

doi: <https://doi.org/10.15407/kfnt2019.05.003>

УДК 523.9-72

**Ю. И. Федоров**

Главная астрономическая обсерватория Национальной академии наук Украины  
ул. Академика Заболотного 27, Киев, Украина, 03143  
[fedorov@mao.kiev.ua](mailto:fedorov@mao.kiev.ua)

### **Функция распределения солнечных космических лучей при длительной инжекции частиц**

*На основе кинетического уравнения Фоккера — Планка рассмотрено распространение солнечных космических лучей в межпланетной среде. Известно, что функция распределения солнечных космических лучей, усредненная на протяжении солнечного протонного события, содержит важную информацию о процессе рассеяния заряженных частиц высокой энергии в межпланетных магнитных полях. Получено решение стационарного кинетического уравнения в приближении рассеяния на малые углы и исследована зависимость функции углового распределения космических лучей от расстояния до источника частиц. Данное решение применимо тогда, когда расстояние до источника частиц мало по сравнению с транспортным пробегом космических лучей, а частицы движутся преимущественно в радиальном направлении. Исследовано также угловое распределение частиц на больших (по сравнению с транспортным пробегом космических лучей) расстояниях от источника частиц. Получено аналитическое выражение для функции распределения космических лучей в виде суммы изотропной и малой анизотропной составляющих. Показано, что угловое распределение космических лучей существенным образом зависит от анизотропии процесса рассеяния космических лучей. На основании наблюдательных данных для нескольких вспышек солнечных космических лучей сделаны оценки характеристик рассеяния заряженных частиц высокой энергии на флуктуациях межпланетного магнитного поля.*

**Ключевые слова:** космические лучи, кинетическое уравнение, межпланетное магнитное поле.

**ВВЕДЕНИЕ**

Распространение заряженных частиц высокой энергии в турбулентных гелиосферных магнитных полях представляет собой актуальную астрофизическую проблему. Космические лучи (КЛ) содержат ценную информацию о процессах ускорения частиц и их распространения в магнитных полях Галактики и межпланетной среде. Они являются важным фактором космической погоды, влияют на космическую связь, работу бортовой аппаратуры космических аппаратов [5, 11, 21].

Солнечные космические лучи (СКЛ), регистрируемые на космических аппаратах и наземных детекторах, содержат информацию о процессах ускорения заряженных частиц вблизи Солнца и их распространения в межпланетной среде [5, 11, 21]. Угловое распределение СКЛ существенным образом зависит от рассеивательных свойств межпланетной среды [7, 10, 17, 19]. Функция распределения СКЛ изменяется на протяжении солнечного протонного события. Однако оказывается, что функция распределения КЛ, полученная суммированием соответствующей величины на протяжении вспышки СКЛ, содержит информацию об интенсивности и анизотропии рассеяния частиц высокой энергии в межпланетных магнитных полях [8, 16]. Известно, что функция распределения СКЛ, усредненная по периоду вспышки, пропорциональна стационарной функции распределения частиц [8, 16]. Данное утверждение не зависит от временного профиля инъекции частиц вблизи Солнца в межпланетную среду [8, 16]. Таким образом, при анализе характеристик рассеяния СКЛ в межпланетном магнитном поле оказывается возможным использовать решение стационарного кинетического уравнения.

В работах [7, 8, 16, 17] угловые распределения СКЛ, усредненные по всему периоду события, были использованы для определения параметров рассеяния КЛ в межпланетной среде. Отметим, что полученные в этих работах значения характеристик рассеяния частиц хорошо согласуются с соответствующими величинами, определяемыми при помощи временных профилей интенсивности и анизотропии СКЛ [19].

В ряде работ [2, 3, 12, 22] многократное рассеяние КЛ в межпланетной среде исследовано на основе кинетического уравнения Фоккера — Планка. В этих работах получено решение кинетического уравнения в малоугловом приближении, которое соответствует мгновенному, точечному источнику частиц. Если транспортный пробег КЛ пропорционален расстоянию до источника частиц, удастся получить точное решение стационарного кинетического уравнения [13, 20]. Для больших (по сравнению с обратной частотой столкновений) времен после мгновенной инъекции частиц функция распределения КЛ становится близкой к изотропной. В этом случае оказывается возможным получить аналитическое выражение для функции распределения СКЛ [6, 7, 14, 17].

В настоящей работе получено решение стационарного кинетического уравнения в малоугловом приближении, когда расстояние до источника частиц мало по сравнению с транспортным пробегом КЛ. Получено также аналитическое выражение для стационарной функции распределения КЛ вдали от источника частиц. Для нескольких вспышек СКЛ сделаны оценки параметров рассеяния частиц в межпланетной среде.

Исходим из кинетического уравнения, описывающего распространение заряженных частиц высокой энергии в межпланетных магнитных полях [2, 12, 13]:

$$\frac{f}{t} - v \cos \theta \frac{f}{r} - \frac{v}{r} \sin \theta \frac{f}{r} - \frac{f}{2} \frac{v}{\sin \theta} \frac{d}{dt} \sin \theta - \frac{f}{8} \frac{(r)(t)(\theta)}{r^2 \sin^3 \theta}, \quad (1)$$

где  $f(r, \theta, t)$  — функция распределения КЛ,  $v$  — скорость частицы,  $\theta$  — угол между скоростью частицы и радиальным направлением,  $r$  — транспортный пробег КЛ. Предполагаем, что функция распределения КЛ зависит от единственной пространственной координаты  $r$ . Последнее слагаемое в левой части кинетического уравнения (1) описывает процесс рассеяния частиц на неоднородностях магнитного поля. В правую часть кинетического уравнения входит мгновенный точечный источник частиц, расположенный в начале координат.

Введем безразмерные переменные

$$\frac{r}{vt}, \quad \frac{vt}{r}. \quad (2)$$

В новых переменных кинетическое уравнение (1) приобретает следующий вид:

$$\frac{f}{t} \cos \theta - \frac{f}{r} \frac{d}{dt} \sin \theta - \frac{f}{2} \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{dt} \sin \theta - \frac{f}{8} \frac{(\theta)(t)(\theta)}{r^2 \sin^3 \theta}. \quad (3)$$

### МНОГОКРАТНОЕ РАССЕЯНИЕ ЧАСТИЦ НА МАЛЫЕ УГЛЫ

Рассмотрим пространственное распределение КЛ на основе стационарного кинетического уравнения. Известно, что решения стационарных кинетических уравнений содержат важную информацию о процессе рассеяния КЛ в межпланетной среде [7, 9, 10, 17]. Запишем стационарное кинетическое уравнение, соответствующее уравнению (3):

$$\cos \theta \frac{f}{r} - \frac{f}{r} \frac{d}{dt} \sin \theta - \frac{f}{2} \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{dt} \sin \theta - \frac{f}{8} \frac{(\theta)(\theta)}{r^2 \sin^3 \theta}. \quad (4)$$

Направление движения частиц после их инъекции точечным источником мало отличается от радиального. Поэтому на начальной фазе вспышки СКЛ можно ограничиться рассеянием частиц на малые углы. Исследование распространения СКЛ на основе решений кинетического уравнения

тических уравнений в малоугловом приближении было выполнено в работах [2, 3, 12, 22]. Запишем кинетическое уравнение (4) в малоугловом приближении ( $\epsilon \ll 1$ ):

$$\frac{f_0}{2} - \frac{f_0}{2} \frac{1}{2} - \frac{f_0}{8} \frac{(\cdot)(\cdot)}{2^3 2^2}, \quad (5)$$

где  $f_0(\cdot, \cdot)$  — функция распределения КЛ.  
Сделаем замену переменной

$$\frac{2}{2}, \quad (6)$$

получим

$$\frac{f_0}{2} - \frac{f_0}{2} - \frac{f_0}{8} \frac{(\cdot)(\cdot)}{2^3 2^2}. \quad (7)$$

Перейдем к новым переменным

$$2, \quad \frac{3}{3}. \quad (8)$$

В этих переменных кинетическое уравнение (7) приобретает вид

$$\frac{f_0}{2} - \frac{f_0}{2} \frac{(\cdot)(\cdot)}{8^2 3^3}. \quad (9)$$

Выполнив преобразование Лапласа

$$f_0(\cdot, \cdot) = \int_0^\infty f_0(\cdot, \cdot) \exp(\cdot) d\cdot, \quad (10)$$

получим следующее уравнение для образа Лапласа функции распределения КЛ:

$$f_0(\cdot, \cdot) = \frac{f_0(\cdot, \cdot)}{8^2 3^3}. \quad (11)$$

Замена переменной

$$z = 2\sqrt{\cdot} \quad (12)$$

приводит уравнение (11) к виду

$$-z \frac{f_0}{z} = z f_0 \frac{(z)}{4^2 3^3} = 0. \quad (13)$$

Запишем решение этого уравнения в виде

$$f_0(z) = CK_0(z), \quad (14)$$

где  $K_0(z)$  — функция Макдональда. Постоянную  $C$  находим из условия

$$\int_0^{\infty} dz z f_0(z) = \frac{1}{4^{2/3}}. \quad (15)$$

Таким образом, получаем выражение для образа Лапласа функции распределения КЛ:

$$f_0(\lambda, \mu) = \frac{K_0(2\sqrt{\lambda\mu})}{4^{2/3}}. \quad (16)$$

Выполнив обратное преобразование Лапласа [1], получим

$$f_0(\lambda, \mu) = \frac{\exp\left(-\frac{2\sqrt{\lambda\mu}}{3}\right)}{8^{2/3}}. \quad (17)$$

Запишем это соотношение в переменных  $\theta, \varphi$ :

$$f_0(\theta, \varphi) = \frac{3 \exp\left(-\frac{3}{2}\right)}{8^{2/3}}. \quad (18)$$

В переменных  $\theta, \varphi$  функция распределения КЛ имеет вид

$$f_0(\theta, \varphi) = \frac{3 \exp\left(-\frac{3}{2}\right)}{8^{2/3}}. \quad (19)$$

Угловое распределение частиц в данной точке пространства (19) имеет гауссову форму, причем средний квадрат угла пропорционален расстоянию до источника частиц  $r$ . Предэкспоненциальный множитель в формуле (19) пропорционален величине  $r^{-3}$ . Вблизи источника частиц имеет место узкое угловое распределение частиц с резким максимумом в радиальном направлении ( $\theta = 0$ ). При удалении от источника угловое распределение КЛ постепенно расширяется.

Запишем кинетическое уравнение (4) в следующем приближении по малому углу  $\theta$ :

$$\left(1 - \frac{f}{3}\right) \frac{df}{d\theta} - \frac{2}{3} \frac{df}{d\varphi} = \frac{f}{3} - \frac{f}{3} \frac{f}{8^{2/3}}. \quad (20)$$

Отметим, что переменная  $f$  (6) пропорциональна величине  $r^{-2}$ . Представим функцию распределения КЛ в виде

$$f(\theta, \varphi) = f_0(\theta, \varphi) f(\theta, \varphi), \quad (21)$$

причем функция  $f_0(\theta, \varphi)$  (18) является решением уравнения (7). Рассмотрим пространственную область вблизи источника частиц, когда расстояние до источника  $r$  мало по сравнению с транспортным пробегом КЛ  $\lambda$ . В этом случае преобладающее число частиц движутся при-

близительно в радиальном направлении, то есть характеризуются малыми значениями переменной  $r$ , а функция  $f$  оказывается малой по сравнению с  $f_0$ .

Подставив соотношение (21) в уравнение (20), получим следующее уравнение для функции  $f$ :

$$\frac{f}{r} - 2 \frac{f}{r^2} = - \frac{f}{r^3} \quad (r, \theta), \quad (22)$$

где правая часть уравнения (22) имеет вид

$$\frac{f_0}{r} - 2 \frac{f_0}{r^2} + \frac{f_0}{r^3}. \quad (23)$$

Отметим, что в формуле (23) мы пренебрегли малой величиной  $f$  по сравнению с  $f_0$ . Функция  $f_0$  (18) удовлетворяет уравнению (7). Функция  $f$  является решением неоднородного уравнения (22). Правую часть данного уравнения (23) можно вычислить по известной функции  $f_0$  (18).

Запишем уравнение для функции Грина, соответствующее уравнению (22):

$$\frac{G}{r} - 2 \frac{G}{r^2} = - \frac{G}{r^3} \quad (r_0, \theta_0). \quad (24)$$

Решение уравнения (22) можно записать в виде

$$f(r, \theta) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} d_0^2 d_0 G(r, \theta; r_0, \theta_0) f_0(r_0, \theta_0). \quad (25)$$

Выполнив замену переменных (8), получим уравнение

$$\frac{G}{r} - \frac{G}{r^2} = - \frac{G}{r^3} \quad (r_0, \theta_0). \quad (26)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$G(r, \theta; r_0, \theta_0) = \frac{1}{r} \exp \left[ - \frac{r_0}{r} I_0 \left( \frac{2\sqrt{r_0}}{r} \right) \right] \quad (r_0, \theta_0), \quad (27)$$

где  $I_0(x)$  — модифицированная функция Бесселя,  $\delta(x)$  — единичная функция Хевисайда.

Заметим, что переменные  $r, \theta$  определены соотношением (8). Переходя к переменным  $r, \theta$ , получаем следующее соотношение для функции Грина:

$$\frac{3}{r} \exp \left[ \frac{3}{3} \left( \frac{r_0}{r} \right)^2 \right] I_0 \left( \frac{6}{3} \frac{r_0}{r} \sqrt{\frac{r_0}{r}} \right) \quad (r_0, \theta_0). \quad (28)$$



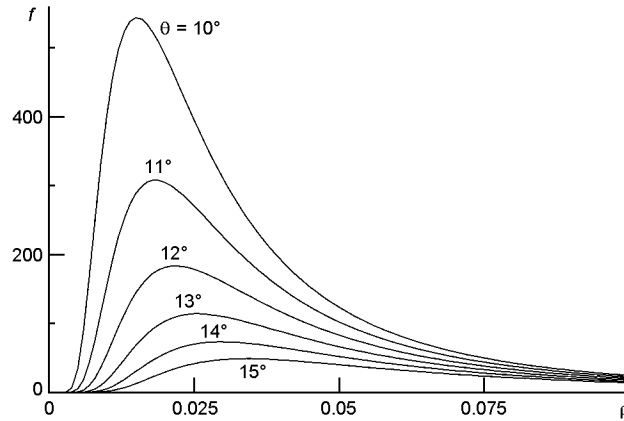


Рис. 2. Зависимость функции распределения КЛ от безразмерной координаты для разных направлений движения частиц. Значения угла приведены у кривых

чем меньше угол  $\theta$ , тем острее максимум пространственной зависимости функции распределения КЛ. При увеличении параметра  $\rho$  максимальное значение функции распределения КЛ уменьшается и имеет место на больших расстояниях от источника частиц (рис. 2). При увеличении координаты  $\rho$  угловое распределение частиц становится более изотропным (рис. 1, 2).

Функцию распределения КЛ можно представить в виде разложения по полиномам Лежандра:

$$f(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^{2n} \frac{2n+1}{2} f_n(\rho) P_n(\cos \theta), \quad (31)$$

где

$$f_n(\rho) = \int_0^d \sin \theta P_n(\cos \theta) f(\rho, \theta) d\theta, \quad (32)$$

а  $P_n(x)$  — полином Лежандра. Гармоники функции распределения КЛ (32) можно вычислить на основе функции распределения частиц (18), (21), (30).

Анизотропия  $n$ -го порядка функции распределения КЛ определена соотношением

$$A_n(\rho) = \frac{f_n(\rho)}{f_0(\rho)}. \quad (33)$$

На рис. 3 приведена зависимость анизотропии функции распределения КЛ от расстояния до источника частиц. При малых значениях координаты  $\rho$  анизотропия КЛ близка к единице. Действительно, вблизи источника частицы движутся преимущественно в радиальном направлении, а функция распределения КЛ характеризуется острым максимумом при  $\theta = 0$  (рис. 1). При увеличении координаты анизотропия углового распределения КЛ уменьшается, причем в данной точке про-



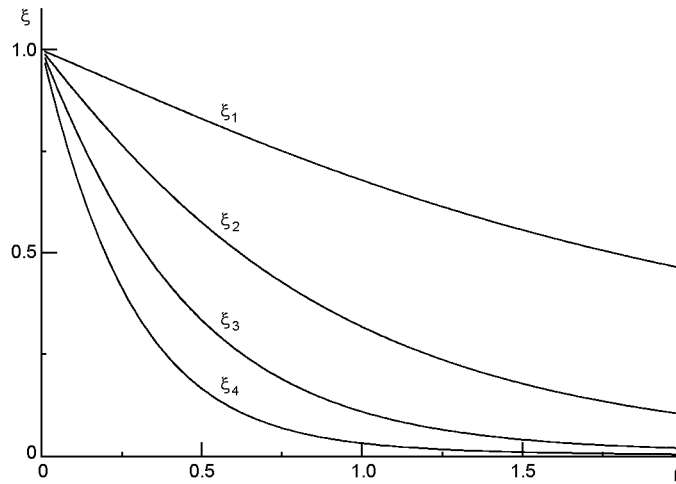


Рис. 3. Зависимость анизотропии функции распределения КЛ от расстояния до источника частиц

странства величина анизотропии  $n$ -го порядка уменьшается при увеличении  $n$ . Заметим, что величины  $\xi_n$  (33) оказываются положительными при всех значениях координаты  $\rho$  (рис. 3).

**ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КОСМИЧЕСКИХ ЛУЧЕЙ  
ВДАЛИ ОТ ИСТОЧНИКА ЧАСТИЦ**

Введем новую переменную

$$\mu = \cos \theta. \tag{34}$$

Запишем кинетическое уравнение (4) в переменных  $\mu, \rho$ :

$$\frac{f}{\rho} - \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{d\mu^2} - \frac{1}{2} (1 - \mu^2) \frac{df}{d\mu} = \frac{Q(\mu)(1 - \mu^2)}{8 \rho^2}. \tag{35}$$

Кинетическое уравнение (35) можно переписать в виде

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 f}{d\mu^2} + (1 - \mu^2) \frac{df}{d\mu} - \frac{1}{\rho} f = - \frac{Q(\mu)(1 - \mu^2)}{8 \rho^2}. \tag{36}$$

Проинтегрировав уравнение (36) по  $\mu$  от  $-1$  до  $1$ , получим

$$\frac{1}{2} \frac{d f_1}{d\rho} = \frac{Q_1(\rho)}{8 \rho^2}, \tag{37}$$

где

$$f_1(\rho) = \int_{-1}^1 f(\mu, \rho) d\mu \tag{38}$$

— первая гармоника функции распределения КЛ.

Решение уравнения (37) имеет вид

$$f_1(\rho) = \frac{1}{8 \rho^2 \rho^3 \rho^2}. \quad (39)$$

Согласно формуле (39) величина  $f_1$  изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния до источника частиц.

При удалении от источника частиц анизотропия углового распределения КЛ уменьшается, и распределение частиц становится более изотропным. На значительных расстояниях от источника (превышающих несколько транспортных пробегов КЛ) функцию распределения КЛ можно представить в виде суммы изотропной составляющей  $f_0(\rho)$  и малой анизотропной составляющей  $f(\rho, \theta)$  [6, 7, 16]:

$$f(\rho, \theta) = \frac{1}{2} f_0(\rho) + f(\rho, \theta), \quad (40)$$

где

$$f_0(\rho) = \int_0^{\pi} f(\rho, \theta) d\theta. \quad (41)$$

Анизотропная составляющая функции распределения КЛ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{d\rho} f(\rho, \theta) = 0. \quad (42)$$

Учитывая малость анизотропного компонента функции распределения КЛ вдали от источника частиц ( $f \approx f_0$ ), из кинетического уравнения (36) получим

$$-\frac{1}{2} (1 - \rho^2) \frac{df}{d\rho} = \frac{1}{2} \frac{df}{d\rho} = -\frac{f_0}{2}. \quad (43)$$

Решение уравнения (43) ищем в виде [7, 13, 20]

$$f(\rho, \theta) = a(\rho) \exp \frac{2}{\rho} + b(\rho), \quad (44)$$

где величины  $a(\rho)$ ,  $b(\rho)$  не зависят от переменной  $\theta$ . Решение уравнения (43), удовлетворяющее условию (42), имеет вид

$$f(\rho, \theta) = \frac{1}{2 \operatorname{sh} \frac{2}{\rho}} \frac{f_0}{\rho} \exp \frac{2}{\rho} - \frac{1}{2} \operatorname{sh} \frac{2}{\rho}, \quad (45)$$

где  $\operatorname{sh} x$  — гиперболический синус аргумента  $x$ .

Проинтегрировав соотношение (45) по  $\theta$  с весом  $\sin \theta$ , получим следующее выражение для первой гармоники функции распределения КЛ:

$$f_1(\theta) = \frac{f_0}{4} \frac{2 \operatorname{cth}^2 \frac{\theta}{2}}{1 - \operatorname{cth}^2 \frac{\theta}{2}}, \quad (46)$$

где  $\operatorname{cth} x$  — гиперболический котангенс аргумента  $x$ . Учитывая соотношение для величины  $f_1$  (39), можно получить следующее соотношение:

$$f_0(\theta) = \frac{1}{2} \frac{d_1}{2 \operatorname{cth}^2 \frac{\theta}{2}}. \quad (47)$$

Из формулы (47) следует, что на больших расстояниях от источника частиц ( $\rho \gg 1$ ) величина  $f_0$  изменяется обратно пропорционально  $\rho$ .

Подставив соотношение (47) в формулу (45), получим выражение для анизотропной составляющей функции распределения КЛ:

$$f(\theta, \rho) = \frac{\exp\left(\frac{\rho}{2} \operatorname{sh} \frac{\theta}{2}\right)}{8 \operatorname{ch}^2 \frac{\theta}{2} \left(1 - \operatorname{sh}^2 \frac{\theta}{2}\right)}, \quad (48)$$

где  $\operatorname{ch} x$  — гиперболический косинус аргумента  $x$ . Полученное выражение показывает, что анизотропная составляющая функции распределения КЛ представляет собой сумму, первое слагаемое которой зависит от величины  $\rho$  экспоненциально, а второе от  $\theta$  не зависит [7, 9, 13, 20].

Зависимость функции распределения КЛ от угла  $\theta$  представлена на рис. 4. Значения безразмерной координаты  $\rho$  приведены у соответствующих кривых. Сплошные кривые соответствуют функции рас-

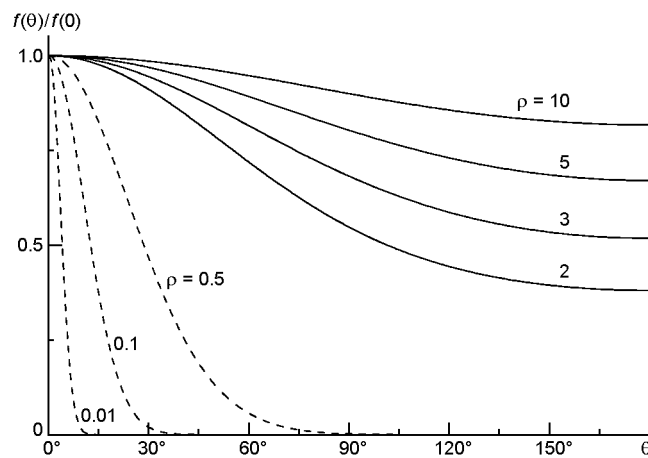


Рис. 4. Угловое распределение частиц в различных точках пространства. Значения безразмерной координаты  $\rho$  приведены у кривых

предела КЛ (40), (47), (48). Пунктирные кривые описывают угловое распределение частиц в малоугловом приближении (18), (30). Вблизи источника угловое распределение частиц характеризуется резким максимумом в радиальном направлении ( $\theta = 0$ ), а число частиц, движущихся к источнику, оказывается пренебрежимо малым (штриховые кривые на рис. 4). Вдали от источника есть также частицы, движущиеся в направлении к источнику, а функция распределения КЛ с увеличением расстояния становится более изотропной (сплошные кривые на рис. 4).

Исходя из соотношения для анизотропной составляющей функции распределения КЛ (48), можно вычислить гармоники углового распределения частиц:

$$f_n(\theta) = \frac{1}{d} P_n(\cos \theta) f(\theta), \quad n = 1. \quad (49)$$

Первая гармоника функции распределения КЛ определена соотношением (39). Приведем выражения для следующих трех гармоник:

$$f_2(\theta) = \frac{(4 - 3 \cos^2 \theta) \operatorname{sh} \frac{2}{2} - 6 \operatorname{ch} \frac{2}{2}}{32 \cos^2 \theta - 3 \operatorname{ch} \frac{2}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{sh} \frac{2}{2}}. \quad (50)$$

$$f_3(\theta) = \frac{1 \frac{15}{4} \cos^2 \theta - 3 \frac{15}{8} \operatorname{sh} \frac{2}{2}}{8 \cos^2 \theta - 3 \operatorname{ch} \frac{2}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{sh} \frac{2}{2}}. \quad (51)$$

$$f_4(\theta) = \frac{8 - 30 \cos^2 \theta + \frac{105}{2} \cos^4 \theta - 5 (8 - 21 \cos^2 \theta) \operatorname{ch} \frac{2}{2}}{64 \cos^2 \theta - 3 \operatorname{ch} \frac{2}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{sh} \frac{2}{2}}. \quad (52)$$

При помощи полученных соотношений можно вычислить анизотропию углового распределения КЛ (33). Зависимость анизотропии КЛ от расстояния до источника частиц приведена на рис. 5. Сплошными кривыми на рисунке представлен рассматриваемый случай изотропного рассеяния частиц. Видно, что все величины  $f_n$  положительны и уменьшаются при увеличении координаты  $\theta$ . При больших значениях координаты ( $\theta \sim 2$ ) анизотропия углового распределения частиц может быть представлена величиной  $f_1$  (рис. 5), а анизотропный компонент функции распределения КЛ оказывается пропорциональным величине  $\cos \theta$ .

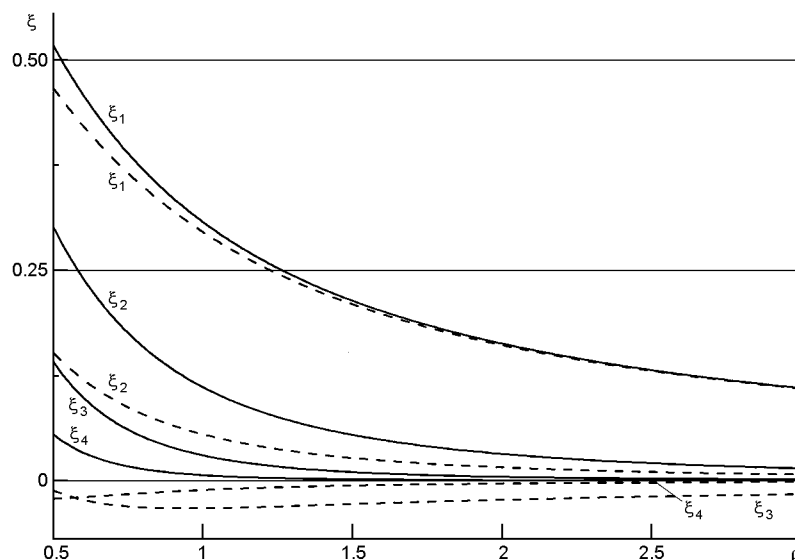


Рис. 5. Зависимость анизотропии углового распределения частиц от безразмерной координаты. Сплошные кривые иллюстрируют изотропное рассеяние, штриховые — анизотропное ( $q = 5/3$ )

### ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КОСМИЧЕСКИХ ЛУЧЕЙ ПРИ АНИЗОТРОПНОМ РАССЕЯНИИ ЧАСТИЦ

Известно, что рассеяние КЛ в межпланетной среде анизотропно, причем рассеяние частиц, движущихся перпендикулярно к магнитному полю, ослаблено [5, 7, 10, 13]. Рассмотрим распространение СКЛ в приближении радиального магнитного поля. В этом случае предполагаем, что вектор напряженности среднего межпланетного магнитного поля ориентирован в радиальном направлении. Отметим, что на больших гелиоцентрических расстояниях, когда необходимо учитывать спиральную форму силовых линий межпланетного магнитного поля, данный подход становится некорректным.

При изотропном рассеянии частиц коэффициент диффузии КЛ по углам пропорционален величине  $1 - \mu^2$ , а кинетическое уравнение имеет вид (35). Запишем стационарное кинетическое уравнение, соответствующее анизотропному рассеянию частиц

$$\frac{f}{\rho} \frac{1 - \mu^2}{2} \frac{df}{d\mu} - D \frac{f}{\rho} \frac{d}{d\mu} \left( \frac{1 - \mu^2}{2} \right), \quad (53)$$

где  $D$  — коэффициент диффузии КЛ по углам вектора скорости частицы. Представим коэффициент диффузии КЛ по углам в виде

$$D = \frac{D_0(\rho)}{2} (1 - \mu^2). \quad (54)$$

Отметим, что при изотропном рассеянии частиц величина  $D_0(\theta)$  равна единице. Предположим, что при анизотропном рассеянии КЛ функция  $D_0(\theta)$  имеет минимум в точке  $\theta = 0$ .

Кинетическое уравнение (53) можно записать в виде

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} f - (1 - \mu^2) \frac{df}{d\mu} = \frac{D_0(\theta)}{2} \frac{df}{d\theta} - \frac{(\theta)}{8} \frac{d^2 f}{d\theta^2}. \quad (55)$$

При изотропном рассеянии частиц величина  $D_0$  равна единице, и кинетическое уравнение (55) совпадает с уравнением (36). Представим функцию распределения КЛ в качестве суммы изотропной и анизотропной составляющих (40). Для анизотропного компонента функции распределения КЛ получим следующее уравнение:

$$- (1 - \mu^2) \frac{df}{d\mu} = \frac{D_0(\theta)}{2} \frac{df}{d\theta} - \frac{f_0}{2}. \quad (56)$$

Определим функцию  $G(\theta)$  согласно соотношению [7, 13]

$$G(\theta) = \frac{1}{D} \frac{d}{d\theta} \frac{1}{D} \frac{d}{d\theta} \frac{2}{D_0(\theta)}. \quad (57)$$

Отметим, что при изотропном рассеянии функция  $G$  (57) пропорциональна величине  $\theta$ :

$$G(\theta) = \frac{\theta}{2}. \quad (58)$$

Решение уравнения (56) ищем в виде [7, 13, 20]

$$f(\mu, \theta) = a(\theta) \exp(G(\theta)) + b(\mu). \quad (59)$$

Решение кинетического уравнения (56), удовлетворяющее условию (42), имеет вид

$$f(\mu, \theta) = \frac{f_0}{2} \frac{\exp(G(\theta)) \frac{1}{D} \frac{d}{d\theta} \exp(G(\theta))}{d \exp(G(\theta))}. \quad (60)$$

Из соотношения (60) следует формула для первой гармоники функции распределения КЛ:

$$f_1(\theta) = \frac{f_0}{2} \frac{\frac{1}{D} \frac{d}{d\theta} \exp(G(\theta))}{d \exp(G(\theta))}. \quad (61)$$

Используя соотношения (39), (61), получим следующее выражение для величины  $f_0(\theta)$ :

$$f_0(\theta) = \frac{1}{4} \frac{d^3}{d^2} \frac{d \exp(G(\theta))}{d \exp(G(\theta))}. \quad (62)$$

Таким образом, анизотропная составляющая функции распределения КЛ имеет вид

$$f(\theta, \varphi) = \frac{1}{8} \frac{\exp(G(\theta)) \frac{1}{2} d \exp(G(\theta))}{d \exp(G(\theta))}. \quad (63)$$

Отметим, что в случае изотропного рассеяния из формулы (63) следует соотношение (48).

Запишем величину  $D_0(\theta)$  в виде [7, 13, 15, 18]

$$D_0(\theta) = \frac{3}{(4 - q)(2 - q)} | \theta |^q, \quad (64)$$

где  $q$  — показатель степени случайного магнитного поля ( $1 < q < 2$ ). При изотропном рассеянии частиц  $q = 1$ , при увеличении параметра  $q$  рассеяние частиц становится более анизотропным. Функция  $G(\theta)$  (57), соответствующая величине  $D_0(\theta)$  (64), имеет вид

$$G(\theta) = \frac{2}{3} (4 - q) | \theta |^q, \quad (65)$$

На рис. 6 приведена зависимость функции распределения КЛ в данной точке пространства от величины  $\theta$ . Функция распределения КЛ удовлетворяет соотношениям (40), (62), (63), (65). Значение функции распределения частиц нормировано на максимальное значение  $f(1)$ . Штриховые кривые соответствуют изотропному рассеянию частиц ( $q = 1$ ), а сплошные — анизотропному ( $q = 5/3$ ). Значение безразмерной координаты приведено у соответствующих кривых. При изотропном рассеянии функция распределения КЛ зависит от переменной  $\theta$  по экспоненциальному закону. При анизотропном рассеянии (сплошные кривые на рис. 6) имеет место резкое изменение зависимости  $f(\theta)$  вблизи точки  $\theta = 0$ . Такой характер угловой зависимости функции распределения КЛ обусловлен выбором коэффициента диффузии частиц по углам в форме (64).

Исходя из соотношения (64) для анизотропной составляющей функции распределения КЛ, можно вычислить гармоники углового распределения частиц:

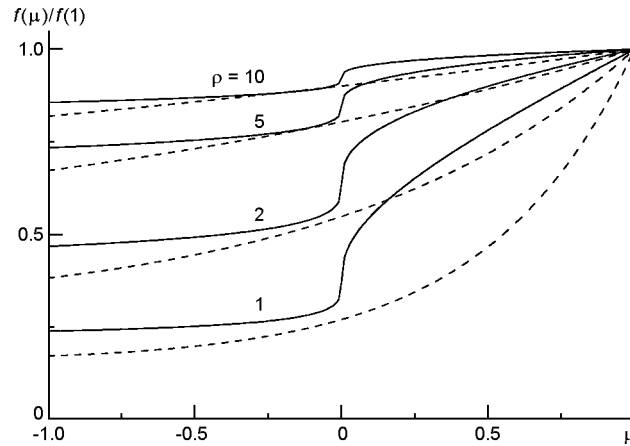


Рис. 6. Зависимость функции распределения КЛ от величины  $\mu$  в различных точках пространства (числа у кривых). Пунктирные кривые соответствуют изотропному рассеянию частиц, сплошные — анизотропному ( $q = 5/3$ )

$$f_n(\mu) = \frac{1}{8} \frac{d P_n(\mu) \exp(G(\mu))}{d \exp(G(\mu))}, \quad n = 1. \quad (66)$$

Штриховые кривые на рис. 5 иллюстрируют зависимость анизотропии КЛ от безразмерной координаты при анизотропном рассеянии частиц ( $q = 5/3$ ). Отметим, что величины  $\mu_1$  и  $\mu_2$  оказываются положительными, а  $\mu_3$  и  $\mu_4$  — отрицательными (рис. 5). При анизотропном рассеянии КЛ величина анизотропии первого порядка мало отличается от соответствующей величины, характерной для изотропного рассеяния. Величина  $\mu_2$  при анизотропном рассеянии частиц принимает существенно меньшие значения, чем при изотропном (рис. 5).

Подход, основанный на стационарном решении кинетического уравнения, позволяет оценить не только интенсивность, но и анизотропию процесса рассеяния заряженных частиц на флуктуациях межпланетного магнитного поля [7, 8, 16, 17]. Интенсивность рассеяния СКЛ существенным образом изменяется от события к событию. Например, солнечные протонные события 8 апреля 1978 г., 16 февраля 1984 г. и 22 октября 1989 г. характеризовались слабым рассеянием КЛ в межпланетной среде, а транспортный пробег частиц высокой энергии оказался сравнимым с астрономической единицей [7, 9—11, 14, 16, 17, 19]. В периоды многих вспышек СКЛ наблюдался высокий уровень турбулентности межпланетного магнитного поля, частицы интенсивно рассеивались на неоднородностях магнитного поля, а транспортный пробег КЛ был значительно меньше, чем расстояние до источника частиц [7, 16, 19].

Полученные соотношения для анизотропии углового распределения СКЛ позволяют оценить транспортный пробег КЛ в межпланет-



ной среде и анизотропию рассеяния частиц. Вспышка СКЛ 28 марта 1976 г. была зарегистрирована космическим аппаратом «Helios 1» на гелиоцентрическом расстоянии 0.495 а. е. [9, 16, 19]. Согласно наблюдательным данным анизотропия углового распределения протонов с энергиями в интервале 4...13 МэВ составила  $\mu_1 = 0.22$ . Величина, характеризующая вторую гармонику углового распределения частиц, оказалась равной  $\mu_2 = 0.05$  [16]. Приведенные соотношения позволяют оценить параметры рассеяния КЛ для данной вспышки. Расчеты соответствуют значению транспортного пробега КЛ  $\lambda = 0.36$  а. е. и значению параметра, характеризующего анизотропию рассеяния,  $q = 1.2$ . Заметим, что близкие значения транспортного пробега КЛ для данной вспышки получены в работах [16, 19]. Протонное событие 19 ноября 1981 г. наблюдалось на космическом аппарате «Helios 1» на гелиоцентрическом расстоянии 0.641 а. е. [16, 19]. Рассеяние КЛ в межпланетной среде в этот период было относительно слабым. Были зафиксированы следующие значения анизотропии углового распределения СКЛ:  $\mu_1 = 0.35$ ,  $\mu_2 = 0.06$  [16]. Согласно сделанным оценкам в этот период наблюдалась значительная анизотропия рассеяния КЛ в межпланетной среде. Для параметра  $q$ , характеризующего анизотропию рассеяния, получено значение  $q = 1.8$ . Интенсивность рассеяния оказалась невысокой, транспортный пробег КЛ  $\lambda = 0.8$  а. е.

#### АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СТАЦИОНАРНОГО КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим случай, когда интенсивность рассеяния СКЛ обратно пропорциональна расстоянию до источника частиц. Известно, что в данном случае стационарное кинетическое уравнение имеет точное аналитическое решение [13, 20]. Если транспортный пробег частиц пропорционален координате, то коэффициент диффузии КЛ обратно пропорционален гелиоцентрическому расстоянию  $r$ . Введем безразмерную координату согласно соотношению

$$\frac{r}{r_0}, \quad (67)$$

где  $r_0$  — постоянная величина. Если транспортный пробег частиц пропорционален гелиоцентрическому расстоянию, то коэффициент диффузии КЛ по углам обратно пропорционален расстоянию. Запишем величину  $D$  в следующем виде:

$$D = \frac{D_0(\theta)}{2}(1 - \theta^2). \quad (68)$$

Стационарное кинетическое уравнение имеет вид (53), причем безразмерная координата  $\theta$  определена соотношением (67). Подставив в уравнение (53) выражение для коэффициента диффузии по углам (68), получим уравнение

$$\frac{f}{r} = \frac{1}{2} \frac{d}{D_0(r)} \frac{f}{r} - \frac{1}{2} D_0(r) (1 - \mu^2) \frac{f}{r} - \frac{(\mu^2 - 1)}{8} \frac{d}{D_0(r)}. \quad (69)$$

Решение уравнения (69) ищем в виде [13, 20]

$$f(r, \mu) = a(r) \exp(G(r)), \quad (70)$$

где

$$G(r) = 2 \frac{d}{D_0(r)}. \quad (71)$$

В частном случае, когда величина  $D_0(r)$  определена соотношением (69), функция  $G(r)$  имеет вид

$$G(r) = \frac{2(4 - q)}{3} |r|^{-q}. \quad (72)$$

Функцию  $a(r)$  можно определить при помощи соотношения для первой гармоники углового распределения частиц (39). Функция распределения КЛ, удовлетворяющая стационарному кинетическому уравнению (69), имеет вид

$$f(r, \mu) = \frac{\exp(G(r))}{8 \mu^2 \mu^3 \mu^2 d \exp(G(r))}. \quad (73)$$

Таким образом, согласно формуле (73) функция распределения КЛ изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния до источника, а форма углового распределения частиц не зависит от координат. Так, например, значение функции распределения КЛ  $f(\mu)$ , нормированное на ее максимальное значение, оказывается одним и тем же в любой точке пространства.

На рис. 7 приведена зависимость функции распределения (72), (73) от величины  $\mu$  при различных значениях параметра  $q$ , описы-

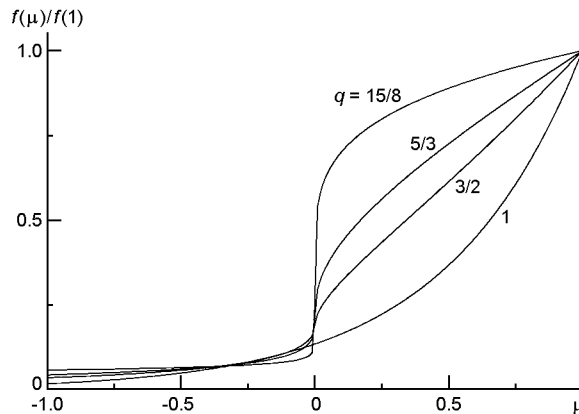


Рис. 7. Угловое распределение частиц при анизотропном рассеянии. Значения параметра  $q$ , характеризующего анизотропию рассеяния, приведены у соответствующих кривых

вающего анизотропию рассеяния частиц. Функция распределения КЛ, нормирована на максимальное значение  $f(1)$ , а значения параметра  $q$  приведены у соответствующих кривых. При изотропном рассеянии ( $q = 1$ ) функция распределения КЛ зависит от  $\theta$  экспоненциально. При увеличении анизотропии рассеяния увеличивается относительное число частиц, движущихся от источника. Отметим, что при анизотропном рассеянии имеет резкое изменение числа частиц в области углов около  $\theta = 0$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В малоугловом приближении получено решение стационарного кинетического уравнения, описывающего распространение солнечных космических лучей в межпланетной среде. Данное решение справедливо, когда расстояние до источника частиц мало по сравнению с транспортным пробегом КЛ, а преобладающее число частиц движется в радиальном направлении. Показано, что при увеличении расстояния до источника угловое распределение КЛ становится более изотропным.

Исследовано также угловое распределение частиц на расстояниях до источника, превышающих транспортный пробег КЛ. В данном случае функция распределения КЛ может быть представлена в виде суммы изотропной и малой анизотропной составляющих. Получено аналитическое выражение для функции распределения КЛ и показано, что анизотропия углового распределения частиц существенным образом зависит от анизотропии процесса рассеяния и уменьшается при удалении от источника частиц. На основании наблюдательных данных, полученных на космических аппаратах для нескольких вспышек СКЛ, сделаны оценки транспортного пробега КЛ и параметра, характеризующего анизотропию рассеяния частиц в межпланетной среде.

## ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа финансировалась в рамках планового финансирования учреждений Национальной академии наук Украины.

1. Абрамовиц М., Стиган И. *Справочник по специальным функциям*. М. Наука, 1979. 832 с.
2. Гальперин Б. А., Топтыгин И. Н., Фрадкин А. А. Рассеяние частиц магнитными неоднородностями в сильном магнитном поле. *ЖЭТФ*. 1971. 60, № 3. С. 972.
3. Дорман Л. И., Кац М. Е. О флуктуациях интенсивности солнечных космических лучей. *Тр. 5-го Ленинградского международного семинара, ФТИ*. 1973. С. 311.
4. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. *Интегралы и ряды. Специальные функции*. М., Наука, 1983. 752 с.
5. Топтыгин И. Н. *Космические лучи в межпланетных магнитных полях*. М. Наука, 1983. 304 с.

6. Федоров Ю. И. Распространение солнечных космических лучей в межпланетной среде при длительной инжекции частиц. *Кинематика и физика небес. тел.* 2004. 20, № 3. С. 197.
7. Beeck J., Wibberenz G. Pitch angle distributions of solar energetic particles and the local scattering properties of the interplanetary medium. *Astrophys. J.* 1986. 311. P. 437.
8. Bieber J. W. A useful relationship between time-dependent and steady state solutions of the Boltzmann equation. *J. Geophys. Res.* 1996. 101, NA6. P. 13523.
9. Bieber J. W., Earl J. A., Green G., et al. Interplanetary pitch-angle scattering and coronal transport of solar energetic particles: New information from Helios. *J. Geophys. Res.* 1980. 85, NA5. P. 213.
10. Bieber J. W., Evenson P. A., Pomerantz M. A. Focusing anisotropy of solar cosmic rays. *J. Geophys. Res.* 1986. 91, NA8. P. 8713.
11. Cramp J. L., Fluckiger E. O., Humble J. E., et al. The October 22, 1989 solar cosmic ray enhancement: An analysis of the anisotropy and spectral characteristic. *J. Geophys. Res.* 1997. 102, NA11. P. 2437.
12. Dorman L. I., Katz M. E. Cosmic ray kinetics in space. *Space Sci. Rev.* 1977. 70. P. 529—575.
13. Earl J. A. Analytical description of charged particle transport along arbitrary guiding field configurations. *Astrophys. J.* 1981. 251. P. 739.
14. Fedorov Yu. I., Stehlik M. SCR steady state distribution function and scattering properties of the interplanetary medium. *Astrophys. Space Sci.* 2006. 302. P. 99.
15. Hasselmann K., Wibberenz G. Scattering charged particles by random electromagnetic fields. *Z. Geophys.* 1968. 34. P. 353.
16. Hatzky R. *Angular distributions of energetic charged particles and the scattering properties of interplanetary medium.* Ph. D. Thesis, Univ. of Kiel, 1996, P. 1—247.
17. Hatzky R., Wibberenz G., Bieber J. W. Pitch angle distribution of solar energetic particles and the transport parameters in the interplanetary space. *Proc. 24th Intern. Cosmic Ray Conf.*, Rome 1995, v. 4, P. 261.
18. Jokipii J. R. Cosmic ray propagation. 1. Charged particle in a random magnetic field. *Astrophys. J.* 1966. 146. P. 480.
19. Kallenrode M.-B. Particle propagation in the inner heliosphere. *J. Geophys. Res.* 1993. 98, NA11. P. 19037.
20. Kunstmann J. E. A new transport mode for energetic charged particles in magnetic fluctuations superposed on a diverging mean field. *Astrophys. J.* 1979. 229. P. 812.
21. Miroschnichenko L. I., Perez-Peraza J. A. Astrophysical aspects in the studies of solar cosmic rays. *Int. J. Modern Phys. A.* 2008. 23, № 1. P. 1.
22. Shakhov B. A., Stehlik M. The Fokker-Planck equation in the second order pitch angle approximation and its exact solution. *J. Quant. Spectr. Radiative Transfer.* 2003. 78. P. 31—39.

## REFERENCES

1. Abramovitz M., Stegun I. (1979) *Reference book on special functions.* M.: Science. 832 p. (in Russian).
2. Galperin B. A., Toptygin I. N., Fradkin A. A. (1971) Rasseyniye chastits magnitnymi neodnorodnostyami v sil'nom magnitnom pole. *Zhurnal Eksperimentalnoi i Teoreticheskoi Fiziki*, 60(3), 972 (in Russian).
3. Dorman L. I., Katz M. E. (1973) O fluktuaciyah intensivnosti solnechnyh kosmicheskikh luchej. *Tr. 5-go Leningradskogo mezhdunarodnogo seminaru*, FTI. 311 (in Russian).

4. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. (1981) *Integraly i ryady*. М.: Nauka. 800 p. (in Russian).
5. Toptygin I. N. (1983) *Kosmicheskiye luchy v mezhplanetnykh magnitnykh polyakh*. М.: Nauka. 304 p. (in Russian)
6. Fedorov Yu. I. (2004) Propagation of solar cosmic rays in the interplanetary medium under conditions of prolonged particle injection. *Kinematics Physics of Celest. Bodies*. 20(3). P. 137—147.
7. Beeck J., Wibberenz G. (1986) Pitch angle distributions of solar energetic particles and the local scattering properties of the interplanetary medium. *Astrophys. J.* 311. P. 437.
8. Bieber J. W. (1996) A useful relationship between time-dependent and steady state solutions of the Boltzmann equation. *J. Geophys. Res.* 101(NA6). P. 13523.
9. Bieber J. W., Earl J. A., Green G., et al. (1980) Interplanetary pitch-angle scattering and coronal transport of solar energetic particles: New information from Helios. *J. Geophys. Res.* 85(NA5). P. 213.
10. Bieber J. W., Evenson P. A., Pomerantz M. A. (1986) Focusing anisotropy of solar cosmic rays. *J. Geophys. Res.* 91(NA8). P. 8713.
11. Cramp J. L., Fluckiger E. O., Humble J. E., et al. (1997) The October 22, 1989 solar cosmic ray enhancement: An analysis of the anisotropy and spectral characteristic. *J. Geophys. Res.* 102(NA11). P. 2437.
12. Dorman L. I., Katz M. E. (1977) Cosmic ray kinetics in space. *Space Sci. Rev.* 70. P. 529—575.
13. Earl J. A. (1981) Analytical description of charged particle transport along arbitrary guiding field configurations. *Astrophys. J.* 251. P. 739.
14. Fedorov Yu. I., Stehlik M. (2006) SCR steady state distribution function and scattering properties of the interplanetary medium. *Astrophys. Space Sci.* 302. P. 99.
15. Hasselmann K., Wibberenz G. (1968) Scattering charged particles by random electromagnetic fields. *Z. Geophys.* 34. P. 353.
16. Hatzky R. (1996) *Angular distributions of energetic charged particles and the scattering properties of interplanetary medium*. Ph. D. Thesis, Univ. of Kiel, P. 1—247.
17. Hatzky R., Wibberenz G., Bieber J. W. (1995) Pitch angle distribution of solar energetic particles and the transport parameters in the interplanetary space. *Proc. 24th Intern. Cosmic Ray Conf.*, Rome, v. 4, P. 261.
18. Jokipii J. R. (1966) Cosmic ray propagation. 1. Charged particle in a random magnetic field. *Astrophys. J.* 146. P. 480.
19. Kallenrode M.-B. (1993) Particle propagation in the inner heliosphere. *J. Geophys. Res.* 98(NA11). P. 19037.
20. Kunstmann J. E. (1979) A new transport mode for energetic charged particles in magnetic fluctuations superposed on a diverging mean field. *Astrophys. J.* 229. P. 812.
21. Miroshnichenko L. I., Perez-Peraza J. A. (2008) Astrophysical aspects in the studies of solar cosmic rays. *Int. J. Modern Phys. A.* 23(1). P. 1.
22. Shakhov B. A., Stehlik M. (2003) The Fokker-Planck equation in the second order pitch angle approximation and its exact solution. *J. Quant. Spectr. Radiative Transfer.* 78. P. 31—39.

*Ю. І. Федоров*

Головна астрономічна обсерваторія Національної академії наук України,  
Київ, Україна

#### ФУНКЦІЯ РОЗПОДІЛУ СОНЯЧНИХ КОСМІЧНИХ ПРОМЕНІВ ПРИ ТРИВАЛІЙ ІНЖЕКЦІЇ ЧАСТИНОК

На основі кінетичного рівняння Фоккера — Планка розглянуто поширення сонячних космічних променів у міжпланетному середовищі. Відомо, що функція розподілу сонячних космічних променів, усереднена протягом сонячної протонної події, містить важливу інформацію про процес розсіяння частинок високої енергії у міжпланетних магнітних полях. Отримано розв'язок стаціонарного кінетичного рівняння у наближенні розсіювання на малі кути і досліджено залежність функції розподілу космічних променів від відстані до джерела частинок. Даний розв'язок є застосовним, коли транспортний пробіг космічних променів значно перевищує відстань до джерела частинок, а частинки рухаються переважно у радіальному напрямку. Досліджено також кутовий розподіл частинок на великих (порівняно з транспортним пробігом космічних променів) відстанях від джерела частинок. Отримано аналітичний вираз для функції розподілу космічних променів у вигляді суми ізотропної і малої анізотропної складових. Показано, що кутовий розподіл космічних променів суттєвим чином залежить від анізотропії процесу розсіяння космічних променів. На основі спостережних даних для декількох спалахів сонячних космічних променів зроблено оцінки характеристик розсіяння заряджених частинок високої енергії на флуктуаціях міжпланетного магнітного поля.

**Ключові слова:** космічні промені, кінетичне рівняння, міжпланетне магнітне поле.

*Yu. I. Fedorov*

Main Astronomical Observatory of the National Academy of Sciences of Ukraine,  
Kyiv, Ukraine

#### SOLAR COSMIC RAY DISTRIBUTION FUNCTION UNDER PROLONGED PARTICLE INJECTION

The solar cosmic ray propagation on the basis of Fokker-Planck kinetic equation is considered. It is known that solar cosmic ray distribution function averaged over a period of solar proton event contains valuable information about energetic charged particles scattering by interplanetary magnetic fields. Steady state solution of kinetic equation in small angle approximation is obtained and the dependence of angular distribution function on the distance to the particle source is analyzed. This solution is only correct when the distance to the particle source is small relative to cosmic ray mean free path, and when the particles are moving preferentially in the radial direction. The particle angular distribution on large distances to the particle source (bigger than cosmic ray mean free path) is also investigated. The analytical expression of the cosmic ray distribution function in a form of a sum of isotropic and small anisotropic components is derived. It is shown that the angular cosmic ray distribution depends essentially on the anisotropy of the cosmic ray scattering. The estimates of features of energetic charged particle scattering by interplanetary magnetic field fluctuations are made based on the observational data of some solar cosmic ray flares.

**Key words:** cosmic rays, kinetic equation, interplanetary magnetic field.

Статья поступила в редакцию 16.05.2019

После доработки 12.06.2019

Принята к публикации 12.06.2019