можуть бути описані за допомогою системи рівнянь другого порядку для вертикальної і горизонтальної складових збуреної швидкості [32]. З цієї системи випливає, що малі збурення в атмосфері можна розглядати як коливання зв'язаних осциляторів з двома ступенями свободи. Це спонукає детальніше вивчити лінійні акустико-гравітаційні хвильові моди в атмосфері з допомогою добре розроблених методів теорії коливань [1, 4, 10, 12, 14]. Слід відзначити також схожість поведінки дисперсійних кривих акустико-гравітаційних хвиль на спектральній площині «частота — горизонтальне хвильове число (ω, k_x)» [22, 35] і добре відомих з теорії коливань графіків Віна [4]. Ця схожість додатково вказує на можливість застосування теорії коливань для вивчення АГХ. Тому в

даній роботі ми досліджуємо АГХ у ізотермічній атмосфері з використанням методів теорії коливань.

Математичний розгляд хвильового руху зазвичай провадиться за допомогою методу нормальних мод [10, 13]. У відповідності з цим методом спочатку розглядається рівноважний стан середовища, а потім вводиться мале зміщення елементарного об'єму середовища з положення рівноваги. За допомогою лінеаризованих рівнянь гідродинаміки досліджується поширення збурень у вигляді плоских хвиль $\exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t))$, де ω і \vec{k} — частота і хвильовий вектор. Метою цієї процедури є знаходження дисперсійного рівняння, що визначає зв'язок з хвильовим вектором \vec{k} і параметрами середовища. Проте за рамками такого розгляду залишається питання про залежність складових збурених фізичних величин від власних частот коливань. З теорії АГХ відомо, що ці хвилі можна охарактеризувати двома частотами — «акустичною» і «гравітаційною» [22, 36]. Зазвичай передбачається, що акустичні та гравітаційні коливання реалізуються незалежно, і кожне на своїй частоті [3, 22]. При цьому в теоретичних моделях акустико-гравітаційних хвиль в одночастотному наближенні виникають так звані «поляризаційні співвідношення», що зв'язують спектральні характеристики з амплітудами збурень [3, 22]. Ці поляризаційні співвідношення записані у просторі комплексних чисел, що ускладнює їхнє порівняння з результатами спостережень збурених фізичних величин. У даній роботі ми будемо використовувати тільки дійсні змінні, записуючи збурення у вигляді суперпозиції синусів і косинусів.

Як відомо, сумарне коливання у фізичній системі є сумою коливань на всіх власних частотах [1, 10, 12]. Далі ми будемо вважати, що збурення з двома частотами (акустичній і гравітаційній) зароджуються і поширюються одночасно. Тому у відповідності з загальними підходами опису фізичних систем покладемо, що часові зміни збурених швидкостей є суперпозицією коливань на цих частотах. Оскільки у випадку акустико-гравітаційних хвиль власні частоти можуть значно відрізнятися за величиною, то в загальному випадку сумарне коливання може бути негармонічним і описувати досить складний рух елементарного об'єму середовища. Для дослідження двочастотного коливального режиму АГХ метод нормальних мод здається досить складним. Тоді, згідно із даними [13, 28], найкращий результат може дати розв'язок задачі з початковими умовами. Тому в даній роботі ми будемо використовувати цей підхід.

ВИХІДНІ РІВНЯННЯ

Розглянемо малі власні коливання нескінченної стисливої ізотермічної бездисипативної атмосфери у необертовій декартовій системі координат x, y, z з вертикальною координатою z , спрямованою проти прискорення вільного падіння \vec{g} , і горизонтальною координатою x , па-

паралельною поверхні Землі. Вважаємо, що рівноважна гідродинамічна швидкість середовища дорівнює нулеві, а атмосфера у горизонтальній площині — однорідна. Впливом магнітного поля нехтуємо через малу щільність заряджених частинок. Нас будуть цікавити збурення з довжиною хвилі, набагато менші за радіус Землі, тому впливом кривизни поверхні Землі на коливання також знехтуємо. Оскільки всюди далі температура T вважається величиною постійною, то рівноважні тиск p і щільність середовища задовольняють наступні рівняння гідростатичної рівноваги:

$$\frac{p}{z} = -g, \quad p = RT, \quad \frac{p(z)}{p(0)} = \exp\left(-\frac{z}{H}\right), \quad (1)$$

де R — універсальна газова постійна, $H = RT/g$ — висота однорідної атмосфери. Значення $z = 0$ вибираємо всередині шару термосфери.

Хвильові процеси у стратифікованій атмосфері описуються відомими лінеаризованими рівняннями гідродинаміки [8, 11]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) &= 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Тут t — час, \vec{V} — збурена гідродинамічна швидкість, ρ — показник адіабати, штрихом позначено збурені величини тиску і щільності.

Для подальшого розгляду корисно записати рівняння (2) в термінах вектора зміщення елементарного об'єму середовища з положення рівноваги:

$$\vec{r}(\vec{r}, t) = \int_0^t \vec{V}(\vec{r}, t) dt. \quad (3)$$

В результаті в декартових координатах x, z з вертикальною координатою z отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) &= 0, \\ p &= p_0 + \rho \frac{\partial z}{\partial t}. \end{aligned} \quad (4)$$

Тут x і z — горизонтальна і вертикальна складові вектора зміщення. Ми знехтували у рівняннях (4) залежністю від координати y , оскільки її можна усунути з рівнянь поворотом системи координат навколо осі z . При отриманні другої пари рівнянь (4) виконувалося інтегрування по часу у припущенні, що у початковий момент часу збурені величини p , і зміщення дорівнюють нулю. Це припущення зазвичай використовується при вивченні хвильових процесів у суцільних середовищах [2, 8, 11]. У класичній механіці воно відповідає задачі про коливання частки поблизу мінімуму потенціальної енергії [10, 13], а в теорії коливань — задачі про коливання двох пов'язаних маятників, яким раптово надали швидкості [1].

Після деяких алгебраїчних перетворень рівняння (4) зводяться до однорідної системи двох лінійних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned}\ddot{x} + g \frac{z}{x} - \frac{c_s^2}{x} \frac{x}{z} - \frac{z}{z} &= 0, \\ \ddot{z} + g \frac{x}{z} - \frac{c_s^2}{z} \frac{z}{x} - \frac{x}{x} &= 0,\end{aligned}\quad (5)$$

які описують два типи коливань ізотермічної атмосфери [19, 32]. Тут $c_s = (RT)^{1/2}$ — ізотермічна швидкість звуку. Загальний вигляд рівняння (5) дозволяє розглянути АГХ як систему двох зв'язаних осциляторів.

Для аналітичного дослідження залежності вектора зміщення (швидкості) від часу за допомогою рівнянь (5) необхідно задати початкові умови. Для цього використовуємо міркування, добре відомі з фізики суцільних середовищ. Як відомо, власними коливаннями є рух коливальної системи, яка після короткочасного зовнішнього впливу надана самій собі. Припустимо, що системі, яка перебуває в стані статичної рівноваги, у момент часу $t = 0$ надано довільної початкової швидкості \vec{V}_0 , так що $\vec{v}|_{t=0} = \vec{V}_0$. У цей момент система все ще має рівноважну конфігурацію, хоча їй зроблено «початковий поштовх» у вигляді швидкості \vec{V}_0 . Це означає, що при $t = 0$ всі сили врівноважені, і $\vec{v}|_{t=0} = 0$, але відбувається рух за інерцією, викликаний початковою швидкістю \vec{V}_0 . Додаткові сили, що виникають при «початковому поштовху», намагаються повернути елементарний об'єм середовища у початковий рівноважний стан (див. рівняння (2)). Однак об'єм за інерцією прослизає далі, і цикл повторюється, призводячи до коливань. Цей підхід до опису власних коливань широко поширений в гідро- і газодинаміці, а також у фізиці плазми і зазвичай використовується при формулюванні енергетичного принципу стійкості [2, 8, 33]. Найбільш чітко його викладено у роботі [33]. Дотримуючись цього підходу, ми отримали лінеаризовані рівняння (4). Тому, залишаючись в його межах, ми можемо сформулювати початкові умови у такому вигляді:

$$\begin{aligned} v_x(0, x, z) &= 0, \quad v_z(0, x, z) = 0, \\ V_x(0, x, z) &= V_{0x} e^{z/(2H)} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}_x), \\ V_z(0, x, z) &= V_{0z} e^{z/(2H)} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}_z), \end{aligned} \quad (6)$$

де $\vec{k} \cdot \vec{r} = k_x x + k_z z$. Експоненціальний множник у (6) враховує вертикальну стратифікацію щільності [22], а $\vec{k} \cdot \vec{r}_x$ і $\vec{k} \cdot \vec{r}_z$ — фази коливань складових швидкості. Перше і друге рівняння в (6) відповідають припущенню, що у початковий момент часу $t = 0$ система перебуває у рівноважному стані, і зміщення \vec{r} дорівнює нулеві. Третє і четверте рівняння для складових збуреної швидкості V_x і V_z випливають з методу нормальних мод [11, 13]. Згідно з цим методом [1, 10] складові збуреної швидкості з урахуванням вертикальної стратифікації збурень шукаються у вигляді

$$V_{x,z} = \operatorname{Re} W_{x,z} \exp \frac{z}{2H} \exp i(t - \vec{k} \cdot \vec{r}).$$

Тут Re — знак дійсної частини комплексного числа, а $W_{x,z}$ — комплексні амплітуди. Записавши ці амплітуди у вигляді

$$W_x = V_{0x} e^{i\phi_x}, \quad W_z = V_{0z} e^{i\phi_z},$$

де V_{0x}, V_{0z} — дійсні числа, а ϕ_x, ϕ_z — фази комплексних амплітуд, отримуємо

$$\begin{aligned} V_x &= V_{0x} e^{z/(2H)} \cos(t - \vec{k} \cdot \vec{r}_x), \\ V_z &= V_{0z} e^{z/(2H)} \cos(t - \vec{k} \cdot \vec{r}_z). \end{aligned}$$

При $t = 0$ ці рівняння збігаються з використовуваними нами рівняннями (6). Зауважимо, що початкові умови (6) повністю відповідають початковим умовам, наведеним у роботі [2]. Вони формулюють спосіб знаходження рішень рівнянь (5) як задачу Коші [15]: серед всіх розв'язків (5) потрібно знайти ті, які при $t = 0$ зводяться до заданих функцій від x і z .

ВЛАСНІ ЧАСТОТИ

Розв'язок системи (5) подамо у вигляді суперпозиції зустрічних хвиль:

$$\begin{aligned} v_x &= \exp \frac{z}{2H} [A \cos(t - \vec{k} \cdot \vec{r}) + B \cos(t + \vec{k} \cdot \vec{r}) + \\ &\quad C \sin(t - \vec{k} \cdot \vec{r}) + D \sin(t + \vec{k} \cdot \vec{r})], \\ v_z &= \exp \frac{z}{2H} [E \cos(t - \vec{k} \cdot \vec{r}) + F \cos(t + \vec{k} \cdot \vec{r}) + \\ &\quad G \sin(t - \vec{k} \cdot \vec{r}) + K \sin(t + \vec{k} \cdot \vec{r})], \end{aligned} \quad (7)$$

де A, B, C, D, E, F, G, K — довільні постійні величини. Тут і далі $k_x = 0$, $k_z = 0$. З (7) та перших двох рівнянь (6) отримуємо

$$\begin{aligned}(A - B)\cos(\vec{k} \cdot \vec{r}) - (D - C)\sin(\vec{k} \cdot \vec{r}) &= 0, \\ (E - F)\cos(\vec{k} \cdot \vec{r}) - (K - G)\sin(\vec{k} \cdot \vec{r}) &= 0.\end{aligned}\quad (8)$$

Через лінійну незалежність функцій $\cos(\vec{k} \cdot \vec{r})$ і $\sin(\vec{k} \cdot \vec{r})$ з виразів (8) випливає

$$B = A, \quad C = D, \quad F = E, \quad G = K. \quad (9)$$

У результаті з (7) і (9) отримуємо, що розв'язок системи (5) слід шукати у вигляді

$$\begin{aligned}x &= e^{z/(2H)} \sin t [a \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}) - b \sin(\vec{k} \cdot \vec{r})], \\ z &= e^{z/(2H)} \sin t [c \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}) - d \sin(\vec{k} \cdot \vec{r})],\end{aligned}\quad (10)$$

де $a = 2C, b = 2A, c = 2G, d = 2E$.

Підставляючи (10) у рівняння (5), отримуємо

$$\begin{aligned}\cos(\vec{k} \cdot \vec{r}) [a^2 - \frac{2}{01}) - c^2 - \frac{2}{04}) - d^2 - \frac{2}{03})] \\ \sin(\vec{k} \cdot \vec{r}) [b^2 - \frac{2}{01}) - c^2 - \frac{2}{03}) - d^2 - \frac{2}{04})] &= 0, \\ \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}) [c^2 - \frac{2}{02}) - a^2 - \frac{2}{04}) - b^2 - \frac{2}{03})] \\ \sin(\vec{k} \cdot \vec{r}) [d^2 - \frac{2}{02}) - a^2 - \frac{2}{03}) - b^2 - \frac{2}{04})] &= 0.\end{aligned}\quad (11)$$

де

$$\begin{aligned}\frac{2}{01}) &= k_x^2 c_S^2, \quad \frac{2}{02}) = k_z^2 - \frac{1}{4H^2} c_S^2, \\ \frac{2}{03}) &= k_x c_S^2 / H, \quad \frac{2}{04}) = k_x k_z c_S^2, \quad \frac{1}{-} = \frac{1}{2}.\end{aligned}\quad (12)$$

Прирівнюючи до нуля множники при $\cos(\vec{k} \cdot \vec{r})$ і $\sin(\vec{k} \cdot \vec{r})$, приходимо до рівнянь

$$\begin{aligned}a^2 - \frac{2}{01}) - c^2 - \frac{2}{04}) - d^2 - \frac{2}{03}) &= 0, \\ b^2 - \frac{2}{01}) - c^2 - \frac{2}{03}) - d^2 - \frac{2}{04}) &= 0, \\ c^2 - \frac{2}{02}) - a^2 - \frac{2}{04}) - b^2 - \frac{2}{03}) &= 0, \\ d^2 - \frac{2}{02}) - a^2 - \frac{2}{03}) - b^2 - \frac{2}{04}) &= 0.\end{aligned}\quad (13)$$

Система (13) має нетривіальний розв'язок при довільних значеннях a, b, c і d , якщо її дискримінант дорівнює нулю:

$$[(\frac{2}{-} - \frac{2}{01})(\frac{2}{-} - \frac{2}{02}) - (\frac{4}{03} - \frac{4}{04})]^2 = 0. \quad (14)$$

З (12) і (14) знаходимо

$$g(\omega^2) = (\omega^2 - \omega_{01}^2)(\omega^2 - \omega_{02}^2) - \frac{2}{4} \omega_{01}^2 \omega_{02}^2 = 0, \quad (15)$$

де

$$\frac{k_z^2 H^2}{k_z^2 H^2 - 1/4} = \omega^2.$$

З (15) впливає $g(\omega_{01}^2) = 0$, $g(\omega_{02}^2) = 0$, $g(0) = 0$ і $g(\omega^2) = 0$ при $\omega^2 = 0$. Тому рівняння (15) завжди має два дійсні корені:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} (\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 \pm \sqrt{D}), \quad (16)$$

$$D = (\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2)^2 + 4 \omega_{01}^2 \omega_{02}^2,$$

які описують власні коливання системи і завжди різні.

На рис. 1 представлено діаграму поведінки нормованих власних частот

$$\frac{\omega_{1,2}^2}{\omega_{02}^2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\omega_{01}^2}{\omega_{02}^2} \pm \sqrt{1 + \frac{2}{\omega_{02}^2} \omega_{01}^2} \right)$$

у залежності від відношення $\frac{\omega_{01}^2}{\omega_{02}^2} = \frac{k_x^2 H^2}{k_z^2 H^2 - 1/4}$ і від коефіцієнта γ . Зазначимо, що ця діаграма якісно схожа на графіки Віна, добре відомі в теорії коливань [4, 14].

Частоти власних коливань лежать у межах двох областей, що задовольняють нерівність $\omega_{01}^2 < \omega^2 < \omega_{02}^2$. Як видно з діаграми, при $\gamma = 0$ отримаємо прямі $\omega_{01}^2 = 1$ і $\omega_{02}^2 = 1$. Цей випадок реалізується тільки при чисто уявному k_z (див. [19]), коли $k_z^2 = -2/H^2$. Щобільші коефіцієнти зв'язку між осциляторами, то більше відрізняються одна від одної власні частоти. Частота ω_1 завжди більша від ω_{01} , а частота ω_2 менша, ніж ω_{02} . Зазначимо, що ω_{01} є парціальною частотою горизонтального осцилятора, а ω_{02} — вертикального. У коливних системах парціальні частоти розташовані завжди всередині власних.

На спектральній площині (ω, k_x) рівняння (16) при $k_z = 0$ визначає граничні частоти для областей вільного розповсюдження акустичних і внутрішніх гравітаційних збурень [22, 36]. Власні частоти мінімально відрізняються одна від іншої при $k_z = 0$, $k_x = 1/(2H)$ (коли $\omega_{01} = \omega_{02}$). При цьому вони дорівнюють

$$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 - 2\gamma} \sqrt{\frac{g}{2H}}, \quad \omega_2 = \omega_0 \sqrt{1 - 2\gamma} \sqrt{\frac{g(1 - \gamma)}{2H}}, \quad \omega_0 = \frac{c_s}{2H}. \quad (17)$$

Ці частоти ω_1 і ω_2 при $k_z = 0$, $k_x = 1/(2H)$ показано на рис. 1 точками А і В. Для них справедлива оцінка $(\omega_1 - \omega_2)_{\min} = 2\omega_0$, оскільки у

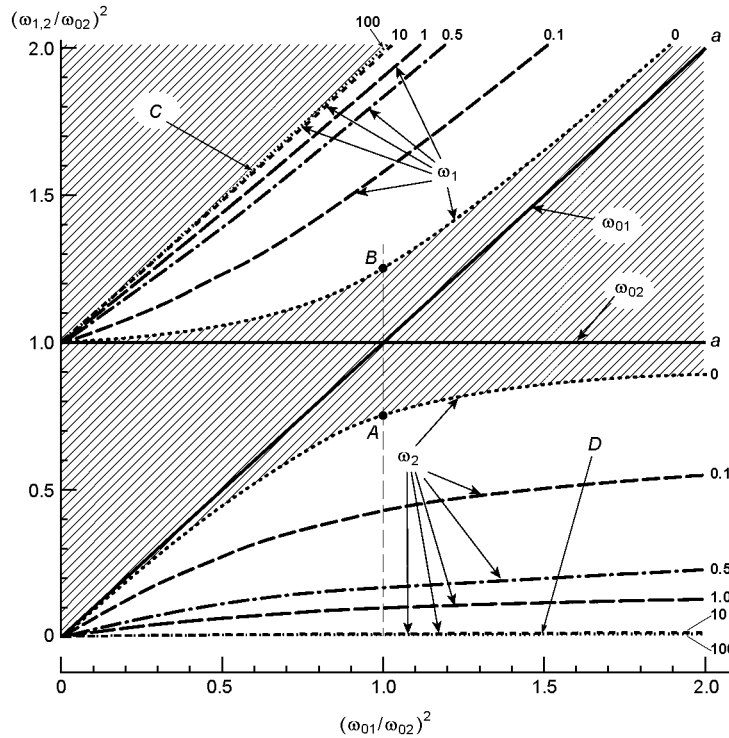


Рис. 1. Залежність нормованих власних частот $(\omega_1/\omega_{02})^2$ і $(\omega_2/\omega_{02})^2$ від відношення частот ω_{01}/ω_{02} і коефіцієнта $k_z^2 H^2$ (числа біля кривих — значення $k_z^2 H^2$, літери a — положення асимптот)

термосфері величина γ досить мала ($\gamma \ll 0.1$) при $\omega = 1.67$.

Для вертикально-дрібномасштабних збурень з $k_z H \gg 1$ з (16) знаходимо акустичну і гравітаційну гілки коливань з частотами

$$\omega_1^2 = k_x^2 c_s^2 + \frac{k_x^2 N^2}{k^2 - 1/(4H^2)}, \quad \omega_2^2 = \frac{k_x^2 N^2}{k^2 - 1/(4H^2)}, \quad (18)$$

$$\text{де } k^2 = k_x^2 + k_z^2, \quad \frac{1}{a} = \frac{c_s^2}{4H^2}, \quad N^2 = \frac{g(1)}{H}.$$

Для збурень з $k_z H \gg 1$ атмосфера може розглядатися як вертикально однорідна. Такі збурення зазвичай розглядаються при побудові моделей нелінійних акустико-гравітаційних хвиль [24, 25, 30].

Зауважимо, що дисперсійні співвідношення вигляду (18) раніше були отримані в роботі [30] у наближенні $(1/\gamma) \ll 1$ (так звана модель атмосфери Вальхалла). Сенс цього наближення легко зрозуміти, якщо переписати рівняння (16) у такому еквівалентному вигляді:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{c_s^2}{2} (k_x^2 + k_z^2) + \frac{1}{4H^2} (k_x^2 + k_z^2) + \frac{1}{4H^2} \frac{4k_x^2 N^2}{c_s^2}.$$

Оскільки $(1/\gamma) \ll 1$, то квадрат частоти Брента — Вайсяля N^2 є ма-

лою величиною. У цьому наближенні з наведеного рівняння відразу виходять дисперсійні рівняння (18). Зазначимо, що припущення $(1)/\ll 1$ не зовсім відповідає умовам в атмосфері Землі. Так, на висотах термосфери з переважанням одноатомного газу $(= 1.67)$ зазначений параметр дорівнює 0.4, а для умов середньої і нижньої атмосфери $(= 1.4)$ ця величина приблизно дорівнює 0.3. Тому далі ми будемо вважати, що дисперсійні рівняння (18) відповідають тільки вертикально-дрібномасштабним збуренням.

На рис. 1 частоти (18) показано для вертикальних масштабів $k_z H = 10$ і $k_z H = 100$, і є граничними частотами областей хвильового поширення акустичних і гравітаційних збурень. Вони позначені літерами C та D . Криві C задовольняють рівняння

$$\frac{1}{2} \frac{1}{02} - 1 - \frac{1}{2} \frac{01}{2} - 1 - \frac{(1)}{2 k^2 H^2},$$

і слабо залежать від $k_z H$. Криві D описуються рівнянням

$$\frac{1}{2} \frac{2}{02} - \frac{1}{2} \frac{01}{2} - \frac{(1)}{2 k^2 H^2},$$

і при збільшенні $k_z H$ прямують до нуля.

ЗБУРЕНА ШВИДКІСТЬ

Згідно з теоріями коливань і хвиль [1, 4, 10] і звичайних диференціальних рівнянь [5, 16] загальний розв'язок лінійної системи (5) є сумою двох лінійно незалежних рішень (10) з частотами (16):

$$\begin{aligned} x &= \sum_{k=1}^2 e^{z/(2H)} \sin_k t (a_k \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}) - b_k \sin(\vec{k} \cdot \vec{r})), \\ z &= \sum_{k=1}^2 e^{z/(2H)} \sin_k t (c_k \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}) - d_k \sin(\vec{k} \cdot \vec{r})). \end{aligned} \quad (19)$$

У вирази (19) входять вісім постійних, для визначення яких є лише чотири початкові умови (6). Тим не менш, вирази для x і z можуть бути знайдені, оскільки амплітуди a_k, b_k, c_k і d_k пов'язані між собою. Легко встановити, що підстановка частот (16) у систему (13) робить її рівняння лінійно залежними, тому перші два рівняння (13) зводяться до двох останніх і мають вигляд

$$\begin{aligned} c_k \left(\frac{1}{k} \frac{2}{02} \right) - a_k \frac{2}{04} - b_k \frac{2}{03} &= 0, \\ d_k \left(\frac{1}{k} \frac{2}{02} \right) - a_k \frac{2}{03} - b_k \frac{2}{04} &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

У цьому легко переконатися, помноживши перше рівняння в (13) на $\frac{2}{03} \left(\frac{1}{k} \frac{2}{02} \right)$, а друге — на $\frac{2}{04} \left(\frac{1}{k} \frac{2}{02} \right)$ і склавши отримані рівняння. З урахуванням (14) отримаємо третє рівняння (13). Якщо відняти від

другого отриманого рівняння перше, то отримаємо четверте рівняння (13). З (20) знаходимо коефіцієнти c_k і d_k через a_k і b_k для кожної з власних частот:

$$c_k = \frac{a_k \frac{2}{04}}{\frac{2}{k}} \frac{b_k \frac{2}{03}}{\frac{2}{02}}, \quad d_k = \frac{a_k \frac{2}{03}}{\frac{2}{k}} \frac{b_k \frac{2}{04}}{\frac{2}{02}}. \quad (21)$$

У результаті отримуємо, що x і z необхідно шукати у вигляді

$$\begin{aligned} x &= e^{z/(2H)} \sin_{k1} t (a_k \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}) - b_k \sin(\vec{k} \cdot \vec{r})), \\ z &= e^{z/(2H)} \sin_{k1} t \left(\frac{a_k \frac{2}{04}}{\frac{2}{k}} \frac{b_k \frac{2}{03}}{\frac{2}{02}} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{a_k \frac{2}{03}}{\frac{2}{k}} \frac{b_k \frac{2}{04}}{\frac{2}{02}} \sin(\vec{k} \cdot \vec{r}) \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Тут a_k і b_k — довільні постійні, які ми визначимо з початкових умов.

Після підстановки (22) у початкові умови (6) і деяких алгебраїчних перетворень знаходимо

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{V_{0x}}{2} \cos_{x1} \frac{Q}{P} - \frac{V_{0z}}{1P} (k_x H \sin_{z1} - k_x k_z H^2 \cos_{z1}), \\ a_2 &= \frac{V_{0x}}{2} \cos_{x2} \frac{Q}{P} - \frac{V_{0z}}{2P} (k_x H \sin_{z2} - k_x k_z H^2 \cos_{z2}), \\ b_1 &= \frac{V_{0x}}{2} \sin_{x1} \frac{Q}{P} - \frac{V_{0z}}{1P} (k_x k_z H^2 \sin_{z1} - k_x H \cos_{z1}), \\ b_2 &= \frac{V_{0x}}{2} \sin_{x2} \frac{Q}{P} - \frac{V_{0z}}{2P} (k_x H \cos_{z2} - k_x k_z H^2 \sin_{z2}), \end{aligned} \quad (23)$$

де $Q = k_z^2 H^2 - 1/4 - k_x^2 H^2$, $P = [Q^2 - 4k_x^2 H^2 (k_z^2 H^2 - 1/4)]^{1/2}$.

Підставляючи (23) в (22) і виконуючи диференціювання по часу отриманих виразів для x і z , приходимо до рівнянь для складових збуреної швидкості:

$$\begin{aligned} V_x &= e^{z/(2H)} \cos_{1t} \frac{V_{0x}}{2} \frac{Q}{P} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}_{x1}) \\ &\quad - \frac{V_{0z}}{P} (k_x k_z H^2 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}_{z1}) - k_x H \sin(\vec{k} \cdot \vec{r}_{z1})), \\ V_z &= e^{z/(2H)} \cos_{2t} \frac{V_{0x}}{2} \frac{Q}{P} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}_{x2}) \\ &\quad - \frac{V_{0z}}{P} (k_x H \sin(\vec{k} \cdot \vec{r}_{z2}) - k_x k_z H^2 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}_{z2})), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_z &= e^{z/(2H)} \cos_1 t \frac{V_{0z}}{2} \left(1 - \frac{Q}{P} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}_z) \right) \\
 &\quad \frac{V_{0x}}{P} (k_x k_z H^2 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}_x) - kH \sin(\vec{k} \cdot \vec{r}_x)) \\
 &\quad e^{z/(2H)} \cos_2 t \frac{V_{0z}}{2} \left(1 - \frac{Q}{P} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}_z) \right) \\
 &\quad \frac{V_{0x}}{P} (k_x k_z H^2 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}_x) - kH \sin(\vec{k} \cdot \vec{r}_x)) .
 \end{aligned} \tag{24}$$

Тут

$$\begin{aligned}
 {}_1 &= \frac{c_s^2}{2} k_x^2 + k_z^2 - \frac{1}{4H^2} - \frac{P}{H^2}^{1/2}, \\
 {}_2 &= \frac{c_s^2}{2} k_x^2 + k_z^2 - \frac{1}{4H^2} - \frac{P}{H^2}^{1/2}.
 \end{aligned}$$

Рівняння (24) повністю описують коливальні рухи у стратифікованій ізотермічній атмосфері.

Рух елементарного об'єму середовища в загальному випадку може бути періодичним. Розглянемо це питання докладніше.

При $k_z^2 H^2 \gg 1/4$ з рівнянь (24) отримуємо, що складові швидкості і частоти в основному порядку мають вигляд

$$\begin{aligned}
 V_x &= V_{0x} e^{z/(2H)} \cos_2 t \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}_x) \\
 &\quad V_{0z} e^{z/(2H)} \cos_1 t \frac{k_x H}{k_z^2 H^2 - 1/4} \\
 &\quad [k_z H \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}_x) - \sin(\vec{k} \cdot \vec{r}_z)], \\
 V_z &= V_{0z} e^{z/(2H)} \cos_1 t \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}_x) \\
 &\quad V_{0x} e^{z/(2H)} \cos_2 t \frac{k_x H}{k_z^2 H^2 - 1/4} \\
 &\quad [k_z H \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}_x) - \sin(\vec{k} \cdot \vec{r}_z)],
 \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
 {}_1^2 &= c_s^2 k_z^2 - \frac{1}{4H^2} - \frac{N^2}{1} k_z^2 H^2 - \frac{1}{4}, \\
 {}_2^2 &= k_x^2 c_s^2 \frac{1/4}{k_z^2 H^2 - 1/4} - \frac{N^2 k_x^2 H^2}{k_z^2 H^2 - 1/4}.
 \end{aligned}$$

У протилежному випадку $k_x^2 H^2 \gg k_z^2 H^2 - 1/4$ з рівнянь (24) впливає

$$\begin{aligned}
V_x &= V_{0x} e^{z/(2H)} \cos \omega_1 t \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}_x) \\
V_{0z} e^{z/(2H)} \frac{\cos \omega_2 t}{k_x H} &[\sin(\vec{k} \cdot \vec{r}_x) - k_z H \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}_z)], \\
V_z &= V_{0z} e^{z/(2H)} \cos \omega_2 t \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}_x) \\
V_{0x} e^{z/(2H)} \frac{\cos \omega_1 t}{k_x H} &[\sin(\vec{k} \cdot \vec{r}_x) - k_z H \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}_z)],
\end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}
\omega_1^2 &= k_x^2 c_s^2 - \frac{N^2 k_x^2 H^2}{1}, \\
\omega_2^2 &= k_x^2 \frac{c_s^2}{H^2} - \frac{1}{4} = N^2.
\end{aligned}$$

З рівнянь (24) легко бачити, що є деякий параметр $S = Q/P$, який «перемикає» складові швидкості з однієї частоти на іншу. Так, при $S \rightarrow 1$ ($k_z/k_x \rightarrow 0$) з (25) отримуємо

$$\begin{aligned}
V_x &= V_{0x} e^{z/(2H)} \cos \omega_2 t \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}_x), \\
V_z &= V_{0z} e^{z/(2H)} \cos \omega_1 t \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}_x),
\end{aligned}$$

а при $S \rightarrow 0$ ($k_x/k_z \rightarrow 0$) з (26) випливає

$$\begin{aligned}
V_x &= V_{0x} e^{z/(2H)} \cos \omega_1 t \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}_x), \\
V_z &= V_{0z} e^{z/(2H)} \cos \omega_2 t \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}_x).
\end{aligned}$$

Таким чином, у розглянутих вище випадках ми отримуємо гармонічні коливання горизонтальної і вертикальної складових швидкості на двох різних власних частотах (16).

При $S \rightarrow 0$ ($k_x^2 H^2 = k_z^2 H^2 + 1/4$) власні частоти ω_1 і ω_2 згідно з (16) мало відрізняються одна від іншої, а множники при $\cos \omega_1 t$ і $\cos \omega_2 t$ є величинами одного порядку малості. Тому вираз для V_x і V_z у цьому випадку можна записати у вигляді

$$x = A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t. \tag{27}$$

Застосовуючи тригонометричні співвідношення, перепишемо (27) у вигляді

$$x = X(t) \cos(\omega t + \varphi(t)), \tag{28}$$

де

$$X = (A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos 2\omega t)^{1/2}, \quad \tan \varphi = \frac{A_1}{A_2} \tan \omega t,$$

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}.$$

Оскільки виконується нерівність $\omega < \omega_0$, то рух (28) можна розглядати як квазіперіодичне коливання з середньою частотою ω_0 , амплітуда X і фазовий кут φ якого повільно змінюються в часі з частотою ω . Такі коливання зазвичай називаються биттями [10, 14]. У радіотехніці коливання (28) називають амплітудно-модульованими, або коливаннями з частотою ω_0 .

Для збурень з частотами (17) при $V_{0x} = V_{0z} = V_0, z = 0, x = z = 0$ з (28) отримуємо

$$V_{x,z} = V_{x,z}(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_{x,z}(t)), \quad (29)$$

де

$$V_x(t) = V_z(t) = \frac{V_0^2}{2} (1 - \cos(x/H) \cos 2\omega_0 t)^{1/2},$$

$$\varphi_{x,z} = \mp \text{tg}(x/(2H)) \text{tg} \omega_0 t,$$

$$-\frac{\omega_0}{2} [(1 - \cos(x/H) \cos 2\omega_0 t)^{1/2} - 1].$$

З (29) випливає, що поведінка складових швидкостей істотно залежить від того, у якій точці x розглядаються коливання. Для $x = 0$ з (29) отримуємо коливання складових швидкостей у вигляді

$$V_{x,z} = V_0 \cos \omega_0 t \cos \omega t. \quad (30)$$

В точках $x = H/2$ рівняння (29) описують гармонічні коливання виду

$$\begin{aligned} V_x &= V_0 \cos[\omega_0(1 - \cos(x/H))t], \\ V_z &= V_0 \cos[\omega_0(1 + \cos(x/H))t] \end{aligned} \quad (31)$$

з різними частотами.

Для дрібномасштабних збурень, що задовольняють умову $k_x H, k_z H \gg 1$, з (24) отримуємо

$$\begin{aligned} V_x &= e^{z/(2H)} \cos \omega_0 t \frac{V_{0x}}{2} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_0 t) + \frac{V_{0z}}{2} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_0 t) \\ &\quad e^{z/(2H)} \cos \omega_0 t \frac{V_{0x}}{2} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_0 t) + \frac{V_{0z}}{2} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_0 t), \\ V_z &= e^{z/(2H)} \cos \omega_0 t \frac{V_{0z}}{2} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_0 t) + \frac{V_{0x}}{2} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_0 t) \\ &\quad e^{z/(2H)} \cos \omega_0 t \frac{V_{0z}}{2} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_0 t) + \frac{V_{0x}}{2} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_0 t). \end{aligned} \quad (32)$$

Частоти ω_1 і ω_2 в (32) визначаються рівнянням (18). У випадку $V_{0x} \neq 0, V_{0z} \neq 0$ рівняння (32) описують коливання швидкостей:

$$\begin{pmatrix} V_x \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_z \end{pmatrix} e^{z/(2H)} V_{0x} \cos \omega_1 t \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}_x) \quad (33)$$

з однією частотою.

АНАЛІЗ РОЗВ'ЯЗКІВ

Результати аналізу рівнянь (24) наведено на рис. 2—4, де показано залежності безрозмірних складових збуреної швидкості $\hat{V}_x = V_x / V_{0x}$ та $\hat{V}_z = V_z / V_{0z}$ від безрозмірного часу $\omega_2 t$. Для спрощення аналізу при обчисленнях приймалися значення $V_{0x} = V_{0z} = \sqrt{2}V_0, \omega_2 = 0, z = 0, k_x H = 1/4, k_z H = 0.125$.

Наведемо отримані результати обчислень для великих і малих значень величини $k_z H$. Видно (рис. 2а), що при $k_z H = 0$ і малих $k_x H$ ($k_x H = 0.125$) складові швидкості змінюються в часі майже за гармонічним законом. При цьому складова \hat{V}_x згідно з (25) осцилює з періодом, що істотно перевищує період коливань \hat{V}_z . При збільшенні параметра $k_x H$ коливання обох складових швидкості стають близькими до гармонічних, при цьому їхні періоди зближуються. При $k_x H = 0.5$ їхні періоди майже збігаються (рис. 2б), а характер коливань повністю описується рівняннями (31). При $k_x H > 0.5$ коливання мають вже квазігармонічний вид, що відповідає виразу (28). Для $k_x H = 3$ (рис. 2в) складова \hat{V}_x осцилює з дуже малим періодом, а складова \hat{V}_z змінюється з досить великим періодом. При подальшому збільшенні значень $k_x H$ картина поведінки \hat{V}_x та \hat{V}_z істотно змінюється. Видно, що складова \hat{V}_x осцилює з дуже малим періодом, а складова \hat{V}_z — з великим періодом (рис. 2г). Така поведінка \hat{V}_x та \hat{V}_z повністю відповідає рівнянням (26).

При $k_z H = 0.2$ величини \hat{V}_x та \hat{V}_z змінюються в часі у повній відповідності з рівняннями (25), (26) і (28). Видно, що на рис. 3 картина поведінки складових швидкостей якісно збігається з поведінкою кривих на рис. 2 для відповідних значень $k_x H$. Для $k_x H = 0.5$ (рис. 3б) періоди коливань, як і на рис. 2б, майже збігаються, хоча амплітуди коливань різні, що зумовлено їхньою залежністю від $k_x H$ і $k_z H$.

Картина поведінки складових швидкості істотно змінюється при $k_z H \gg 1$. З рис. 1 випливає, що при таких значеннях $k_z H$ підсумковий коливальний рух збуреної швидкості складається із швидких та повільних осциляцій. Чисельні розрахунки для випадку $k_z H = 10$ це підтверджують, при цьому амплітуди коливань різні (див. вирази (24)). Різниця амплітуд призводить до найрізноманітніших сценаріїв поведінки збуреної швидкості, що добре видно на рис. 4.

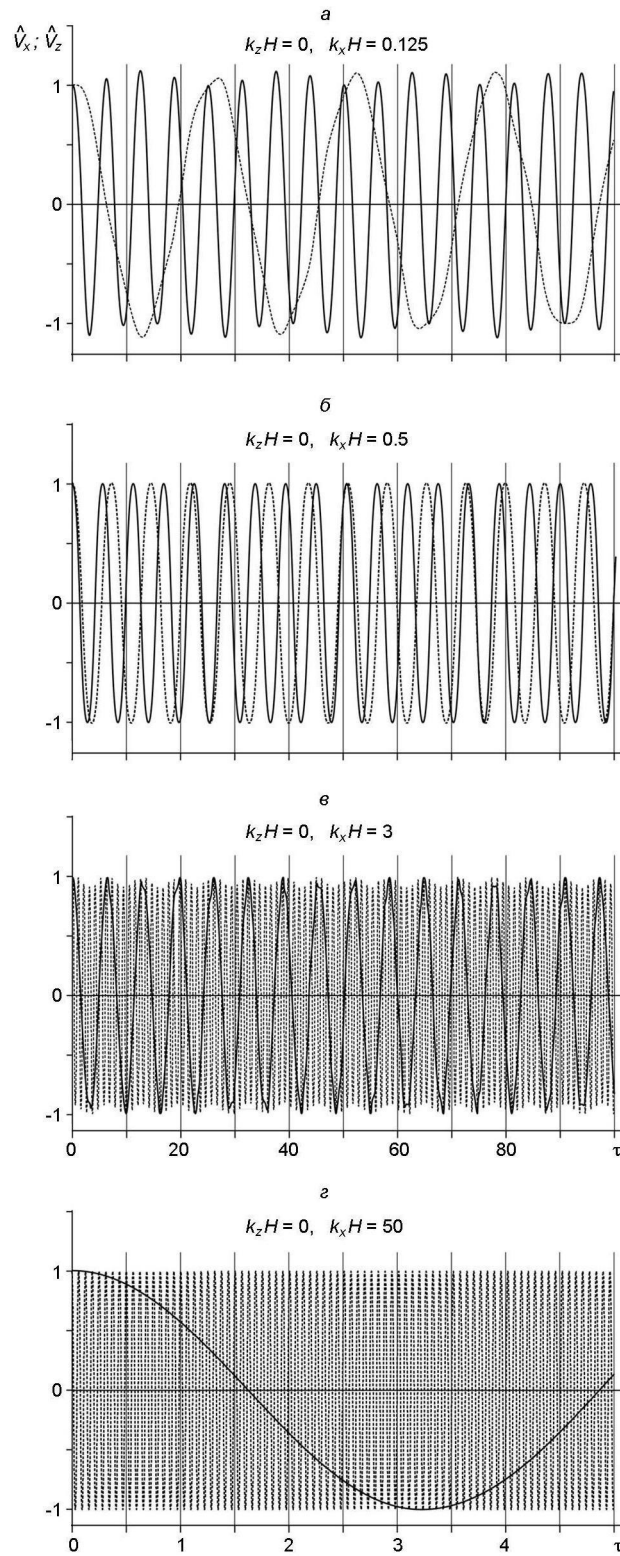


Рис. 2. Залежність нормованих швидкостей $\hat{V}_x = V_x / V_{0x}$ та $\hat{V}_z = V_z / V_{0z}$ від безрозмірного часу ${}_{02}t$ для $k_z H = 0$ (а — $k_x H = 0.125$, б — $k_x H = 0.5$, в — $k_x H = 3$, г — $k_x H = 50$)

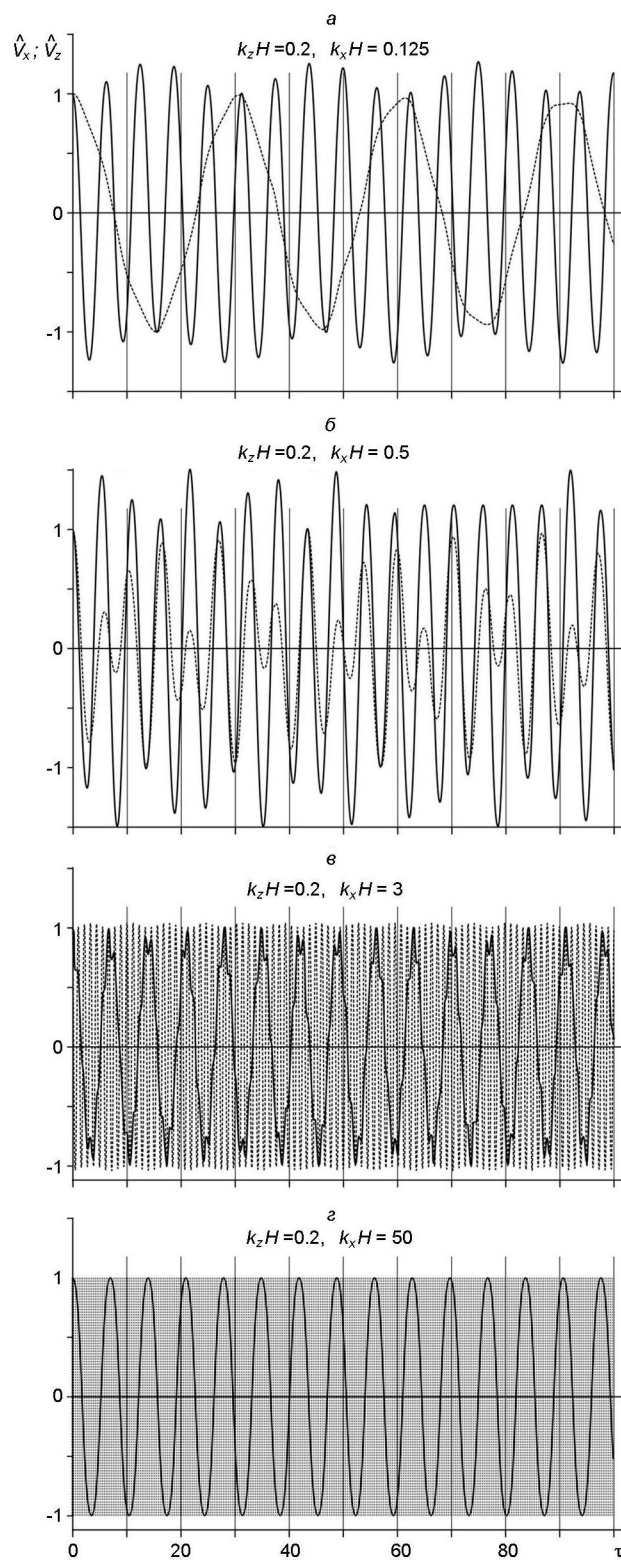


Рис. 3. Те ж для $k_z H = 0.2$

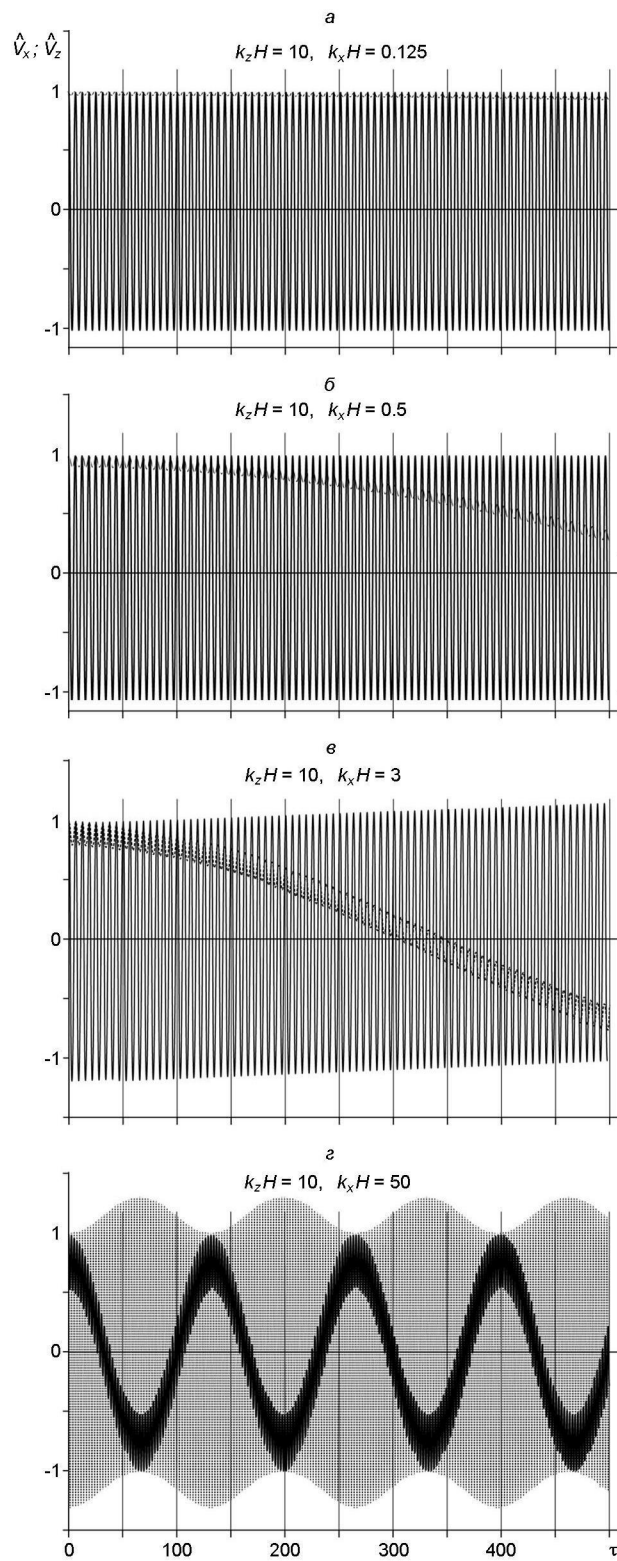


Рис. 4. Те ж для $k_z H = 10$

Позірно суцільний фон на рис. 2г, 3г і 4г зумовлений коливаннями складових V_x з дуже малим періодом. Зазначимо, що гармонійні коливання з однією частотою реалізуються і описуються рівнянням (30) не тільки у випадку $k_z H = k_x H = 10$ (рис. 4в), але також і для будь-яких $k_x H$ і $k_z H$, котрі задовольняють умову $k_z H - k_x H > 1$.

ВИСНОВКИ

Показано, що акустико-гравітаційні хвилі в ізотермічній атмосфері можна розглядати як суперпозицію коливань, які відбуваються одночасно на двох власних частотах при фіксованій довжині хвилі. Отримано дисперсійне рівняння (16) для акустичної і гравітаційної власних частот акустико-гравітаційних хвиль.

Для лінійних рівнянь малих збурень (5) сформульовано початкові умови (6), з допомогою яких досліджено умови поширення акустико-гравітаційних хвиль у термосфері Землі.

З використанням тільки дійсних величин отримано вирази (24) для складових збуреної швидкості елементарного об'єму середовища. У загальному випадку рух такого об'єму негармонічний і є сумою двох гармонічних коливань з частотами (16). Проаналізовано зміни складових збуреної швидкості в залежності від часу і виявлено нові особливості їхньої поведінки. Окремо розглянуто два випадки: коли значення величини $k_z H$ малі, і коли вони великі. Показано, що для вертикально дрібномасштабних збурень при виконанні умови $k_z H - k_x H > 1$ може реалізовуватися одночастотний режим гармонічних коливань.

Встановлено, що у двочастотному режимі є параметр $S = Q/P$ (див. (23)), який визначає частотні характеристики збурених швидкостей. При $S \ll 1$ ($k_x \ll k_z$) рух відбувається зі швидкостями $V_x \approx \cos k_z t$, $V_z \approx \cos k_x t$, а при $S \gg 1$ ($k_x \gg k_z$) — зі швидкостями $V_x \approx \cos k_x t$, $V_z \approx \cos k_z t$. У випадку $S \approx 0$ ($k_x^2 H^2 \approx k_z^2 H^2 + 1/4$), коли частоти k_x і k_z мало відрізняються одна від одної, реалізуються квазігармонічні коливання (28) з частотою $(k_x^2 - k_z^2)/2$, що лежить у «забороненій» для вільного поширення області частот.

Таким чином, з проведеного розгляду випливає, що двочастотний режим може відігравати важливу роль у поширенні акустико-гравітаційних хвиль в атмосфері Землі. Однак у сучасних роботах при аналітичному і чисельному аналізі акустико-гравітаційних хвиль цей режим раніше не розглядався.

ФІНАНСУВАННЯ РОБОТИ

Роботу виконано за часткової підтримки Цільової комплексної програми НАН України з наукових космічних досліджень на 2018—2022 роки.

1. Арнольд В. И. *Математические методы классической механики*. М.: Наука, 1979. 432 с.
2. Бейтман Г. *МГД-неустойчивости*. М.: Энергоиздат, 1982. 200 с.
3. Госсард Э., Хук У. *Волны в атмосфере*. М.: Мир, 1978. 532 с.
4. Карлов Н. В., Кириченко Н. А. *Колебания, волны, структуры*. М.: Физматлит, 2003. 496 с.
5. Коддингтон Э. А., Левинсон Н. *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений*. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 476 с.
6. Крючков Е. И., Федоренко А. К., Черемных О. К. Влияние неоднородного состава верхней атмосферы на распространение акустико-гравитационных волн. *Космічна наука і технологія*. 2012. 18, № 4. С. 30—36.
7. Крючков Е. И., Черемных О. К., Федоренко А. К. Особенности акустико-гравитационных волн в полярной термосфере Земли. *Кинематика и физика небес. тел*. 2017. 33, № 3. С. 41—53.
8. Ладиков-Роев Ю. П., Черемных О. К. *Математические модели сплошных сред*. Киев: Наукова думка, 2010. 552 с.
9. Ладиков-Роев Ю. П., Черемных О. К., Федоренко А. К., Набивач В. Е. Акустико-гравитационные волны в вихревой полярной термосфере. *Проблемы управления и информатики*. 2015. № 5. С. 74-84.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Механика*. М.: Наука, 1965. 204 с.
11. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Гидродинамика. Теоретическая физика: т. VI*. М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1986. 736 с.
12. Магнус К. *Колебания*. М.: Мир, 1982. 304 с.
13. Прист Р. *Солнечная магнитогидродинамика*. М.: Мир, 1985. 589 с.
14. Рабинович М. И., Трубецков Д. И. *Введение в теорию колебаний и волн*. М., 1984. 560 с.
15. Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г. *Дифференциальные уравнения*. М.: Наука, 1985. 232 с.
16. Хартман Ф. *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. М.: Мир, 1970. 720 с.
17. Черемных О. К., Селиванов Ю. А., Захаров И. В. Влияние сжимаемости и неизо-термичности атмосферы на распространение акусто-гравитационных волн. *Космічна наука і технологія*. 2010. 16. № 1. С. 9—19.
18. Bepalova A. V., Fedorenko A. K., Cheremnykh O. K., Zhuk I. T. Satellite observations of wave disturbances caused by moving solar terminator. *J. Atmos. and Solar-Terr. Phys.* 2016. 140. P. 79—85. doi:10.1016/j.jastp.2016.02.012.
19. Cheremnykh O. K., Fedorenko A. K., Kryuchkov E. I., Selivanov Y. A. Evanescent acoustic-gravity modes in the isothermal atmosphere: systematization and applications to the Earth and solar atmospheres. *Ann. Geophys.* 2019. 37. P. 401—415.
20. Fedorenko A. K., Kryuchkov E. I., Cheremnykh O. K., Klymenko Yu. O., Yampolski Yu. M. Peculiarities of acoustic-gravity waves in inhomogeneous flows of the polar thermosphere. *J. Atmos. and Solar-Terr. Phys.* 2018. 178. P. 17—23. doi.org/10.1016/j.jastp.2018.05.009.
21. Fedorenko A. K., Bepalova A. V., Cheremnykh O. K., Kryuchkov E. I. A dominant acoustic-gravity mode in the polar thermosphere. *Ann. Geophys.* 2015. 33. № 1. P. 101—108.
22. Hines C. O. Internal gravity waves at ionospheric heights. *Can. J. Phys.* 1960. 38. P. 1441—1481.
23. Huang K. M., Zhang S. D., Yi F., Huang C. M., Gan Q., Gong Y., Zhang Y. H. Nonlinear interaction of gravity waves in a nonisothermal and dissipative atmosphere. *Ann.*

- Geophys.* 2014. 32. P. 263—275. doi:10. 5194/angeo-32-263-2014.
24. Jovanovic D., Stenflo L., Shukla P. K. Acoustic-gravity nonlinear structures. *Nonlinear Process. Geophys.* 2002. 9. P. 333—339.
25. Kaladze T. D., Pokhotelov O. A., Shan H. A., Shan M. I., Stenflo L. Acoustic-gravity waves in the Earth ionosphere. *J. Atmos. and Solar-Terr. Phys.* 2008. 70. P. 1607—1616.
26. Nekrasov A. K., Shalimov S. L., Shukla P. K., Stenflo L. Nonlinear disturbances in the ionosphere due to acoustic gravity waves. *J. Atmos. Terr. Phys.* 1995. 57. P. 732—742.
27. Rapoport Yu. G., Cheremnykh O. K., Selivanov Yu. A., Fedorenko A. K., Ivchenko V. M., Grimalsky V. V., Tkachenko E. N. Modeling AGW and PEMW in inhomogeneous atmosphere and ionosphere. International Conference of Mathematical Methods in Electromagnetic Theory, IMET. 2012. Article number 6331225. P. 577—580.
28. Roberts P. H. An introduction to magnetohydrodynamics. Longmans, London, 1967. 264 p.
29. Roy A., Roy S., Misra A. P. Dynamical properties of acoustic-gravity waves in the atmosphere. *J. Atmos. and Solar-Terr. Phys.* 2019. 186. P. 78—81.
30. Stenflo L. Nonlinear equations for acoustic gravity waves. *Phys. Lett. A.* 1996. 222. P. 378—380.
31. Stenflo L., Shukla P. K., Nonlinear acoustic-gravity waves. *J. Plasma Phys.* 2009. 75. P. 841—847. doi.org/10.1017/S0022377809007892.
32. Tolstoy I. The theory of waves in stratified fluids including the effect of gravity and rotation. *Revs Mod. Phys.* 1963. 35. № 23. P. 207—230.
33. Trubnikov B. A. Dynamical principle of stability for magnetohydrostatic systems. *Phys. Fluids.* 1962. 5. № 2. P. 184—191.
34. Vadas S. L., Fritts D. C. Thermospheric responses to gravity waves: Influences of increasing viscosity and thermal diffusivity. *J. Geophys. Res.* 2005. 110. P. D15103. doi:10.1029/2004JD005574.
35. Whitaker W. A. Heating of the solar corona by gravity waves. *Astrophys. J.* 1963. 137. P. 914—930.
36. Worrall G. Oscillations in an isothermal atmosphere: the solar five-minute oscillations. *Astrophys. J.* 1972. 172, N 3. P. 749—753.
37. Yeh K. C., Liu C. H. Acoustic-gravity waves in the upper atmosphere. *Revs Geophys. and Space Phys.* 1974. 12, N 2. P. 193—216.

REFERENCES

1. Arnold V. I. (1979) *Mathematical methods of classical mechanics*. M.: Nauka. 432. (In Russian).
2. Bateman G. (1982) *MHD instability*. M.: Energoizdat. 200. (In Russian).
3. Gossard E., Hook W. (1978) *Waves in the atmosphere*. M.: Mir. 532. (In Russian).
4. Karlov N. V., Kirichenko N. A. (2003) *Oscillations, waves, structures*. M.: Fizmatlit. 496. (In Russian).
5. Coddington E. A., Levinson N. (1958) *Theory of ordinary differential equations*. M.: Izd-vo inostr. lit. 476. (In Russian).
6. Kryuchkov Ye. I., Fedorenko A. K., Cheremnykh O. K. (2012) Influence of the inhomogeneous composition of the upper atmosphere on the propagation of acoustic-gravitational waves. *Kosm. nauka tehnol.* 18(4). 30—36. (In Russian).
7. Kryuchkov Ye. I., Cheremnykh O. K., Fedorenko A. K. (2017) Features of acous-

- tic-gravitational waves in the polar thermosphere of the Earth. *Kinemat. fiz. nebesnyh tel.* 33(3). 41—53. (In Russian).
8. Ladikov-Royev Yu. P., Cheremnykh O. K. (2010) *Mathematical models of continuous media*. Kyiv: Naukova Dumka. 552. (In Russian).
 9. Ladikov-Royev Yu. P., Cheremnykh O. K., Fedorenko A. K., Nabivach V. Ye. (2015) Acoustic-gravitational waves in a vortex polar thermosphere. *Probl. Control and Inform.* 5. 74—84. (In Russian).
 10. Landau L. D., Lifshits Ye. M. (1965) *Mechanics*. M.: Nauka, 204. (In Russian).
 11. Landau L. D., Lifshits Ye. M. (1986) *Hydrodynamics. Theoretical Physics: Vol. VI*. M.: Nauka. Gl. red. fiz-mat. lit. 736. (In Russian).
 12. Magnus K. (1982) *Oscillations*. M.: Mir. 304. (In Russian).
 13. Priest R. (1985) *Solar magnetohydrodynamics*. M.: Mir. 598. (In Russian).
 14. Rabinovich M. I., Trubetskov D. I. (1984) *Introduction to the theory of oscillations and waves*. M. 560. (In Russian).
 15. Tikhonov A. N., Vasilieva A. B., Sveshnikov A. G. (1985) *Differential equations*. M.: Nauka, 232. (In Russian).
 16. Hartman F. (1970) *Ordinary differential equations*. M.: Mir, 720. (In Russian).
 17. Cheremnykh O. K., Selivanov Yu. A., Zakharov I. V. (2010) The influence of compressibility and nonisothermality of the atmosphere on the propagation of acousto-gravity waves. *Kosm. nauka tehnol.* 16(1). 9—19. (In Russian).
 18. Bepalova A. V., Fedorenko A. K., Cheremnykh O. K., Zhuk I. T. (2016) Satellite observations of wave disturbances caused by moving solar terminator. *J. Atmos. and Solar-Terr. Phys.* 140. 79—85. doi:10.1016/j.jastp.2016.02.012.
 19. Cheremnykh O. K., Fedorenko A. K., Kryuchkov E. I., Selivanov Yu. A. (2019) Evanescent acoustic-gravity modes in the isothermal atmosphere: systematization and applications to the Earth and solar atmospheres. *Ann. Geophys.* 37. 401—415.
 20. Fedorenko A. K., Kryuchkov E. I., Cheremnykh O. K., Klymenko Yu. O., Yampolski Yu. M. (2018) Peculiarities of acoustic-gravity waves in inhomogeneous flows of the polar thermosphere. *J. Atmos. and Solar-Terr. Phys.* 178. 17—23. doi.org/10.1016/j.jastp.2018.05.009.
 21. Fedorenko A. K., Bepalova A. V., Cheremnykh O. K., Kryuchkov E. I. (2015) A dominant acoustic-gravity mode in the polar thermosphere. *Ann. Geophys.* 33(1). 101—108.
 22. Hines C. O. (1960) Internal gravity waves at ionospheric heights. *Can. J. Phys.* 38. 1441—1481.
 23. Huang K. M., Zhang S. D., Yi F., Huang C. M., Gan Q., Gong Y., Zhang Y. H. (2014) Nonlinear interaction of gravity waves in a nonisothermal and dissipative atmosphere. *Ann. Geophys.* 32. 263—275. doi:10.5194/angeo-32-263-2014.
 24. Jovanovic D., Stenflo L., Shukla P. K. (2002) Acoustic-gravity nonlinear structures. *Nonlinear Process. Geophys.* 9. 333—339.
 25. Kaladze T. D., Pokhotelov O. A., Shan H. A., Shan M. I., Stenflo L. (2008) Acoustic-gravity waves in the Earth ionosphere. *J. Atmos. and Solar-Terr. Phys.* 70. 1607—1616.
 26. Nekrasov A. K., Shalimov S. L., Shukla P. K., Stenflo L. (1995) Nonlinear disturbances in the ionosphere due to acoustic gravity waves. *J. Atmos. Terr. Phys.* 57. 732—742.
 27. Rapoport Yu. G., Cheremnykh O. K., Selivanov Yu. A., Fedorenko A. K., Ivchenko V. M., Grimalsky V. V., Tkachenko E. N. (2012) Modeling AGW and PEMW in inhomogeneous atmosphere and ionosphere. International Conference of Mathematical Methods in Electromagnetic Theory, IMET. Article number 6331225. 577—580.

28. Roberts P. H. (1967) *An introduction to magnetohydrodynamics*. Longmans, London. 264.
29. Roy A., Roy S., Misra A. P. (2019) Dynamical properties of acoustic-gravity waves in the atmosphere. *J. Atmos. and Solar-Terr. Phys.* 186. 78—81.
30. Stenflo L. (1996) Nonlinear equations for acoustic gravity waves. *Phys. Lett. A* 222. 378—380.
31. Stenflo L., Shukla P. K. (2009) Nonlinear acoustic-gravity waves. *J. Plasma Phys.* 75. 841—847. doi.org/10.1017/S0022377809007892.
32. Tolstoy I. (1963) The theory of waves in stratified fluids including the effect of gravity and rotation. *Revs Mod. Phys.* 35(23). 207—230.
33. Trubnikov B. A. (1962) Dynamical principle of stability for magnetohydrostatic systems. *Phys. Fluids*. 5(2). 184—191.
34. Vadas S. L., Fritts D. C. (2005) Thermospheric responses to gravity waves: Influences of increasing viscosity and thermal diffusivity. *J. Geophys. Res.* 110. D15103. doi:10.1029/2004JD005574.
35. Whitaker W. A. (1963) Heating of the solar corona by gravity waves. *Astrophys. J.* 137. 914—930.
36. Worrall G. (1972) Oscillations in an isothermal atmosphere: the solar five-minute oscillations. *Astrophys. J.* 172(3). 749—753.
37. Yeh K. C., Liu C. H. (1974) Acoustic-gravity waves in the upper atmosphere. *Revs Geophys. and Space Phys.* 12(2). 193—216.

О. К. Черемных, Е. И. Крючков, А. К. Федоренко, С. О. Черемных

Институт космических исследований Национальной академии наук Украины
и Государственного космического агентства Украины, Киев, Украина

ДВУХЧАСТОТНЫЙ РЕЖИМ РАСПРОСТРАНЕНИЯ АКУСТИКО-ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН В АТМОСФЕРЕ ЗЕМЛИ

Из многолетних теоретических и экспериментальных исследований акустико-гравитационных волн (АГВ) известно, что они в значительной мере определяют динамику и энергетический баланс атмосфер планет и Солнца. Линейные волновые возмущения в атмосфере могут быть описаны с помощью системы уравнений второго порядка для вертикальной и горизонтальной составляющих возмущенной скорости. Из этой системы следует, что малые возмущения в атмосфере можно рассматривать как колебания связанных осцилляторов с двумя степенями свободы. Это наводит на мысль более детально изучить линейные акустико-гравитационные волновые моды в атмосфере с помощью хорошо разработанных методов теории колебаний. Для изучения малых возмущений в атмосфере Земли в работе использованы методы теории связанных колебательных систем. Показано, что акустико-гравитационные волны в изотермической атмосфере можно рассматривать как суперпозицию колебаний, которые происходят одновременно на двух собственных частотах: акустической и гравитационной. Получены уравнения для собственных частот колебаний, а также для компонент возмущенной скорости при заданных начальных условиях. Проанализированы изменения составляющих возмущенной скорости в зависимости от времени и обнаружены новые особенности их поведения. Все решения представлены с использованием только действительных величин. Это более удобно для сопоставления с данными наблюдений, чем обычно используемое в теории акустико-гравитационных волн комплексное представление. Изучены условия, при которых в атмосфере может реализоваться обычный одночастотный режим колебаний.

Результаты работы могут быть использованы для объяснения некоторых особенностей спутниковых наблюдений волновых возмущений в атмосфере Земли, которые не укладываются в рамки известных теоретических представлений.

Ключевые слова: акустико-гравитационная волна, атмосфера Земли, связанные осцилляторы.

O. K. Cheremnykh, Ye. I. Kryuchkov, A. K. Fedorenko, S. O. Cheremnykh

Space Research Institute of the National Academy of Sciences of Ukraine
and the State Space Agency of Ukraine

TWO-FREQUENCY PROPAGATION MODE OF ACOUSTIC-GRAVITY WAVES IN THE EARTH ATMOSPHERE

As known from long-term theoretical and experimental studies of acoustic-gravity waves (AGW), they largely determine the dynamics and energy balance of the atmospheres of planets and the Sun. Linear wave perturbations in the atmosphere can be described using a system of second-order equations for the vertical and horizontal components of the perturbed velocity. It follows from this system that small perturbations in the atmosphere can be considered as oscillations of coupled oscillators with two degrees of freedom. This suggests the idea of a more detailed study of linear acoustic-gravitational wave modes in the atmosphere using well-developed methods of the oscillations theory. To study small perturbations in the Earth's atmosphere, the methods of the theory of coupled oscillatory systems are used. It is shown that acoustic-gravity waves in an isothermal atmosphere can be considered as a superposition of oscillations that occur simultaneously at two natural frequencies: acoustic and gravitational. Equations are obtained for the natural oscillation's frequencies, as well as for the components of the perturbed velocity under given initial conditions. Changes in the components of the perturbed velocity as a function of time are analyzed and new features of their behavior are discovered. All solutions are presented using real values only. This is more convenient for comparison with observational data than the complex representation commonly used in the theory of acoustic-gravity waves. The conditions are studied under which the usual single-frequency oscillation mode can be realized in the atmosphere. The results of the work can be used to explain some features of satellite observations of wave disturbances in the Earth's atmosphere, which do not fit into the framework of the known theoretical concepts.

Keywords: acoustic-gravitational wave, Earth's atmosphere, coupled oscillators.

Стаття надійшла до редакції 30.08.2019

Після доопрацювання 30.08.2019

Прийнята до друку 04.10.2019