

УДК 533.951

О. К. Черемных, А. Н. Кришталь, А. А. Ткаченко

¹Институт космических исследований Национальной академии наук Украины
и Государственного космического агентства Украины
Проспект Академика Глушкова 40, корп. 4/1, Киев 187, 03680
oleg.cheremnykh@gmail.com, alexandr.kryshstal@gmail.com

Винтовая мода $m = 1$ в тонком плазменном шнуре с разрывным вертикальным магнитным полем

Рассматриваются условия реализации и устойчивости винтовых мод с азимутальными волновыми числами $m = 1$ в цилиндрическом плазменном шнуре с криволинейным магнитным полем, по которому течет однородный ток вдоль оси шнура. Предполагается, что внутри и снаружи шнура есть постоянные вертикальные магнитные поля, шнур окружен бестоковой плазмой, а за его границей азимутальное магнитное поле уменьшается обратно пропорционально расстоянию от границы шнура. В приближении «тонкого» плазменного шнура получены дисперсионные уравнения для устойчивых и неустойчивых мод. Анализ этих уравнений проведен для случая разрывного вертикального магнитного поля на границе шнура. Определены условия распространения указанных волновых мод. Получено, что неустойчивые моды с $m = 1$ не реализуются. Результаты работы могут быть использованы для интерпретации поведения солнечных магнитных трубок по измерениям с космических аппаратов.

ГВИНТОВА МОДА $m = 1$ В ТОНКОМУ ПЛАЗМОВОМУ ДЖГУТІ З РОЗРИВНИМ ВЕРТИКАЛЬНИМ МАГНІТНИМ ПОЛЕМ, Черемних О. К., Кришталь О. Н., Ткаченко А. О. — Розглядаються умови реалізації і стійкості гвинтових мод з азимутальними хвильовими числами $m = 1$ в циліндричному плазмовому джгуті з криволінійним магнітним полем, по якому тече однорідний струм вздовж осі джгута. Припускається, що всередині та зовні джгута є постійні вертикальні магнітні поля, джгут оточений безструмовою плазмою, а за його межами азимутальне магнітне поле зменшується обернено пропорційно відстані від границі джгута. У наближенні «тонкого» плазмового джгута отримано дисперсійні рівняння для стійких та не-

стійких мод. Аналіз цих рівнянь проведено для випадку розривного вертикального магнітного поля на границі джгута. Визначено умови розповсюдження вказаних хвильових мод. Отримано, що нестійкі моди з $m \geq 1$ не реалізуються. Результати роботи можуть бути використані для інтерпретації поведінки сонячних магнітних трубок за вимірами з космічних апаратів.

KINK MODE $m = 1$ IN THIN PLASMA FLEX WITH DISCONTINUOUS VERTICAL MAGNETIC FIELD, by Cheremnykh O. K., Kryshstal A. N., Tkachenko A. A. — In this paper, we study conditions of realization and stability of kink modes with azimuthal wave numbers $m \geq 1$ in cylindrical plasma flex with twisted magnetic field and homogeneous current along its axis. We assume permanent vertical magnetic fields inside and outside the flex, which is surrounded by currentless plasma, and outside its boundary azimuthal magnetic field decreases inversely proportional to the distance from the flex's border. We derive dispersion equations for stable and unstable modes in approximation of «thin» plasma flex. Analysis of equations for the case of discontinuous vertical magnetic field on flex's boundary is provided. Conditions of propagation of wave modes have been defined. We have obtained that unstable modes with $m \geq 1$ can't be realized. Results can be applied for interpretation of solar magnetic tubes behavior, using measurements provided by the spacecrafts.

ВВЕДЕНИЕ

Магнитные силовые трубки являются хорошо известными элементарными объектами солнечной физики [10]. Эти объекты обычно рассматриваются как изолированные плазменные структуры, которые слабо взаимодействуют с окружающим их магнитным полем и плазмой. Теоретические исследования магнитогидродинамических (МГД) возмущений в солнечных магнитных трубках, как и в высокотемпературной плазме термоядерных установок, обычно проводят в рамках модели цилиндрического плазменного шнура с круглым поперечным сечением с криволинейным магнитным полем, состоящим из двух составляющих [5, 6, 9, 23—25, 30]. В цилиндрической системе координат (r, φ, z) это азимутальное поле B_φ и вертикальное поле B_z . Указанная модель часто используется для рассмотрения фундаментальных проблем физики плазмы [17, 19, 20, 21, 26], физики космоса [3, 10—13, 15, 27, 29] и плазменной динамики [7, 22, 28]. Принципиальное отличие использования этой модели для магнитных силовых трубок от ее использования в высокотемпературной термоядерной плазме в токамаках состоит в том, что в случае магнитных трубок за их границей находится бестоковая плазма, а не вакуум [16]. Это обстоятельство приводит к тому, что есть две точки зрения на поведение азимутального магнитного поля за границей плазменного шнура. Согласно первой

точке зрения это поле убывает с расстоянием от границы трубки [24, 32]. Вторая точка зрения состоит в том, что азимутальное магнитное поле не проникает за границу плазменной трубки [18, 25, 30].

В недавних работах [23, 32] было показано, что неустойчивые винтовые моды в магнитных силовых трубках в предположении отсутствия азимутального магнитного поля за границей плазменного шнура не реализуются. Это обстоятельство наводит на мысль исследовать вопрос о распространении и устойчивости винтовых возмущений в силовых трубках в предположении наличия спадающего азимутального магнитного поля за границей шнура. В рамках указанной выше модели мы рассмотрим вопрос распространения несжимаемых винтовых возмущений [1, 2, 4] с азимутальными волновыми числами $m = 1$. Отметим, что такая проблема недавно была рассмотрена в [31] для случая непрерывного вертикального магнитного поля. В этой работе было показано, что существуют только устойчивые винтовые моды. Очевидно, представляет интерес рассмотреть также случай разрывного вертикального магнитного поля. Мы ограничимся рассмотрением мод с $m = 1$, поскольку хорошо известно [1, 16], что эти моды наиболее неустойчивы, обладают максимальным инкрементом и деформируют в своем развитии все поперечное сечение плазменного шнура.

Для описания указанных выше возмущений мы будем использовать МГД-подход и приближение «тонкого» плазменного шнура [8]. Мы будем считать, как и в работе [16], что по плазменному шнуру течет однородный ток, а азимутальное магнитное поле, как в работах [24, 32], убывает пропорционально r^{-1} от границы плазменного шнура. Основное внимание в работе будет уделено исследованию несжимаемой моды с $m = 1$, так как мода с $m = -1$, как будет показано ниже, по своим свойствам не отличается от моды $m = 1$. Поскольку мы используем приближение несжимаемых возмущений [8], то используемая нами модель не описывает некоторые детали, связанные с распространением звуковых возмущений. Однако при таком подходе основная силовая часть задачи, связанная с возмущением магнитного поля, и важная для описания моды $m = 1$, в целом сохраняется. Основной результат работы состоит в получении и исследовании дисперсионных уравнений для устойчивых и неустойчивых мод $m = 1$ в солнечных магнитных силовых трубках.

ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Мы рассмотрим винтовые моды $m = 1$ в токонесущей плазменной трубке с внутренним винтовым магнитным полем

$$\vec{B}_i = B_i(r)\vec{e}_\phi + B_{zi}\vec{e}_z, \quad (1)$$

где $B_i = B(a)r/a$ и $B_{zi} = \text{const}$ — азимутальная и вертикальная составляющие этого поля в цилиндрических координатах с осью z , со-

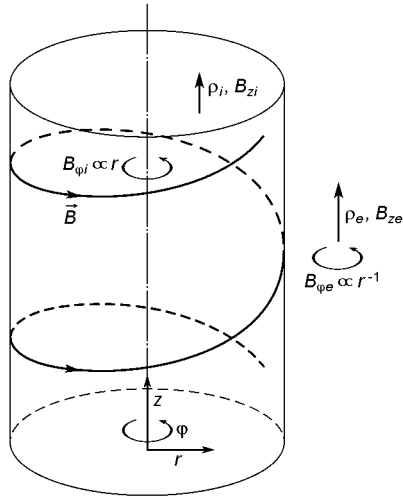


Рис. 1. Равновесная конфигурация плазменного цилиндра

впадающей с направлением тока и с осью плазменного шнура. Считаем, что плазменная трубка окружена бес- токовой плазмой и магнитным полем (см. рис. 1)

$$\vec{B}_e = B_e(r)\vec{e}_\phi + B_{ze}\vec{e}_z, \quad (2)$$

где $B_e = B(a)a/r$ и $B_{ze} = \text{const}$ — компоненты этого внешнего поля.

При рассмотрении несжимаемых воз- мущений считаем, что плотность плазмы внутри шнура ρ_i и снаружи ρ_e являются постоянными величинами и не подвержены возмуще- ниям. Мы пренебрежем эффектами стратификации при рассмотрении равновесного состояния и будем считать, что давление плазмы снару- жи шнура p_e ввиду отсутствия тока является постоянной величиной. Что касается равновесного давления плазмы внутри плазменного шнура p_i , то оно удовлетворяет уравнению магнитостатического рав- новесия

$$\frac{d}{dr} p_i + \frac{1}{2}(B_i^2 - B_{zi}^2) - \frac{B_i^2}{r} = 0. \quad (3)$$

В (3) учтено, что равновесные величины зависят только от r и использо- вано следующее масштабирование магнитного поля $\vec{B} / \sqrt{4\pi} = \vec{B}$.

Для описания несжимаемых винтовых возмущений как внутри, так и снаружи плазменного шнура используем уравнения магнитной гидродинамики, которые имеют вид [4]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{B}}{t^2} &= \rho_i (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} - (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B}, \\ \vec{B} \cdot \nabla (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} &= (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B}, \\ \text{div} \vec{B} &= 0, \quad (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь \vec{B} — возмущенное магнитное поле, индекс i относится к внут- ренней (i) и внешней (e) плазменной среде, вектор \vec{B} характеризует смещение (в смысле Лагранжа) элементарного объема плазмы от по- ложения равновесия [4]. Фигурирующая в уравнениях (4) величина p_1 описывает возмущенное полное давление плазмы

$$p_1 = p + \vec{B} \cdot \nabla \vec{B}, \quad (5)$$

где p — возмущенное давление плазмы.

В работах [8, 14] было показано, что в приближении «тонкого» плазменного шнура, для которого справедливо неравенство $a/R \ll 1$, где a — поперечный радиус шнура, а $2R$ — длина шнура,

система (4) сводится к дифференциальному уравнению второго порядка для радиального смещения r_r :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\left(\frac{2}{r^2} - F^2 \right) r \frac{d}{dr} (r r_r) \right) - \frac{dF^2}{dr} r_r - \frac{m^2}{r} \left(\frac{2}{r^2} - F^2 \right) r_r = 0, \quad (6)$$

где

$$F = \frac{m}{r} B = k_z B_z. \quad (7)$$

Отметим, что в уравнении (6) опущены слагаемые, пропорциональные $\frac{2}{r^2}$. Впервые уравнение (6) было получено в [33] для высокотемпературной плазмы токамаков.

При получении (6) было учтено, что коэффициенты линеаризованных уравнений (4) для рассматриваемого плазменного шнура с круглым поперечным сечением не зависят от координат r и z . Поэтому отдельные фурье-гармоники возмущенных величин, например r_r , можно выбрать в виде

$$r_r(\vec{r}) = r_r(r) \exp(i(\omega t - m\theta - k_z z)). \quad (8)$$

Ввиду ограниченности длины плазменного шнура волновое число k_z принимает дискретные значения $k_z = n/R$.

Для удобства дальнейшего анализа перепишем (6) в следующем эквивалентном виде:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r^3 \left(\frac{2}{r^2} - F^2 \right) \frac{d}{dr} r_r \right) - (1 - m^2) \left(\frac{2}{r^2} - F^2 \right) r_r = 0. \quad (9)$$

Из (9) следует, что для мод с $m = 1$ уравнение (9) принимает достаточно простой вид:

$$\frac{d}{dr} \left(r^3 \left(\frac{2}{r^2} - F^2 \right) \frac{d}{dr} r_r \right) = 0. \quad (10)$$

Как будет показано ниже (см. (15) и (25)) формы радиального смещения r_r существенно различаются внутри и снаружи плазменного шнура. Вблизи границы плазменного шнура эти смещения удовлетворяют уравнениям (см. [18])

$$p_{1e}(a, 0) = p_{1i}(a, 0), \quad (11)$$

$$p_{1e} \left. \frac{B_e^2}{r} \right|_{a, 0} = p_{1i} \left. \frac{B_i^2}{r} \right|_{a, 0}. \quad (12)$$

Фигурирующее в (12) возмущенное полное давление p_1 выражается через r_r следующим образом [14]:

$$p_1 = \frac{1}{m^2} 2mB = F r_r \left(\frac{2}{r^2} - F^2 \right) r \frac{d}{dr} (r r_r). \quad (13)$$

Здесь и далее мы будем оставлять в уравнениях букву m , чтобы в дальнейшем различать случаи $m = 1$ и $m = -1$, и опускать $m^2 = 1$.

Уравнения (10) — (13) вместе с условием отсутствия возмущений на бесконечности, $r_{re}(r \rightarrow \infty) = 0$, мы будем использовать для получения дисперсионного уравнения для винтовых мод с $m = 1$.

СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Из уравнений (1), (7) и (10) получаем уравнение малых колебаний внутри плазменного шнура:

$$(F_i^2 - r^2) \frac{d}{dr} r^3 \frac{d r_i}{dr} = 0. \quad (14)$$

При получении (14) учтено, что $F_i = \text{const}$ согласно (1) и (7). Решение (14) имеет достаточно простой вид:

$$r_i = a \text{const} (r - a). \quad (15)$$

Снаружи плазменного шнура уравнение малых колебаний принимает вид

$$\frac{d}{dr} r^3 (F_e^2 - r^2) \frac{d r_e}{dr} = 0. \quad (16)$$

Отсюда, учитывая (7), получаем

$$r^3 (F_e^2 - r^2) \frac{d r_e}{dr} = \frac{m a^2 B(a)}{r^2 a} k_z B_{ze} \frac{d r_e}{dr} = a B^2(a), \quad (17)$$

где $a = \text{const}$, а постоянный множитель $B^2(a)$ введен в правой части (17) для удобства расчетов. Уравнение (17) перепишем в безразмерном виде

$$x^3 \frac{d}{dx} \left(\frac{m}{x^2} \frac{d r_e}{dx} \right) = a, \quad (18)$$

где использованы обозначения

$$x = \frac{r}{a}, \quad \tilde{r}_e = \frac{r_e - a}{a}, \quad \tilde{m} = \frac{k_z a B_{ze}}{B(a)}. \quad (19)$$

Из уравнения (18) видно, что внешнее радиальное смещение r_e выражается через x , \tilde{r}_e и \tilde{m} . Следовательно, подстановка r_i и r_e в уравнения (11) и (12) приводит к дисперсионному уравнению, выражающему \tilde{r}_e через x и \tilde{m} . Получение этого уравнения может быть существенно упрощено, если обратиться к уравнению (18). Из него следует, что можно ограничиться рассмотрением возмущений с $\tilde{r}_e > 0$. Кроме того, из очевидного равенства

$$\frac{m-1}{x^2} < \frac{m-1}{x^2}$$

получаем, что достаточно рассмотреть возмущения с $m = 1$ и $x < 1$ и $x > 1$. Таким образом, уравнение (18) без ограничения общности можно переписать в виде

$$x^3 \sim 2 \frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \frac{d_{re}}{dx} \quad (20)$$

Ниже мы рассмотрим винтовые моды $m = 1$ с частотами, удовлетворяющими неравенству

$$\tilde{\omega} > |k_z| \quad (21)$$

При $\tilde{\omega} > 0$ неравенство (21) приводит к необходимому условию отсутствия нулей у левой части (20) при всех $x \in (1, \infty)$. Видно, что при $\tilde{\omega} < 0$ и $x \rightarrow \infty$ особенности у указанного уравнения также отсутствуют при выполнении условия (21). Вопрос о наличии особенностей у уравнения (20) при условиях $\tilde{\omega} < 0$, $\tilde{\omega} > |k_z|$ и конечных x остается неясным. Действительно, при $(k_z, 0)$ можно подобрать такую частоту $\tilde{\omega}$, удовлетворяющую (21), что левая часть (20) обратится в ноль. Последнее означает, что существуют физически противоречивые решения с $d_{re}/dx \rightarrow \infty$. Однако остается открытым вопрос: является ли подобранная частота собственной частотой рассматриваемой винтовой моды? Мы будем полагать, что на интервале $x \in (1, \infty)$ собственные частоты винтовой моды $m = 1$ удовлетворяют условию (21) при всех $\tilde{\omega} < 0$ и не приводят к обращению в ноль левой части (20). В рамках этого предположения мы из (20) получим выражение для внешнего смещения d_{re} и с его помощью найдем дисперсионное уравнение.

Ниже мы проведем численный анализ этого дисперсионного уравнения и подтвердим справедливость сделанного нами предположения. Подобное предположение было также использовано в работе [31].

Интегрируя (20), получаем

$$d_{re}(x) = \int_x^{\infty} \frac{d(1/x^2)}{[\tilde{\omega}^2 - (1/x^2)^2]} \quad (22)$$

Из уравнений (11), (15) и (22) находим

$$a \frac{2}{F(1)}, \quad (23)$$

где

$$F(x) = \int_x^{\infty} \frac{d(1/x^2)}{[\tilde{\omega}^2 - (1/x^2)^2]} \quad (24)$$

Из уравнений (22) и (23) следует

$$d_{re} = a \frac{F(x)}{F(1)}. \quad (25)$$

Таким образом, собственные функции d_{re} для винтовых мод $m = 1$ определяются выражениями (15) и (25).

Подставляя выражение (23) для a в (17), получаем уравнение

$$r^3 e^{-2} \frac{a^2 B(a)}{r^2 a} = k_z B_{ze} \frac{d_{re}}{dr} \frac{2 a B^2(a)}{F(1)},$$

из которого находим равенство

$$r^2 \left(\epsilon - 2 - F_e^2 \right) \frac{d_{re}}{dr} \Big|_{r=a} = \frac{2 B^2(a)}{a F(1)}. \quad (26)$$

Это равенство удобно использовать при расчете граничного условия (12).

ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ В СЛУЧАЕ $\epsilon^2 > 0$

Из выражений (12), (13) (15), (25) и (26) получаем дисперсионное уравнение для волновых мод с $\epsilon^2 > 0$

$$F(1) = \frac{2}{[\tilde{\epsilon}^2(\epsilon - 1) - \epsilon^2(\epsilon^2 - 1)]}, \quad (27)$$

где $\frac{i}{e} = \frac{B_{zi}}{B_{ze}}$. Учитывая условие (21), находим

$$F(1) = \frac{d(1/x^2)}{\tilde{\epsilon}^2 (1/x^2)^2} = \frac{1}{2\tilde{\epsilon}} \ln \frac{(\tilde{\epsilon} - 1)(1 - \tilde{\epsilon})}{(\tilde{\epsilon} + 1)(1 + \tilde{\epsilon})}. \quad (28)$$

Из (27) и (28) следует

$$\frac{\tilde{\epsilon}^2(\epsilon - 1) - \epsilon^2(\epsilon^2 - 1)}{\tilde{\epsilon}} \ln \frac{(\tilde{\epsilon} - 1)(1 - \tilde{\epsilon})}{(\tilde{\epsilon} + 1)(1 + \tilde{\epsilon})} = 4. \quad (29)$$

Если, следуя [32], предположить непрерывность z -й составляющей вертикального магнитного поля на границе плазменного шнура, т.е. при $r = a$ положить $B_{zi} = B_{ze} = B_0$, то из (29) получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$\tilde{\epsilon} \ln \frac{(\tilde{\epsilon} - 1)(1 - \tilde{\epsilon})}{(\tilde{\epsilon} + 1)(1 + \tilde{\epsilon})} = \frac{4}{1}. \quad (30)$$

Это уравнение полностью совпадает с дисперсионным уравнением, полученным в [31].

Кроме неравенства (21), фигурирующие в (29) величины $\tilde{\epsilon}$ и ϵ , за исключением интервала $(-1, 0)$, должны также удовлетворять условию

$$\tilde{\epsilon}^2 \leq \epsilon^2 \frac{1}{1}.$$

Таким образом, задача о распространении винтовой моды $m = 1$ сводится к решению дисперсионного уравнения (29) со следующими ограничениями на величины $\tilde{\epsilon}$ и ϵ :

$$|\epsilon| \geq \sqrt{\frac{\epsilon^2 - 1}{1}} = |\tilde{\epsilon}|. \quad (31)$$

Из неравенств (31) вытекают ограничения на величины $\tilde{\omega}^2$ и $\tilde{\omega}^2$:

$$\tilde{\omega}^2 > 1, \quad \tilde{\omega}^2 > 1. \quad (32)$$

Мы ограничимся рассмотрением случая $\tilde{\omega}^2 > 1$, поскольку обратное неравенство $\tilde{\omega}^2 < 1$, хоть формально математически и удовлетворяет (31), но не соответствует реальной физической ситуации. Как правило, значения плотности плазмы и вертикальной составляющей магнитного поля, через которые определяются величины $\tilde{\omega}^2$, внутри плазменного шнура больше, чем снаружи ($\tilde{\omega}^2_{i,e}$ и B_{zi}, B_{ze}). Поэтому для всех $\tilde{\omega}^2$, кроме $\tilde{\omega}^2 = (1, 0)$, рассматриваются только неравенства $\tilde{\omega}^2 > 1$.

На интервале $\tilde{\omega}^2 = (1, 0)$ логарифм в (29) меньше нуля, поэтому условие существования решений дисперсионного уравнения принимает вид

$$\tilde{\omega}^2 > 1 + \sqrt{\frac{\tilde{\omega}^2 - 1}{1}}. \quad (33)$$

При условии $\tilde{\omega}^2 > 1$ и $\tilde{\omega}^2 > 1$, $\tilde{\omega}^2 > 1$ ограничение $\tilde{\omega}^2 > 1 + \sqrt{\frac{\tilde{\omega}^2 - 1}{1}}$ оказывается более сильным, чем (33).

ПРИБЛИЖЕНИЕ МАЛОГО АЗИМУТАЛЬНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Дисперсионное уравнение (29) имеет довольно сложный вид, и его удобно анализировать численно, что будет сделано ниже в соответствующем разделе. Здесь мы упростим это уравнение, используя приближение $k_z a B_{ze} / B(a) \gg 1$. Поскольку уравнение (29) было получено в приближении тонкого плазменного шнура $k_z a \ll 1$, то указанное приближение обозначает $B(a) / B_{ze} \ll k_z a \ll 1$, т. е. малость азимутального магнитного поля на границе шнура $B(a)$ по сравнению с внешним вертикальным магнитным полем B_{ze} . Малость величины $k_z a$ позволяет существенно упростить выражение под логарифмом. С этой целью перепишем уравнение (29) в виде

$$\frac{\tilde{\omega}^2 (1 - \tilde{\omega}^2) \ln 1}{\tilde{\omega}^2 (1 - \tilde{\omega}^2)} = \frac{2\tilde{\omega}^2}{\tilde{\omega}^2 - 1}. \quad (34)$$

Положим, что величины $\tilde{\omega}^2$ и $\tilde{\omega}^2$ удовлетворяют условиям $\tilde{\omega}^2 \gg 1$ и $\tilde{\omega}^2 \gg 1$. Используя аппроксимацию $\ln(1 - x) \approx -x$, из (34) получаем дисперсионное уравнение

$$\tilde{\omega}^2 (1 - \tilde{\omega}^2) = 2(1 - \tilde{\omega}^2). \quad (35)$$

Видно, что полученное уравнение удовлетворяет сделанному предположению. В размерных величинах уравнение (35) имеет вид

$$\tilde{\omega}^2 (\tilde{\omega}^2_{i,e} - k_z^2 (B_{zi}^2 - B_{ze}^2)) = \frac{2B(a)}{a} k_z B_{ze} \quad (36)$$

и описывает устойчивые колебания. Из (36) для непрерывного вертикального магнитного поля получаем результат работы [31]:

$$\frac{\sqrt{2}B_0}{(i - e)^{1/2}} k_z - 1 = \frac{B}{2k_z a B_0}.$$

Этот результат также получается непосредственно из (30).

Выпишем вид собственных функций радиальных смещений r в рассматриваемом приближении. Из (15), (24), (25) находим

$$r = \begin{cases} \text{const}, & r < a, \\ a(a/r)^2, & r > a. \end{cases} \quad (37)$$

В работе [8] эти собственные функции были названы глобальными.

ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ В СЛУЧАЕ $\omega^2 < 0$

Рассмотрим возможность реализации неустойчивых возмущений в рассматриваемом цилиндрическом плазменном шнуре. Как показано в работе [5], МГД-уравнения малых колебаний (4) для идеальной плазмы могут иметь решения только либо с $\omega^2 > 0$, либо с $\omega^2 < 0$. Поэтому мы можем положить $\omega^2 < 0$ и исследовать неустойчивые возмущения, нарастающие во времени как $\exp(\gamma t)$. При указанной замене уравнение (27) модифицируется следующим образом:

$$G(1) = \frac{2}{\omega^2 (1 - \omega^2)^2 (1 - \omega^2)}, \quad (38)$$

где использованы обозначения

$$G_x = \frac{d(1/x^2)}{\omega^2 (1/x^2 - \omega^2)^2}, \quad (39)$$

$$\omega^2 = \frac{e^{-2} a^2}{B^2(a)}. \quad (40)$$

Уравнение (38) можно получить прямыми расчетами (см. Приложение 1). Поскольку

$$G(1) = \frac{1}{\omega^2} \frac{1}{2} \arctg \frac{\omega^2}{1 - \omega^2},$$

то дисперсионное уравнение (38) для неустойчивых мод имеет вид

$$\arctg \frac{\omega^2}{1 - \omega^2} = \frac{1}{2} \frac{2\omega^2}{\omega^2 (1 - \omega^2)^2 (1 - \omega^2)}. \quad (41)$$

Поскольку левая часть в (41) не превышает $\pi/2$, а правая — больше $\pi/2$, то у этого уравнения отсутствуют решения, и следовательно, неустойчивые моды не реализуются.

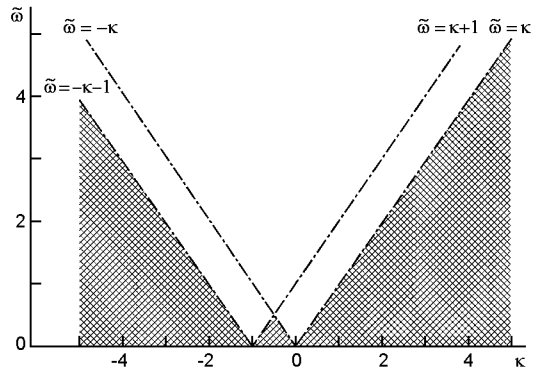
ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ (29)

Перейдем к численному исследованию дисперсионного уравнения (29). Области, в которых существуют решения уравнения (29), определяются из условия положительности подмодульного выражения (в отрицательном случае получаем такие же области):

$$\frac{(1 - \tilde{\omega})(\tilde{\omega} - \kappa)}{(1 + \tilde{\omega})(\tilde{\omega} + \kappa)} > 0.$$

Исследуя знак множителей-составляющих подмодульного выражения, получаем области существования решения и их асимптотику из равенства данных множителей нулю. Соответственно асимптотами являются прямые $\tilde{\omega} = +1$, $\tilde{\omega} = -1$, $\tilde{\omega} = -\kappa$, $\tilde{\omega} = -\kappa - 1$. Области существования решения изображены графически на рис. 2.

Рис. 2. Области существования решений (заштрихованные участки) дисперсионного уравнения (29) при выполнении условия (21). Штрихпунктирные прямые — асимптоты



Обозначим левую часть уравнения (29) как $F(\tilde{\omega})$ и построим график зависимости $F(\tilde{\omega})$ для каждой области, где существуют решения. Поскольку каждая область ограничена двумя асимптотами, то структура данных областей такова: при $\kappa > 0$ асимптотами являются прямые $\tilde{\omega} = -\kappa$ и $\tilde{\omega} = -\kappa - 1$; в интервале $-1 < \kappa < -0.5$ это прямые $\tilde{\omega} = +1$ и $\tilde{\omega} = -\kappa$; единственная асимптота $\tilde{\omega} = -1$ при $\kappa = -0.5$; для интервала $-0.5 < \kappa < 0$ это асимптоты $\tilde{\omega} = -1$ и $\tilde{\omega} = +1$; и в области $\kappa < -1$ соответственно $\tilde{\omega} = -\kappa - 1$ и $\tilde{\omega} = -\kappa$. Параметры κ и $\tilde{\omega}$ считаем независимыми и удовлетворяющими неравенствам $\kappa > 1$, $\tilde{\omega} > 1$.

На рис. 3, 4, 6—8 представлены дисперсионные зависимости при разных значениях κ и четырех вариантах значений параметров a и b : $a = 10$, $b = 4$; $a = 10$, $b = 1.21$; $a = 3$, $b = 2.25$; $a = 3$, $b = 1.21$. В частности, на рис. 3 рассмотрен случай $\kappa = 2$. Здесь и на рис. 8 сплошная линия обозначает левую часть уравнения (29), удовлетворяющую неравенству (21), а на рис. 4, 6, 7 — неравенству (33). Штриховые линии соответствуют левой части уравнения (29), не удовлетворяющей условиям (21) или (33), и поэтому не содержащей корней уравнения (29). Штрихпунктирная линия соответствует правой части (29). Пересечение горизонтальной штрихпунктирной линии и сплошной линии определяет корни уравнения (29).

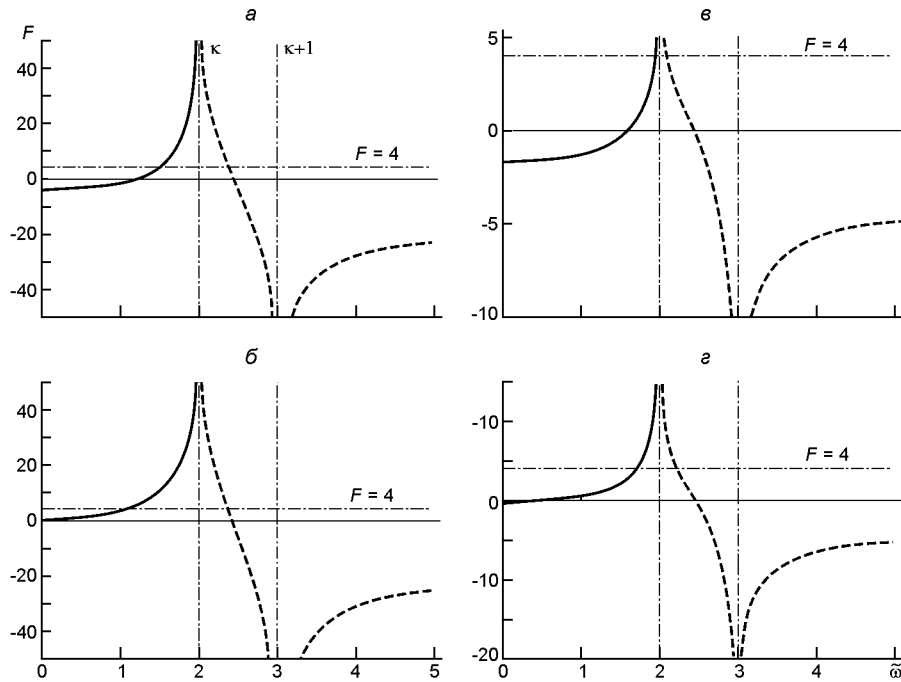


Рис. 3. Дисперсионная зависимость в области $\omega > 0$ для $\nu = 2$ и значений параметров: а — $\mu = 10, \nu^2 = 4$; б — $\mu = 10, \nu^2 = 1.21$; в — $\mu = 3, \nu^2 = 2.25$; г — $\mu = 3, \nu^2 = 1.21$

Верхняя штрихпунктирная линия на рис. 3, соответствующая правой части уравнения (29), пересекает график дважды, но лишь один из корней удовлетворяет условию (21). Таким образом, имеем единственный корень при $\omega > 0$.

Поскольку в интервале $-1 < \omega < 0$ логарифм принимает отрицательные значения, условие существования корней дисперсионного уравнения (31) модифицируется в зависимости от значений параметров ν^2 и μ . Так, в данном интервале фигурирующие в (29) величины $\tilde{\omega}$ и $\tilde{\omega}^*$ должны удовлетворять условию (21) и неравенству (33). Таким образом, при $\nu^2 = \mu$, а также при $\nu^2 > \mu$ ($\nu^2 > 1, \mu > 1$) ограничение (21) становится более сильным, чем (33). Данное ограничение на корни дисперсионного уравнения согласуется с ограничениями для остальных двух интервалов.

Специфическое условие возникает, когда в данном интервале $\nu^2 < \mu$, т. е. реализуется случай, который мы избрали для построения зависимостей. В данном случае более сильным оказывается условие (33).

На рис. 4, 6, 7 прямая $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}^* = \left| \sqrt{\frac{\nu^2 - 1}{1}} \right|$ обозначена вертикальной штрихпунктирной линией, и корни дисперсионного уравнения (29) должны удовлетворять условию (33). Поскольку при частоте $\tilde{\omega} = \left| \sqrt{\frac{\nu^2 - 1}{1}} \right|$ левая часть уравнения (29) обращается в ноль, то факти-

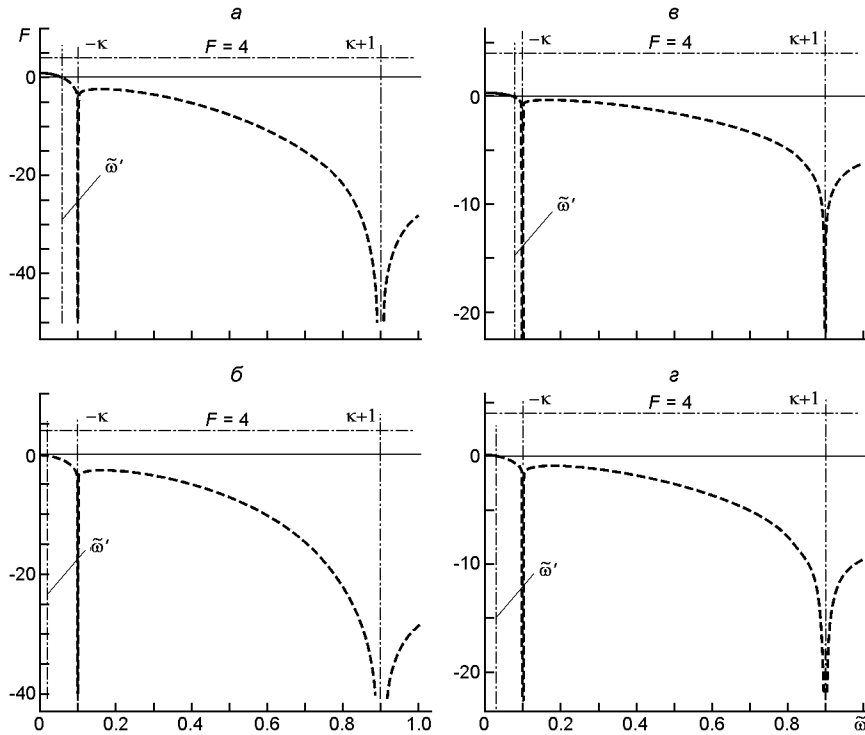
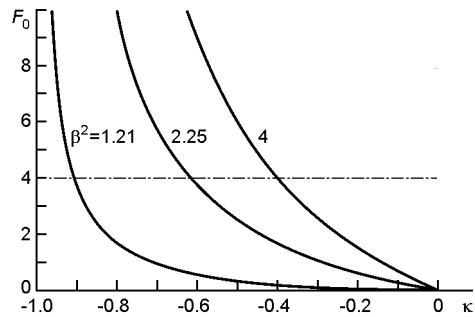


Рис. 4. Дисперсионная зависимость в интервале $-0.5 < \tilde{\omega} < 0$ для $\tilde{\omega} = -0.1$; вертикальная штрихпунктирная линия $\tilde{\omega}'$ — прямая $\tilde{\omega} = -\left| \sqrt{\frac{\beta^2 - 1}{1}} \right|$. (Варианты а — г — как на рис. 3)

Рис. 5. Зависимость $F_0(\tilde{\omega})$ согласно выражению (42) при трех значениях β^2 (числа у кривых)



чески на рис. 4, 6, 7 удовлетворять условию (33) будет та часть графика, где $F(\tilde{\omega}) > 0$.

В случае $-0.5 < \tilde{\omega} < 0$, графически представленном на рис. 4, приведены зависимости для $\tilde{\omega} = -0.1$. Как видно, существование корня уравнения (29), удовлетворяющего условию (33), зависит от значения, к которому стремится $F(\tilde{\omega})$ при $\tilde{\omega} \rightarrow 0$. Это значение обозначим как F_0 :

$$F_0 = \frac{2(\beta^2 - 1)}{1}. \quad (42)$$

Приведем графики зависимости $F_0(\tilde{\omega})$ на рис. 5 при трех значениях β^2 , которыми мы пользуемся для построения дисперсионных зависимостей — $\beta^2 = 4, 2.25$ и 1.21 . Убывающий характер $F(\tilde{\omega})$ на интервале от $\tilde{\omega} = 0$ до $\tilde{\omega} = -$ говорит о том, что для существования пересечения с

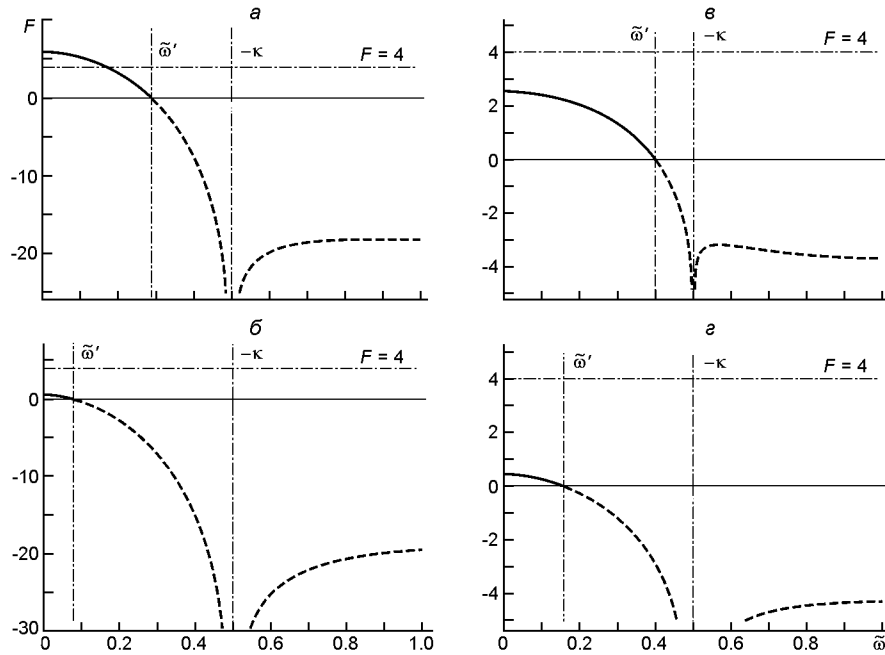


Рис. 6. Дисперсионная зависимость в частном случае $\gamma = -0.5$. Прямая линия $\tilde{\omega} = -1$ является единственной асимптотой; вертикальная штрихпунктирная линия $\tilde{\omega} = -\kappa$ — прямая $\tilde{\omega} = -1 - \sqrt{\frac{2}{1 - \kappa^2}}$. (Варианты а — в — как на рис. 3)

горизонтальной линией $F(\tilde{\omega}) = 4$ необходимо выполнения условия $F_0 > 4$. Из рис. 5 видно, что при $\gamma = -0.1$ данное условие не выполняется при рассматриваемых значениях κ^2 , т. е. корней уравнения (29) нет. Нетрудно показать, что условие $F_0 > 4$ начинает выполняться при κ^2

19 для значения $\gamma = -0.1$. Следовательно, в интервале $-0.5 < \gamma < 0$ существует один корень, удовлетворяющий условию (33), когда $F_0 > 4$, и ни одного корня, если $F_0 < 4$.

Рассмотрим случай $\gamma = -0.5$. Обе асимптоты, имеющие место в интервале $-1 < \gamma < 0$, а именно $\tilde{\omega} = +1$ и $\tilde{\omega} = -1$, сходятся в одну, единственную. График дисперсионной зависимости для данного случая изображен на рис. 6.

Перейдем к рассмотрению интервала $-1 < \gamma < -0.5$. График дисперсии на этом интервале изображен на рис. 7 для значения $\gamma = -0.9$. В данном случае существует либо один, либо два корня, удовлетворяющих условию (33), в зависимости от значения F_0 . Также, вследствие немонотонности, возникающей в интервале $0 < \tilde{\omega} < +1$ при некоторых значениях κ^2 и γ , возможно появление дополнительного, третьего корня (см. рис. 7, б). Если $F_0 > 4$, то $F(\tilde{\omega})$ пересекает горизонтальную штрихпунктирную линию дважды (трижды), и существуют два (три) корня, если же $F_0 < 4$, то имеем один или два корня. Для $\gamma = -0.9$ условие $F_0 > 4$ выполняется при $\kappa^2 > 1.222$.

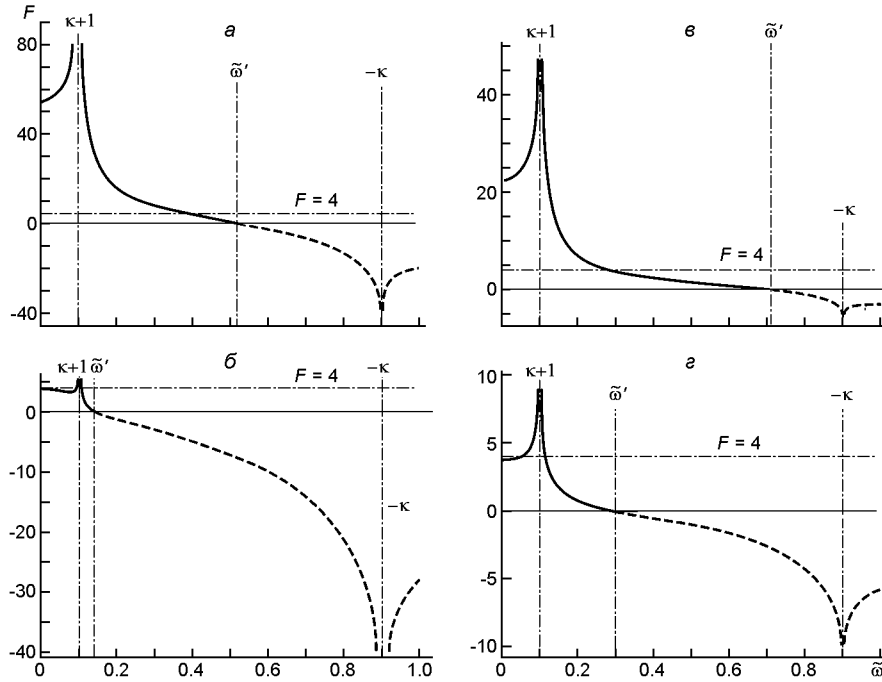


Рис. 7. Дисперсионная зависимость для $\tilde{\omega} = -0.9$; вертикальная штрихпунктирная линия $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}'$ — прямая $\tilde{\omega} = -1 \pm \sqrt{\frac{\tilde{\omega}^2 - 1}{1}}$. (Варианты $a - г$ — как на рис. 3)

И наконец, исследуем дисперсию в области $\tilde{\omega} < -1$, конкретно для $\tilde{\omega} = -2$. Как видно из рис. 8, функция $F(\tilde{\omega})$ качественно изменяет своё поведение в зависимости от значения параметров дисперсионного уравнения (29). Есть некоторое критическое значение $\tilde{\omega}_{cr}^2$, при котором имеет место этот эффект. Величина $\tilde{\omega}_{cr}^2$ определяется равенством

$$\tilde{\omega}_{cr}^2 \frac{2}{1} = 1. \quad (43)$$

Если $\tilde{\omega}^2 > \tilde{\omega}_{cr}^2$, то $F(\tilde{\omega})$ имеет вид, представленный на рис. 8, $a, в$, если же $\tilde{\omega}^2 < \tilde{\omega}_{cr}^2$ — то на рис. 8, $б, г$. Для $\tilde{\omega} = -2$ и $\tilde{\omega} = 10$ значение $\tilde{\omega}_{cr}^2$ равно 3.25. Если же $\tilde{\omega} = 3$, то $\tilde{\omega}_{cr}^2 = 1.5$. Поскольку, согласно уравнению (42), при $\tilde{\omega} < -1$ значение F_0 всегда меньше нуля, то мы имеем два корня, удовлетворяющих условию (21), при $\tilde{\omega}^2 < \tilde{\omega}_{cr}^2$, и ни одного, либо один, либо два корня при $\tilde{\omega}^2 > \tilde{\omega}_{cr}^2$, в зависимости от максимального значения $F(\tilde{\omega})$ в интервале между $\tilde{\omega} = -1$ и $\tilde{\omega} = -\infty$.

Таким образом, мы исследовали поведение дисперсионного уравнения (29) и определили количество корней. Теперь перейдем к изучению поведения зависимости $\tilde{\omega}(\tilde{\omega})$. В области $|\tilde{\omega}| \gg 1$ имеем следующее аппроксимационное выражение для указанного уравнения (см. (35)):

$$\tilde{\omega} \approx \frac{1}{\sqrt{1}} \sqrt{1 - \frac{2}{\tilde{\omega}^2}}. \quad (44)$$

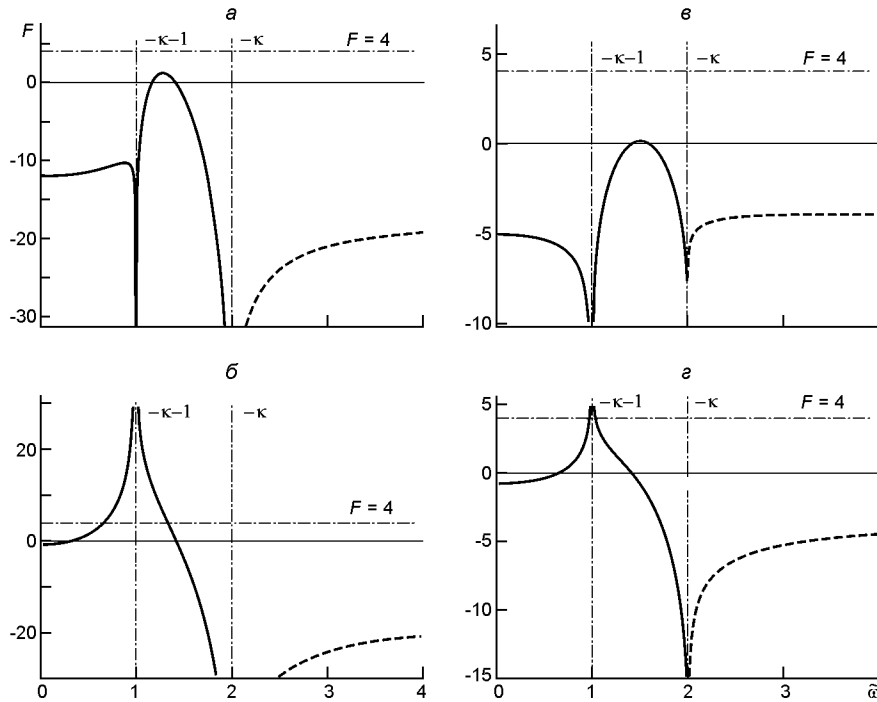


Рис. 8. Дисперсионная зависимость для $\nu = -2$. (Варианты а — г — как на рис. 3)

Получим приближенные выражения $\tilde{\omega}(\omega)$ для интервалов вблизи асимптот. Для интервала $0 < \omega \ll 1$ это выражение имеет вид

$$\tilde{\omega} \sim 1 - \frac{2}{1 - \frac{1}{2}} \exp \left(-\frac{4}{(\omega - 1)^2} \right). \quad (45)$$

При значениях $\omega > 1$, $\omega < -1$ приближенный вид уравнения (29) выглядит следующим образом

$$\tilde{\omega} \sim (\omega - 1) \left(1 - \frac{2}{1 - \frac{1}{2}} \exp \left(-\frac{4(\omega - 1)}{(\omega - 1)^2 (1 - \frac{1}{2})(\omega - 1)} \right) \right). \quad (46)$$

Детали получения уравнений (45) — (46) приведены в Приложении 2.

График зависимости $\tilde{\omega}(\omega)$, представленный на рис. 9 и 10 для $\nu = 10$ и $\nu = 3$ соответственно, позволяет увидеть, что характер её остается аналогичным случаю непрерывного поля [31] в областях $\omega > 0$ и $\omega < -1$, однако появляются дополнительные решения в интервале $-1 < \omega < 0$. Согласно расчётам аппроксимацией (44) можно пользоваться и в интервале $-1 < \omega < 0$, при этом ограничения, наложенные на ее использование в данном интервале, представлены графически на рис. 11. Вблизи асимптоты $\tilde{\omega} = +1$ в интервале $-1 < \omega < 0$ уравнение (29) можно записать в приближенном виде:

$$\tilde{\omega} \sim (k-1) \frac{1}{2} \exp \frac{4(k-1)}{2(k^2-1)(k-1)} \quad (47)$$

Все полученные выше результаты при $\beta^2 = 1$ полностью соответствуют результатам, полученным для непрерывного вертикального магнитного поля, рассмотренного ранее в работе [31].

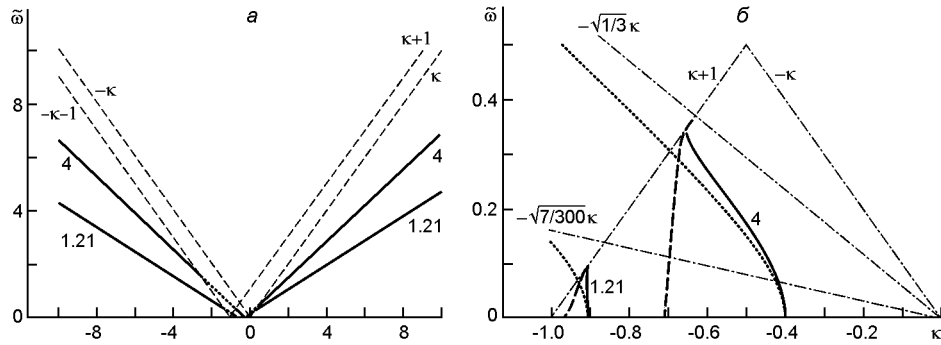


Рис. 9. Зависимость $\tilde{\omega}(k)$ при $\beta^2 = 10$ для значений $k^2 = 4$ и $k^2 = 1.21$. Сплошная линия — график уравнения (29), пунктир — аппроксимация (44). Фрагмент \tilde{b} — увеличенное изображение области $-1 < k < 0$, штриховая линия — аппроксимация (47)

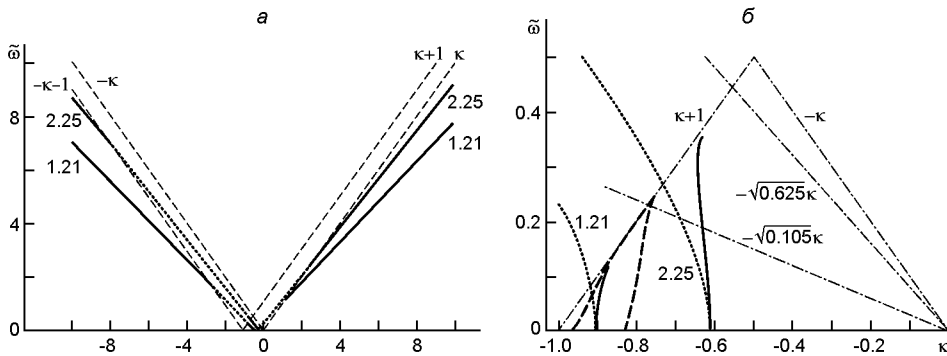


Рис. 10. То же для $\beta^2 = 3$ при $k^2 = 2.25$ и $k^2 = 1.21$. Сплошная линия — график уравнения (29), пунктир — аппроксимация (45), штриховая линия — аппроксимация (47)

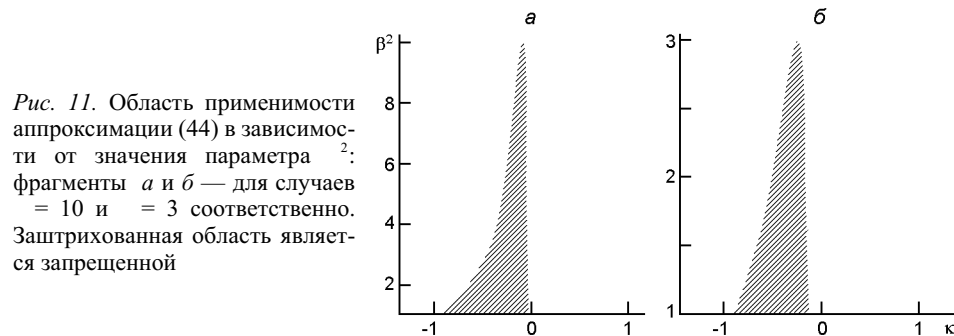


Рис. 11. Область применимости аппроксимации (44) в зависимости от значения параметра β^2 : фрагменты a и b — для случаев $\beta^2 = 10$ и $\beta^2 = 3$ соответственно. Заштрихованная область является запрещенной

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В работе проведен анализ условий распространения винтовых мод с $m = 1$ в «тонкой» неоднородной по радиусу магнитной силовой трубке. Основное внимание в работе уделено проблеме нахождения собственных частот и собственных функций таких винтовых возмущений. Мы предположили, что на границе плазменного шнура вертикальное магнитное поле является разрывным и что по трубке течет однородный ток. Этот ток генерирует азимутальное магнитное поле, нарастающее пропорционально r внутри трубки и спадающее как r^{-1} — от границы шнура. Значения плотности плазмы предполагались постоянными внутри и снаружи трубки. Эти предположения приводят к уравнениям малых колебаний (14) и (16) внутри и снаружи плазменного шнура для волновых мод с $\omega^2 > 0$. Анализ уравнения (16) показал, что оно имеет решения при частотах, удовлетворяющих неравенству (21).

Решение указанных уравнений с граничными условиями (11) и (12) на границе шнура приводит к довольно сложному в математическом смысле дисперсионному уравнению (29). Качественный анализ этого уравнения показал, что оно имеет решения только для определенных значений магнитных полей и плотностей, удовлетворяющих неравенствам (21) и (32).

Дисперсионное уравнение (29) было исследовано в приближении малого азимутального магнитного поля. Получено аналитическое выражение (35) для частоты, которое в случае отсутствия азимутального магнитного поля переходит в хорошо известный в теории солнечных магнитных трубок результат [10]. Установлено, что в этом случае собственная функция радиального смещения (37) совпадает с радиальным смещением, полученным в работе [8] в том же приближении. Это смещение имеет вид «ступеньки» с амплитудой, убывающей от границы шнура. Именно поэтому мода $m = 1$ была названа в указанных работах глобальной.

В рамках рассмотренной модели также исследован вопрос о генерации неустойчивых винтовых мод $m = 1$. Для таких мод получено дисперсионное уравнение (41), из которого следует, что решения с $\omega^2 < 0$ не реализуются. Этот результат представляется важным с точки зрения наблюдений солнечной активности.

Численное исследование дисперсионного уравнения (29) для устойчивых мод $\omega^2 > 0$ показало, что уравнения (44) — (47) позволяют достаточно точно аппроксимировать рассчитанные численные кривые. Было показано, что есть три интервала изменения ω , внутри которых зависимость $\omega(\beta)$, определяемая из (29), имеет ненулевые решения. В интервале $\beta > 0$ существует одна мода, что согласуется с результатами [31] для непрерывного вертикального магнитного поля. В области $-1 < \beta < 0$ в зависимости от параметров плазмы и магнитного поля могут существовать либо одно, либо два, либо три решения. Дис-

персионное уравнение (30) в этом интервале не имеет решений. В последнем интервале $\beta < -1$ при выполнении определенного условия могут существовать две волновые моды. В случае непрерывного магнитного поля ($\beta^2 = 1$) результаты, приведенные на рис. 3—10, совпадают с результатами, полученными в работе [31].

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Получение уравнения (38)

Полагая $\beta^2 > 0$, перепишем уравнение (14) в виде

$$(\beta^2 - F_e^2) \frac{d}{dr} r^3 \frac{d r_i}{dr} = 0. \tag{П.1.1}$$

Откуда, как и раньше (см. (15)), получаем

$$r_i = a. \tag{П.1.2}$$

Снаружи плазменного шнура уравнение малых колебаний модифицируется следующим образом:

$$r^3 \frac{d}{dr} \left(\frac{a^2 B(a)}{r^2} \right) - k_z B_{ze} \frac{d r_e}{dr} = a B^2(a), \tag{П. 1.3}$$

где $a = \text{const}$. Интегрируя (П.1.3), получаем

$$r_e(x) = \frac{a}{2} \frac{d(1/x^2)}{(1/x^2)^2}. \tag{П. 1.4}$$

Здесь величины x и \tilde{a} определены уравнением (19), а \tilde{a} — уравнением (40).

Из (11), (П.1.1) и (П.1.4) получаем связь a с \tilde{a} :

$$a = \frac{2 \tilde{a}}{G(1)}, \tag{П.1.5}$$

где

$$G(x) = \frac{d(1/x^2)}{(m/x^2)^2}. \tag{П.1.6}$$

Из (П.1.4) — (П. 1.6) находим

$$r_e = a \frac{G(x)}{G(1)}. \tag{П.1.7}$$

Из (П.1.3) и (П. 1.6) получаем уравнение

$$r^2 (\beta^2 - F_e^2) \frac{d r_e}{dr} \Big|_{r=a} = \frac{2 a B^2(a)}{a G(1)}, \tag{П.1.8}$$

которое будем использовать при расчете граничного условия (12).

Из (12), (П.1.2), (П.1.7) получаем искомое дисперсионное уравнение

$$^2 a(\quad) k_z^2 a(B_{zi}^2 \quad B_{ze}^2) \frac{2B^2(a)}{aG(1)}, \quad (\text{П.1.9})$$

совпадающее с уравнением (38).

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Получение уравнений (45) — (46)

Для дисперсионного уравнения (29) в интервале 0 1 можно положить $\tilde{\sim} \sim$, что приводит к равенству

$$\frac{2}{(1 \quad 2)(\quad \tilde{\sim})} \exp \frac{4}{(\quad ^2)}.$$

Откуда получаем уравнение (45)

$$\tilde{\sim} \quad 1 \frac{2}{1 \quad 2} \exp \frac{4}{(\quad ^2)}. \quad (\text{П.2.1})$$

При $\tilde{\sim} \sim$ 1, $\ll 1$ в уравнении (29) справедливо приближение 1, что приводит к уравнению

$$\tilde{\sim} (1 \quad) 1 \frac{2}{1 \quad 2} \exp \frac{4(\quad 1)}{(\quad 1)^2(z \quad 1) \quad ^2(\quad ^2 \quad 1)}$$

$$(1 \quad) 1 \frac{2}{1 \quad 2} \exp \frac{4(\quad 1)}{^2(\quad ^2) (1 \quad 2)(\quad 1)}. \quad (\text{П.2.2})$$

Для выполнения условия (21) в (П.2.2) необходимо оставить только знак «+», что приводит к уравнению (46). Аналогичная ситуация имеет место при получении (47).

Авторы благодарны И. Т. Жуку за помощь в оформлении рукописи. Работа выполнена в рамках Комплексной программы НАН Украины по космическим исследованиям и программы НАН Украины по физике плазмы. Работа также поддержана грантом Украинского научно-технического центра, проект № 6060. Авторы благодарят рецензента за полезные замечания, способствовавшие существенному улучшению статьи.

1. *Бейтман Г.* МГД-неустойчивости. — М: Энергоиздат, 1982.—200 с.
2. *Бернштейн А.* Вариационный принцип для задач устойчивости в идеальной магнитогидродинамике // Основы физики плазмы / Под ред. А. А. Галеев и Р. Судан. — М.: Энергоатомиздат, 1983.—Т. 1.— С. 365—392.
3. *Гуссенс М.* Магнитогидродинамические волны и волновой нагрев неоднородной плазмы // Космическая магнитная гидродинамика. — М.: Мир, 1995.—С. 144—178.
4. *Загородний А. Г., Черемных О. К.* Введение в физику плазмы. — Киев: Наук. думка, 2014.—696 с.

5. *Кадомяцев Б. Б.* Гидромагнитная устойчивость плазмы // Вопросы теории плазмы. — М.: Госатомиздат, 1963.—Вып. 2.—С. 132—176.
6. *Миямото К.* Основы физики плазмы и управляемого синтеза. — М.: Физматлит, 2007.—424 с.
7. *Ладиков-Роев Ю. П.* Магнито-вихревые кольца // Изв. АН СССР. Сер. Механика и машиностроение.—1960.—№ 4.—С. 7—13.
8. *Ладиков-Роев Ю. П., Черемных О. К.* Распространение несжимаемых винтовых мод в тонкой магнитной силовой трубке // Проблемы управления и информатики.—2016.—№ 2.—С. 91—100.
9. *Паркер Е.* Космические магнитные поля. Их образование и проявления. Часть 1. — М.: Мир, 1982.—608 с.
10. *Робертс Б.* Магнитогидродинамические волны на Солнце // Космическая магнитная гидродинамика. — М.: Мир, 1995.—С. 112—143.
11. *Филиппов Б. П.* Эруптивные процессы на Солнце. — М.: Физматлит, 2007.—216 с.
12. *Цап Ю. Т., Копылова Ю. Г., Степанов А. В.* Баллонная неустойчивость и колебания корональных петель // Астрон. журн.—2006.—№ 12.—С. 1142—1152.
13. *Черемных О. К., Климушкин Д. Ю., Косторев Д. В.* О структуре азимутально-мелкомасштабных УНЧ-колебаний горячей космической плазмы в кривом магнитном поле. Мода с непрерывным спектром // Кинематика и физика небес. тел.—2014.—**30**, № 5.—С. 3—21.
14. *Черемных О. К.* К теории поперечно-мелкомасштабных мод в цилиндрическом плазменном шнуре // Кинематика и физика небес. тел.—2015.—**31**, № 5.—С. 3—19.
15. *Черемных О. К., Климушкин Д. Ю., Магер П. Н.* О структуре азимутально-мелкомасштабных УНЧ-колебаний горячей космической плазмы в кривом магнитном поле. Моды с дискретным спектром // Кинематика и физика небес. тел.—2016.—**32**, № 3.—С. 26—39.
16. *Шафранов В.Д.* К вопросу о гидромагнитной устойчивости плазменного шнура с током в сильном магнитном поле // Журн. эксперим. и теор. физ.—1970.—**40**.—С. 241—253.
17. *Andrushchenko Z. M., Revenchuk S. M., Cheremnykh O. K.* Steady MHD flows in a cylindrical plasma column // Plasma Phys. Repts.—1993.—**19**. — OSTI Identifier: 102 964.
18. *Bennet K., Roberts B., Narain V.* Waves in twisted magnetic flux tubes // Solar Phys.—1999.—**185**.—P. 41—59.
19. *Burdo O. S., Cheremnykh O. K., Revenchuk S. M., Pustovitov V. D.* General geometric dispersion relations for toroidal plasma configuration // Plasma Phys. and Controlled Fusion.—1994.—**36**, N 4.—P. 641—656.
20. *Cheremnykh O. K.* Dispersion equation and stability limit for ballooning flute modes in tokamak with circular magnetic surfaces and arbitrary pressure profile // Nucl. Fusion.—1989.—**29**, N 1.—P. 1899—1904.
21. *Cheremnykh O. K., Andrushchenko Z. M., Edenstrasser J. W., Taranov V. B.* Relaxation of non-ideal magnetohydrodynamic plasma in cylindrical column // Phys. Plasmas.—1994.—**1**, N 8.—P. 2525—2530.
22. *Cheremnykh O. K.* On the motion of vortex rings in an incompressible media // Nelineinaya Dinamika [Russian Journal of Nonlinear Dynamics].—2003.—**4**, N 4.—P. 417—428.
23. *Edwin P. M., Roberts B.* Wave propagation in magnetic cylinder // Solar Phys.—1983.—**88**.—P. 179—191.

24. *Erdelyi R., Fedun V.* Sausage MHD waves in incompressible flux tubes with twisted magnetic fields // *Solar Phys.*—2006.—**238**.—P. 41—59.
25. *Erdelyi R., Fedun V.* Linear MHD Sausage waves in compressible magnetically twisted flux tubes // *Solar Phys.*—2007.—**246**.—P. 101—118.
26. *Hain K., Lüst R. Z.* Zur Stabilität zylindersymmetrischer Plasmakonfigurationen mit Volumenströmen // *Z. Naturforsch. A.*—1958.—**13**, N 11.—S. 936—940.
27. *Kryshstal A. N., Gerasimenko S. V., Voitsekhovska A. D., Cheremnykh O. K.* One type of three-wave interaction of low-frequency waves in magneto-active plasma of the solar atmosphere // *Kinematics and Physics of Celestial Bodies.*—2014.—**30**, N 3.—P. 147—154.
28. *Ladikov-Roev Yu. P., Cheremnykh S. O., Yatsenko V. A.* Axisymmetric force-free magnetic configurations in plasma flux // *J. Automation and Inform. Sci.*—2013.—**45**, N 4.—P. 45—58.
29. *Ladikov-Roev Y. P., Loginov A. A., Cheremnykh O. K.* Nonstationary model of solar spicula // *J. Automation and Inform. Sci.*—2014.—**46**, N 10.—P. 20—29.
30. *Ruderman M. S.* Nonaxisymmetric oscillations of the thin twisted magnetic tubes // *Solar Phys.*—2007.—**246**.—P. 119—131.
31. *Ruderman M. S.* Propagating kink waves in thin twisted magnetic tubes with continuous equilibrium magnetic field // *Astron. and Astrophys.*—2015.—**575**, A130.—P. 1—11.
32. *Stepanov A. V., Shibasaki K., Kopylova Yu. G., Tsap Yu. T.* MHD-oscillations of Coronal loops and diagnostics of flare plasma // *Solar Physics with Nobeyama Radioheliograph: Proc. of Nobeyama Symp.* — 2004, NSRO Report N 1.—P. 23—31.
33. *Wesson J. A.* Hydromagnetic stability of tokamaks // *Nucl. Fusion.*—1978.—**18**, N 1.—P. 87—132.

Статья поступила в редакцию 08.08.16